

Introduction à la méthode des EF

Exo2b: condition sur la dérivée de $u(x)$ en $x = 0$, flux imposé

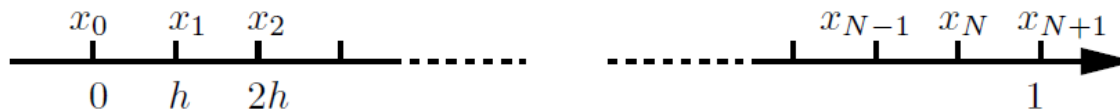
Établir le schéma aux différences finies dans lequel $u(x)$ est le déplacement vertical d'une corde non tendue ($P=0$ donc $c(x) = P/EI(x) = 0$), telle **que $du/dx = a$ en $x = 0$ (flux imposé)** et $u(1)=0$ et soumise à une densité de charge verticale $f(x) = -x$.

On notera u_0 l'approximation de u en $x = 0$. et on utilisera le $(N+1)$ vecteur $\vec{u} =$

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \dots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix}$$

Déterminer la solution analytique.

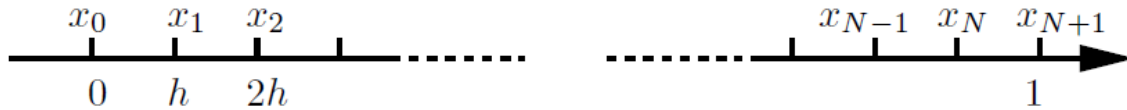
Soit N un entier positif; on pose $h = 1/(N + 1)$ et on note $x_j = jh$, $j = 0, 1, 2, \dots, N + 1$, les points de discrétisation (fig. 10.3).



Établir le schéma aux différences finies dans lequel $u(x)$ est le déplacement vertical d'une corde non tendue ($P=0$ donc $c(x) = P/EI(x) = 0$), telle **que $du/dx = a$ en $x = 0$ (flux imposé)** et $u(1)=0$ et soumise à une densité de charge verticale $f(x) = -x$.

On discrétise le segment $[0,1]$ en $N+1$ pas d'espace $h = 1/(N+1)$

Soit N un entier positif; on pose $h = 1/(N+1)$ et on note $x_j = jh$, $j = 0, 1, 2, \dots, N+1$, les points de discrétisation (fig. 10.3).



On doit introduire $u(0)$ qui est inconnue: on pose $u_0 \approx u(x=0)$ et on utilise la condition aux limites (C.L.) en $x = 0$:

$$u'(0) = a \approx \frac{u_1 - u_0}{h} \text{ i.e. } -u_0 + u_1 = ah \text{ et on définit le } (N+1) \text{ vecteur } \vec{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \dots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix}$$

Pour $j > 1$, le schéma en différences finies reste inchangé:

Le schéma en différences finies s'écrit avec $c(x) = 0$, $f(x) = -x$ et u_j une approximation de la solution u en x_j pour j variant de 1 à N :

$$u'(0) = a \approx \frac{u_1 - u_0}{h} \text{ i.e. } -u_0 + u_1 = ah \text{ que l'on peut écrire } \frac{u_0 - u_1}{h^2} = \frac{-a}{h}$$

$$-u''(x_1) = f(x_1) = -x_1 \text{ soit } \frac{-u_0 + 2u_1 - u_2}{h^2} \approx f(x_1) = -x_1 = -h$$

Le système matriciel s'écrit alors pour $N = 3$, i.e. $h = 1/4$:

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} -a/h \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a/h \\ -h \\ -2h \\ -3h \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{u} = -h^3 \begin{pmatrix} a/h^2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Résolution du système:

$$B\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{u} = \vec{b} = -h^3 \begin{pmatrix} a/h^2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ avec } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

B est symétrique On vérifie que $\det B$ est non nul ... et on résout à l'aide des pivots ou alors d'une décomposition en LU (produit d'une matrice triangulaire inférieure L par une matrice triangulaire supérieure U).

Mais surtout, on détermine LA solution analytique:

$$u(x) = \frac{x^3}{6} + ax - \left(\frac{1}{6} + a\right) \text{ qui donne } u(0) = -\left(\frac{1}{6} + a\right)$$