

Exo2a:

Introduction à la méthode des EF

1- Etablir la relation $u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2)$

2- Établir le schéma aux différences finies dans lequel $u(x)$ est le déplacement vertical d'une corde non tendue ($P=0$ donc $c(x) = P/EI(x) = 0$), fixée en $x=0$ et 1 et soumise à une densité de charge verticale $f(x) = -x$.

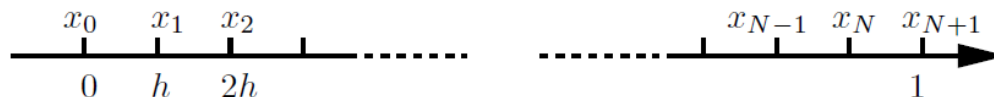
3- En prenant $N = 3$, calculer une approximation de la solution en $x = 0.25, 0.5$ et 0.75 à l'aide d'une décomposition de Cholesky.

Indication: calculer le produit matriciel:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Seconde indication: comparer votre résultat avec LA SOLUTION ANALYTIQUE

Soit N un entier positif; on pose $h = 1/(N+1)$ et on note $x_j = jh$, $j = 0, 1, 2, \dots, N+1$, les points de discrétisation (fig. 10.3).



1- Etablir la relation $u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2)$

Pour ce faire, on utilise un développement limité de Taylor (ou Mac Laurin) de $u(x)$ à l'ordre 2 autour de x_0 :

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i + o((x - x_0)^n).$$

Dans notre cas, on remplace x par $(x + h)$ sachant que h reste petit:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) + O(h^2)$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) + O(h^2)$$

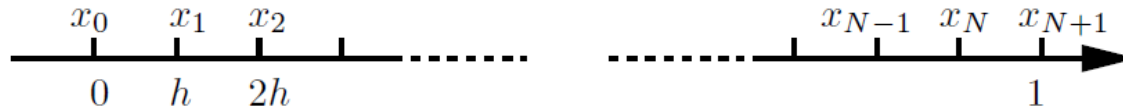
$$u(x+h) + u(x-h) = 2u(x) + h^2 u''(x) + O(h^2)$$

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

2- Établir le schéma aux différences finies dans lequel $u(x)$ est le déplacement vertical d'une corde non tendue ($P=0$ donc $c(x) = P/EI(x) = 0$), fixée en $x=0$ et 1 et soumise à une densité de charge verticale $f(x) = -x$.

On discrétise le segment $[0,1]$ en $N+1$ pas d'espace $h = 1/(N+1)$:

Soit N un entier positif; on pose $h = 1/(N+1)$ et on note $x_j = jh$, $j = 0, 1, 2, \dots, N+1$, les points de discrétisation (fig. 10.3).



Le schéma en différences finies s'écrit avec $c(x) = 0$, $f(x) = -x$ et u_j une approximation de la solution u en x_j :

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h \\ -2h \\ \dots \\ -(N-1)h \\ -Nh \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{u} = -h^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \dots \\ (N-1) \\ N \end{pmatrix}$$

Introduction à la méthode des EF

Exo2a: corrigé

3- En prenant $N = 3$ ($h=1/4$), calculer une approximation de la solution en 0.25, 0.5 et 0.75 à l'aide d'une décomposition de Cholesky.

La solution analytique de $-u''(x) = -x$ avec $u(0)=u(1)=0$ est $u(x) = x(x^2-1)/6 < 0$.

Solution numérique: $N=3$ donc $h = 1/4$ et le schéma en différences finies s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ donc}$$

$$A \bar{u} = LL^t \bar{u} = \frac{-1}{16} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 3/4 \end{pmatrix} \text{ avec } L = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Introduction à la méthode des EF

Exo2a: corrigé

Solution analytique de $u''(x) = x$ avec $u(0)=u(1)=0$ est $u(x) = x(x^2-1)/6$

Solution numérique: $h = 1/4$ et le schéma en différences finies devient s'écrit:

$$A \vec{u} = LL^t \vec{u} = \frac{-1}{16} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 3/4 \end{pmatrix} \text{ avec } L = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$\text{On résoud } L\vec{y} = \frac{-1}{16} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 3/4 \end{pmatrix} \text{ (descente) puis } L^t\vec{x} = \vec{y} \text{ (montée) qui donne } \vec{x} = \begin{pmatrix} -5/128 \\ -1/16 \\ -7/128 \end{pmatrix}$$

qui est exactement la solution analytique en $1/4$, $1/2$ et $3/4$!

