Problème parabolique 1D et éléments finis

Mass lumping sur la matrice M

Pour le rendre explicite, il faut calculer concrètement la matrice de masse M en utilisant la formule de quadrature des trapèzes. Ainsi, nous obtenons en utilisant la formule (10.24) avec $c = 1$:

$$M_{ji} = \int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx \simeq L_h(\varphi_i\varphi_j) = \begin{cases} h & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Ce procédé consiste à approcher la matrice de masse M par une matrice diagonale (on parle ici de ***mass lumping***) et donc à rendre explicite le schéma d'Euler progressif.

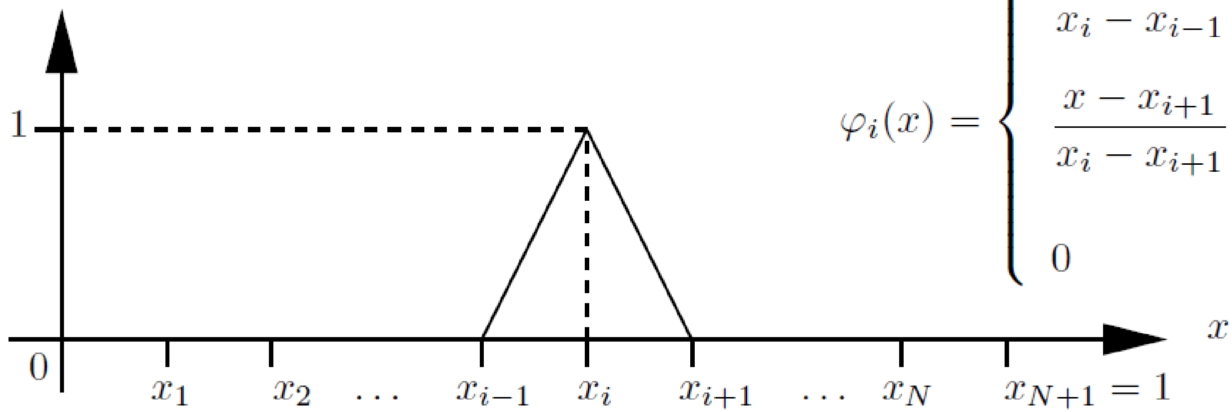
Mass lumping sur la matrice M: sommer tous les termes d'une ligne i sur M_{ii} et rendre ainsi M diagonale (acceptable si les $M_{ij,j\neq i}$ sont très petits devant les M_{ii})

$$M_{ii} \leftarrow \sum_{j=1}^{N} M_{ij}$$

Exo 5a : calculer exactement M_{ii} et $M_{i,i+1}$ pour des fonctions chapeaux linéaires 1D et appliquer le mass lumping sur la matrice M.

Problème parabolique 1D et éléments finis

Exo 5a - corrigé : calculer exactement M_{ii} et $M_{i,i+1} = M_{i,i-1}$ pour des fonctions chapeaux linéaires 1D



$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \le x \le x_i, \\[2ex] \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & \text{si } x_i \le x \le x_{i+1}, \\[2ex] 0 & \text{si } x \le x_{i-1} \text{ ou } x \ge x_{i+1}. \end{cases}$$

$$M_{ii} = \int_{-h}^{h} \varphi_i^2(x)dx = 2\int_0^h (1\text{-}x/h)^2 dx = \frac{2}{3}h \text{ et } M_{i,i+1} = M_{i,i-1} = \int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x)dx = \int_0^h (1\text{-}x/h)\frac{x}{h}dx = \frac{1}{6}h$$

$$M = h\begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 0 & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix} \approx h\begin{pmatrix} 5/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/6 \end{pmatrix} \approx hI \text{ et } M^{-1} \approx \frac{I}{h}$$

Problème parabolique 2D et éléments finis

Matrice de masse M, $M_{ij} = \int_\Omega \varphi_i \varphi_j dV$ est nona-diagonale pour L = 4.

Sa demi-largeur de bande est 5.

$$M = \frac{\tilde{h}^2}{12} \begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{C} & & \\ \tilde{C}^T & \tilde{B} & \tilde{C} & \\ & \tilde{C}^T & \tilde{B} & \tilde{C} \\ & & \tilde{C}^T & \tilde{B} \end{bmatrix},$$

où nous avons noté

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & & \\ 1 & 6 & 1 & \\ & 1 & 6 & 1 \\ & & 1 & 6 \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le mass lumping sur M donne: $M \approx h^2 I$

Exo 5b : montrer que M_{11} vaut $h^2/2$ ($\tilde{h} = h$) et M_{12} vaut $h^2/12$ pour L = 4.

Problème parabolique 2D et éléments finis

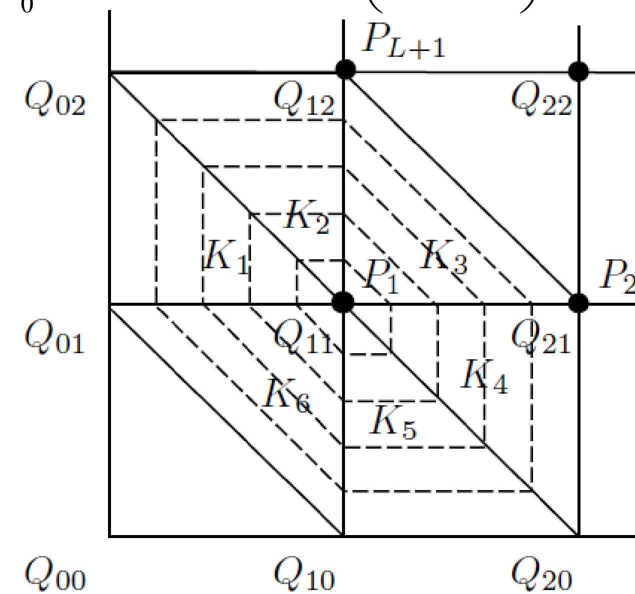
Exo 5b - corrigé : montrer que M_{11} vaut $h^2/2$ ($\tilde{h} = h$) **pour L = 4**

φ_1 est non nulle sur Ki, i=1 à 6 donc $M_{11} = \displaystyle\int_{\text{Ki, i=1 à 6}} \varphi_1^2 dxdy$

Sur K1, $\nabla\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1/h \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\varphi_1 = x/h$ car $\varphi_1(P1)=\varphi_1(h,h) = 1$ et sur K6, $\nabla\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1/h \\ 1/h \end{pmatrix}$ donc $\varphi_1 = x/h+y/h -1$ car $\varphi_1(P1)=1$

Par symétries, $M_{11} = 4\displaystyle\int_{K1} \varphi_1^2 dV + 2\int_{K6} \varphi_1^2 dV$ (intégrales identiques sur K1,K2,K4 et K5 puis sur K3 et K6)

$$\int_{K1} \varphi_1^2 dV = \int_{K1} \left(\frac{x}{h}\right)^2 dxdy = \frac{1}{h^2}\iint_{K1} x^2 dxdy = \frac{1}{h^2}\int_0^h \left(\int_h^{2h-x} x^2 dy\right) dx \text{ et } \int_{K1} \varphi_1^2 dV = \frac{1}{h^2}\int_0^h \left(x^2(h-x)\right) dx = \frac{1}{h^2}\left(\frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4}\right) = \frac{h^2}{12}$$



Sur K6, $\varphi_1 = x/h+y/h -1$ car $\varphi_1(P1)=1$

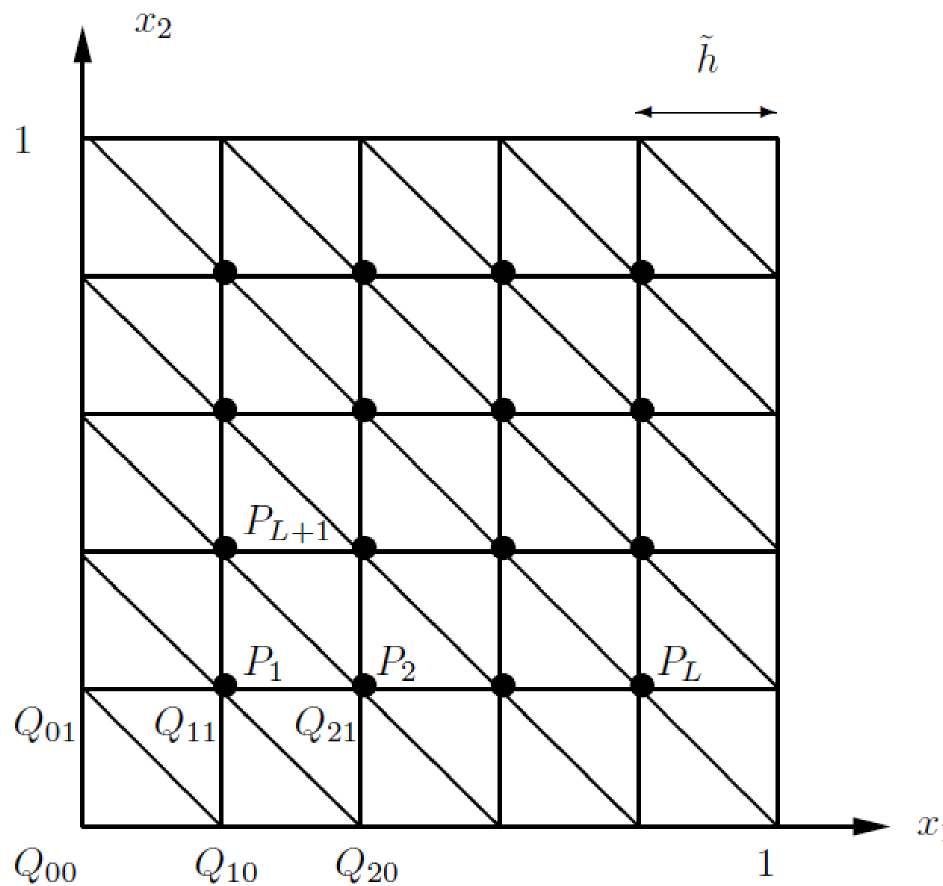
$$\int_{K6} \varphi_1^2 dV = \int_{K6} \left(\frac{x}{h} + \frac{y}{h} - 1\right)^2 dxdy = \int_0^h \left(\int_{h-y}^h \left(\frac{x}{h} + \frac{y}{h} - 1\right)^2 dx\right) dy$$

$$\int_{K6} \varphi_1^2 dV = \int_0^h \left[\frac{h}{3}\left(\frac{x}{h} + \frac{y}{h} - 1\right)^3\right]_{h-y}^h dy = \frac{h}{3}\int_0^h \left(\frac{y}{h}\right)^3 dy = \frac{h}{3}\frac{h}{4} = \frac{h^2}{12}$$

Ainsi $M_{11} = 4\dfrac{h^2}{12} + 2\dfrac{h^2}{12} = 6\dfrac{h^2}{12} = \dfrac{h^2}{2}$

Problème parabolique 2D et éléments finis

Exo 5b - corrigé : montrer que M_{12} vaut $\tilde{h}^2/12$ pour $L = 4$.



Problème parabolique 2D et éléments finis

Exo 5b - corrigé : montrer que M_{12} vaut $\tilde{h}^2/12$ pour L = 4.

Matrice de masse M, $M_{12} = \int_\Omega \varphi_1\varphi_2 dV$. (à vérifier $\int_{K3} \varphi_1\varphi_2 dV = \int_{K4} \varphi_1\varphi_2 dV$)

φ_1 et φ_2 ont des supports communs sur K3 et K4

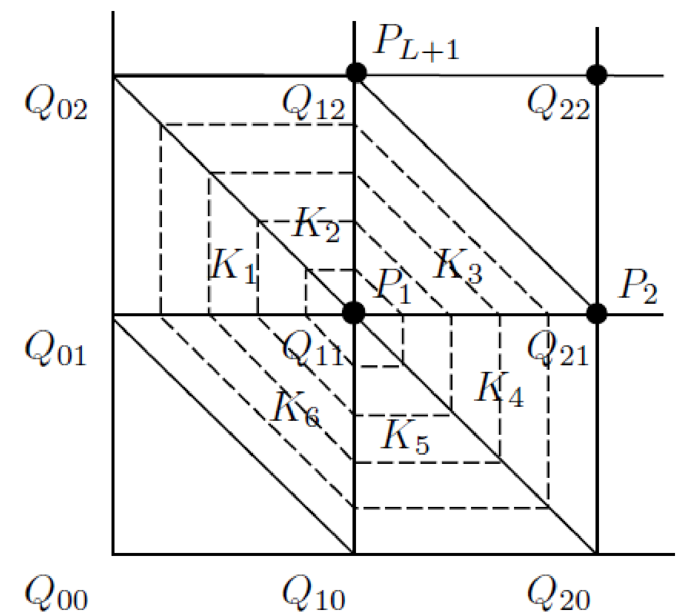
$$M_{12} = \int_{K3,K4} \varphi_1\varphi_2 dV = 2\int_{K4} \varphi_1\varphi_2 dV.$$

Sur K4, $\nabla\varphi_1 = \begin{pmatrix} -1/h \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $\varphi_1 = -x/h+2$ car $\varphi_1(P1)=1$

Sur K4, $\nabla\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1/h \\ 1/h \end{pmatrix}$

donc $\varphi_2 = x/h+y/h-2$ car $\varphi_2(P2)=1$



Problème parabolique 2D et éléments finis

Exo 5b - corrigé : montrer que M_{12} vaut $\tilde{h}^2/12$ pour L = 4.

Matrice de masse M, $M_{12} = \int_\Omega \varphi_1\varphi_2 dV$.

Sur K4, $\varphi_1\varphi_2 = \left(-x/h+2\right)\left(x/h+y/h-2\right)$, on pose

$u = 2-x/h$, $du = -dx/h$ et $v = y/h$, $dv=dy/h$

$$M_{12} = 2\int_{K4} \varphi_1\varphi_2 dV = -\frac{2}{2}h^2\int_0^1\int_0^1 u\left(v-u\right)dudv$$

$$M_{12} = h^2\int_0^1\int_0^1\left(u^2-uv\right)dudv = h^2\left(\frac{1}{3}-\int_0^1\frac{u}{2}du\right)$$

$$M_{12}=h^2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = h^2/12$$