Propédeutique-1 (6 novembre 2024)

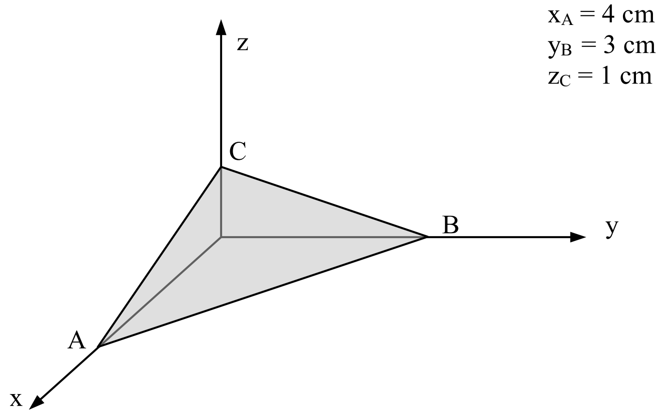
Aucune documentation autorisée, si ce n'est une page A4 recto manuscrite résumant le cours.
Calculatrice non-autorisée. **Bien mentionner les unités.**

Exercice 1 *(5 x 3 points)*

Dans un repère Oxyz, le tenseur des contraintes en un point M est donné par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 300 & 100 & 100 \\ 100 & 0 & 200 \\ 100 & 200 & 0 \end{pmatrix} = 100 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \ (\text{MPa})$$

1. Que valent la trace et le déterminant de σ ?
2. Quelle est la force F (vecteur puis norme en Newton) agissant sur la surface triangulaire ABC donnée dans la figure ci-dessous ?



3. Quelle est le vecteur densité de force agissant sur l'ellipsoïde de révolution de demi-axes OA, OB et OC au point D (0, 3/2, $\sqrt{3}/2$) ? On rappelle l'équation d'un ellipsoïde de révolution de demi-axes a,b et c : $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$.
4. Déterminez les valeurs propres du tenseur σ. Donnez le sens d'une direction propre et de sa valeur propre associée.
5. Déterminez le vecteur propre du tenseur σ associé à la plus grande valeur propre.

Exercice 2 *(3 x 5 points)*

Dans un cylindre infini de rayon intérieur Ri et de rayon extérieur Re soumis à une pression interne p > 0, le tenseur des contraintes s'écrit en coordonnées cylindriques : $\sigma = \begin{pmatrix} A+B/r^2 & 0 & 0 \\ 0 & A-B/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Vérifiez que ces contraintes satisfont l'équilibre des forces en l'absence de gravité. On donne la divergence d'un tenseur σ(r,θ,z) = σ(ρ,θ,z) en coordonnées cylindriques :

$$\mathbf{div}\,(\underline{\sigma}) = \left[\frac{\partial\sigma_{\rho\rho}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_{\rho\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\theta\theta}}{\rho}\right]\mathbf{e}_r + \left[\frac{\partial\sigma_{\rho\theta}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\,\sigma_{\rho\theta}}{\rho}\right]\mathbf{e}_\theta + \left[\frac{\partial\sigma_{\rho z}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho z}}{\rho}\right]\mathbf{e}_z$$

2. La condition en r = Ri est $\vec{t} = \sigma\left(-\vec{e}_r\right) = p\vec{e}_r$. Quelle est la condition en r = Re sachant que la surface extérieure est libre et que l'on néglige la pression atmosphérique ? Déterminez alors A et B.
3. Classez les 3 valeurs propres par ordre décroissant et calculez le cisaillement maximum.

Exercice 3 ***(5 x 3 points)***

Lors d'une déformation, un point M(x,y,z) se déplace en M'(x + ky^2,y,z) avec k > 0.

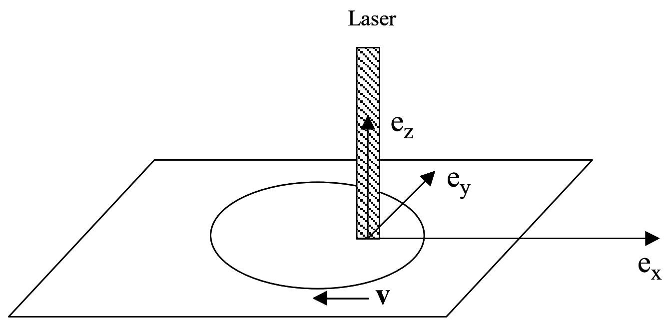
1. Quelle est l'unité de k ?
2. Calculer le tenseur gradient **L** de la déformation, le tenseur de Cauchy-Green **B** et le tenseur de Green-Lagrange **ε** de la déformation.
3. Sous quelle(s) condition(s) qualitative(s) la déformation peut-elle être considérée comme infinitésimale (petites déformations) ?
4. Calculer le tenseur linéarisé des déformations.
5. Dans quelle région de l'espace la déformation peut-elle être considérée comme infinitésimale en prenant 10% comme limite, ceci pour une valeur de k fixée ?

Bonus : Déterminez la déformée du segment AB avec A(1,0,0) et B(1,1,0) (faire un dessin et donner son équation). On calculera le déplacement d'un point M(1,y,0) du segment AB avec y variant de 0 à 1.

Exercice 4 ***(2/1/1/1/2/2/2/2/2 points)***

On considère un procédé de fusion par laser où une source d'énergie de puissance nominale P supposée ponctuelle, se déplace à vitesse V à la surface d'un matériau solide considéré comme semi-infini (voir figure ci-dessous). En régime permanent (stationnaire) et dans le repère de la source située en l'origine O, on montre que le champ de température est approximé par le modèle de la source ponctuelle de Rosenthal, donné par: $T(r) = T_a + \frac{\beta P}{2\pi\kappa r}\exp\left(-\frac{V(x+r)}{2\alpha}\right)$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ où T_a est la température ambiante, r est la distance radiale à la source de chaleur, P est la puissance nominale de la source et α, β et κ sont respectivement la diffusivité thermique moyenne, le coefficient d'absorption moyen de l'énergie (i.e. rendement) et la conductivité thermique moyenne.

1. Quelles sont les unités SI de α, de β et de κ ?
2. Quelle est la température maximale ?
3. Est-on en représentation eulérienne ou lagrangienne ?
4. Que vaut la dérivée temporelle de la température ?
5. Que vaut la dérivée particulaire de la température sur la droite y = z = 0 ? Calculer cette quantité pour x < 0. (**Bonus** pour x > 0).



6. En représentation lagrangienne, calculer la température d'un point matériel situé sur la droite y = 0, z = 0 et dont la trajectoire est donnée par x = x0 –Vt avec x0 > 0, en amont de la source (x > 0),
7. et en aval de la source (x < 0),
8. Calculer alors la dérivée temporelle de la température toujours en représentation lagrangienne en aval de la source (x < 0),
9. Comparer cette valeur avec le résultat de la question 5.

Corrigé propé1 du 6 Novembre 2024

Exercice 1

Dans un repère Oxyz, le tenseur des contraintes en un point M est donné par:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 300 & 100 & 100 \\ 100 & 0 & 200 \\ 100 & 200 & 0 \end{pmatrix} = 100 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ (MPa)}$$

1. Que valent la trace et le déterminant de σ ? Bien préciser les unités de ces 2 quantités.

trσ = 300 MPa et detσ $=100^3\left(3(-4)-1(-2)+1(2)\right)=100^3\left(-12+2+2\right)=$ -8.10^6 MPa^3

2. Force (vecteur puis norme en Newton) agissant sur la surface triangulaire ABC.
A(4,0,0), B(0,3,0) et C(0,0,1) en cm !

$$\mathrm{A}(4,0,0),\ \mathrm{B}(0,3,0) \text{ et } \mathrm{C}(0,0,1),\quad \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{25+144}}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{169}}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\vec{t} = \sigma\vec{n} = \frac{100}{13}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{100}{13}\begin{pmatrix} 25 \\ 27 \\ 11 \end{pmatrix} \text{ en MPa et surface} = S = \frac{1}{2}\left\|AB\times BC\right\| = \frac{\sqrt{169}}{2} = \frac{13}{2} = 6.5 \text{ cm2}$$

$$F = \sigma n S = \frac{100}{\sqrt{169}}\begin{pmatrix} 25 \\ 27 \\ 11 \end{pmatrix}\frac{\sqrt{169}}{2} = 50\begin{pmatrix} 25 \\ 27 \\ 11 \end{pmatrix} \text{ X 100 N} = 5\begin{pmatrix} 25 \\ 27 \\ 11 \end{pmatrix} \text{ kN} = 192 \text{ kN} \quad (\text{MNcm2/m2} = 10^6 \text{X} 10^{-4}\text{N} = 100 \text{ N})$$

3. Vecteur densité de force agissant sur l'ellipsoïde de révolution de demi-axes OA, OB et OC au point D (0, 3/2, $\sqrt{3}/2$). L'ellipsoïde a pour équation :

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{1}\right)^2 = 1, \text{ D}(0, 3/2, \sqrt{3}/2) \text{ est bien sur l'ellipsoide}$$

$$\text{On pose f(x,y,z)} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{1}\right)^2 \text{ qui donne gradf} = \begin{pmatrix} x/8 \\ 2y/9 \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ en D, n} = \frac{1}{2\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$t = \sigma n = \frac{100}{2\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{50}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 1+3\sqrt{3} \\ 6\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en MPa}$$

4. Valeurs propres du tenseur σ.

$$\det\begin{pmatrix} 3-x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 2 \\ 1 & 2 & -x \end{pmatrix} = (3-x)(x^2-4)+(x+2)+(x+2) = -(x+2)(x-4)(x-1) = 0$$

Les vp sont 400 MPa, 100 MPa et -200 MPa.

Le long d'une direction propre n, les contraintes ne sont qu'en traction ou en compression selon le signe de la valeur propre associée (positive ou négative). Les surfaces dont la normal est selon une telle direction ne présentent aucun cisaillement. Sur le tri-cercle de Mohr, cela correspond à $t_\tau = 0$.

5. Vecteur propre associé à 400 MPa :

$$\text{n ? tel que } \sigma n = 100\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} n = 400n, \text{ on trouve } n = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Cylindre sous pression (15 points)

Dans un cylindre infini de rayon intérieur Ri et de rayon extérieur Re soumis à une pression interne p > 0, le tenseur des contraintes s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\sigma=\begin{pmatrix} A+B/r^2 & 0 & 0 \\ 0 & A-B/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1- Vérifiez que ces contraintes satisfont l'équilibre des forces en l'absence de gravité.
En effet, divσ = 0 (vecteur nul sur ses 3 composantes) donc le cylindre ne subit aucune force volumique ce qui revient à négliger la gravité.

2.- La condition en r = Ri est $\vec{t}=\sigma\left(-\vec{e}_r\right)=p\vec{e}_r$. Quelle est la condition en r = Re sachant que la surface extérieure est libre et que l'on néglige la pression atmosphérique ? Déterminez alors A et B.

$$\vec{t}_{Re}=\sigma\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A+B/R_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & A-B/R_e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A+B/R_e^2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \text{ car pas de force en surface}$$

$$\vec{t}_{Ri}=\sigma\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A+B/R_i^2 & 0 & 0 \\ 0 & A-B/R_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-A-B/R_i^2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\0\\0\end{pmatrix} \text{ car pression } p \geq 0 \text{ en surface}$$

3.- Déterminez alors les deux constantes A et B sachant que la surface extérieure est libre.

$$A+B/R_e^2=0 \text{ et } A+B/R_i^2=-p \text{ soit } B/R_e^2-B/R_i^2=p \text{ donc } B=\frac{p}{1/R_e^2-1/R_i^2}=\frac{pR_e^2R_i^2}{R_i^2-R_e^2}<0$$

$$\text{et } A=-B/R_e^2=\frac{pR_i^2}{R_e^2-R_i^2}>0. \text{ Ainsi : } \sigma=\frac{pR_i^2}{R_e^2-R_i^2}\begin{pmatrix} 1-\left(R_e/r\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\left(R_e/r\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{On vérifie la condition en } r=R_i : \vec{t}=\sigma\left(-\vec{e}_r\right)=\frac{pR_i^2}{R_e^2-R_i^2}\begin{pmatrix}-1+\left(R_e/R_i\right)^2\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{p}{R_e^2-R_i^2}\begin{pmatrix}-R_i^2+R_e^2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\0\\0\end{pmatrix}=p\vec{e}_r$$

4.- Que vaut le cisaillement maximum ?

Le tenseur est diagonal donc les 3 valeurs propres sont les valeurs diagonales. Il convient donc de les classer par ordre décroissant :

$\sigma_{rr} \leq 0$ car r $\leq$ R_e, $\sigma_{\theta\theta} \geq 0$ car B <0. donc $\sigma_{max}=\sigma_{\theta\theta}$ et $\sigma_{min}=\sigma_{rr}$

$$t_\tau^{max}=\frac{1}{2}\left(\sigma_{max}-\sigma_{min}\right)=\frac{1}{2}\left(\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{rr}\right)=\frac{pR_i^2}{2\left(R_e^2-R_i^2\right)}\left(2R_e^2/r^2\right)=\frac{pR_i^2}{\left(R_e^2-R_i^2\right)}R_e^2/r^2>0.$$

On note que le cisaillement est max en r = Ri : c'est ici que la plastification apparaitra selon le critère de Tresca si p est suffisamment élevée.

Exercice 3 Déformation (15 points)

Lors d'une déformation, un point M(x,y,z) se déplace en M'(x + ky^2,y,z) avec k > 0.
$u_x = ky^2$, $u_y = 0$ et $u_z = 0$

1. Quelle est l'unité de k ? k est en /m

2. Le champ de déplacement vaut $u_x = ky^2$, $u_y = 0$ et $u_z = 0$

Tenseur gradient **L** de la déformation $L = I + \text{grad}\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & 2ky & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tenseur de Cauchy-Green **B** $B = \left(L^t\right)L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2ky & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2ky & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2ky & 0 \\ 2ky & 1+4k^2y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tenseur de Green-Lagrange **ε** de la déformation $\varepsilon = \frac{1}{2}(B - I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2ky & 0 \\ 2ky & 4k^2y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & ky & 0 \\ ky & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. La déformation est infinitésimale (petites déformations) pour ky proche de zéro (positif ou négatif) car ainsi $(ky)^2$ devient négligeable devant ky.

4. Tenseur linéarisé des déformations : $\varepsilon_{lin} = \begin{pmatrix} 0 & ky & 0 \\ ky & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

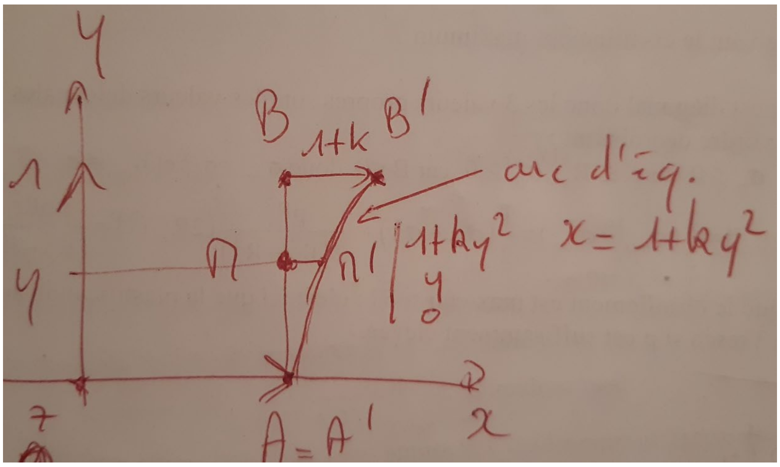
5. Avec 10% de limite de déformation et pour un k fixé, la condition pour avoir des petites déformations devient : $|ky| \leq 0.1$ soit $-0.1/k \leq y \leq 0.1/k$

La région de l'espace est donc comprise entre les 2 plans y = - 0.1/k et y = 0.1/k.

Bonus : Déterminez la déformée du segment AB avec A(1,0,0) et B(1,1,0) (faire un dessin et donner son équation) ?

Un point M du segment AB a pour coordonnées M(1,y,0) et il se déplace en M'(1+ky^2,y,0) soit MM'=ky^2e_x.

Le segment AB se transforme en un arc de parabole d'équation x=1+ ky^2 (y variant de 0 à 1) dans le plan z = 0.



Exercice 4

$$T(r) = T_\alpha + \frac{\beta P}{2\pi\kappa r}\exp(-\frac{V(x+r)}{2\alpha}) \quad \text{avec } r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

1- α étant la diffusivité thermique elle s'exprime en m^2/s. Ainsi, à l'intérieur de l'exponentiel $\frac{m}{s}\cdot\frac{m}{m^2}\cdot s=[-]$. β est un rendement ou une efficacité donc sans unité. κ est la conductivité thermique en W/mK. $\frac{\beta P}{\kappa r} = \frac{W}{\frac{W}{mK}m} = K$ soit une température.

2- La température tend vers l'infinie lorsque r =0. Le modèle est divergent, c'est la grande limitation de ce modèle.

3- Représentation Eulérienne : la température est donnée dans la fenêtre d'observation située en r et elle ne dépend pas du temps, le champ est stationnaire.

4- $\frac{\partial T}{\partial t}=0$ et pourtant il y bien chauffage de la matière en avant de la source puis refroidissement après.

5- Que vaut la dérivée particulaire de la température sur la droite y = z = 0 ? Calculer cette quantité pour x < 0.
Dérivée particulaire de la température : pour x<0, y=z=0 et r=-x

Pour x < 0, y= z = 0 et r = -x, $T = T_\alpha - \frac{\beta P}{2\pi\kappa x}$, Pour x > 0, y= z = 0 et r = x, $T = T_\alpha + \frac{\beta P}{2\pi\kappa x}\exp(-Vx/\alpha)$

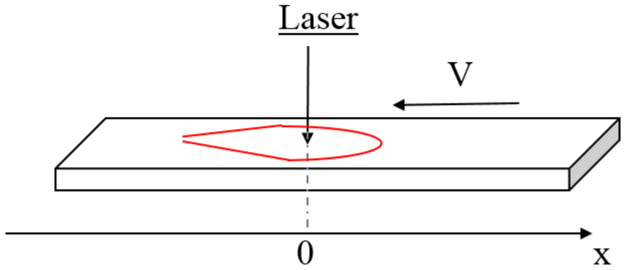
$$\frac{DT}{Dt}=\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{v}.\vec{\nabla}T = \vec{v}.\vec{\nabla}T \text{ avec } \vec{v} = -V\vec{e}_x \quad \text{soit } \frac{DT}{Dt}=\frac{\beta P}{2\pi\kappa x^2} =-\frac{V\beta P}{2\pi\kappa x^2} < 0. \text{ i.e. refroidissement en } x<0$$

Bonus pour x > 0 :

$$\text{pour } x>0,\ \dot{T} = \frac{\beta P V^2}{\alpha 2\pi\kappa(x_0-Vt)}\exp(\frac{V^2t-x_0V}{\alpha}) + \frac{V\beta P}{\alpha 2\pi\kappa(x_0-Vt)^2}\exp(\frac{V^2t-x_0V}{\alpha})$$

$$\dot{T} = \frac{\beta P V}{2\pi\kappa(x_0-Vt)}\exp(\frac{V^2t-x_0V}{\alpha})\left[\frac{V}{\alpha}+\frac{1}{x_0-Vt}\right]\left(=\frac{DT}{Dt}=\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{v}.\vec{\nabla}T = \vec{v}.\vec{\nabla}T\right)>0 \text{ , i.e. chauffage}$$

6- En Lagrangien, on suit un élément de matière qui se trouve à (x0,0,0) à t = 0 et qui se déplace à la vitesse –V selon x : la température de ce point est T(t).



$$x = x_0 - Vt,\quad r = |x_0-Vt|$$

$$r = x_0 - Vt \text{ si } x_0>Vt \left(\text{i.e. } t<x_0/V\right) \text{ alors } T(t) = T_a + \frac{\beta P}{2\pi\kappa(x_0-Vt)}\exp(\frac{V^2t-x_0V}{\alpha})$$

7. température en aval de la source (x<0):

$$x = x_0 - Vt,\quad r = |x_0-Vt|$$

$$r = Vt - x_0 \text{ si } x_0<Vt \left(\text{i.e. } t>x_0/V\right) \text{ alors } T(t) = T_a + \frac{\beta P}{2\pi\kappa(Vt-x_0)}\exp(0)=T_a+\frac{\beta P}{2\pi\kappa(Vt-x_0)}$$

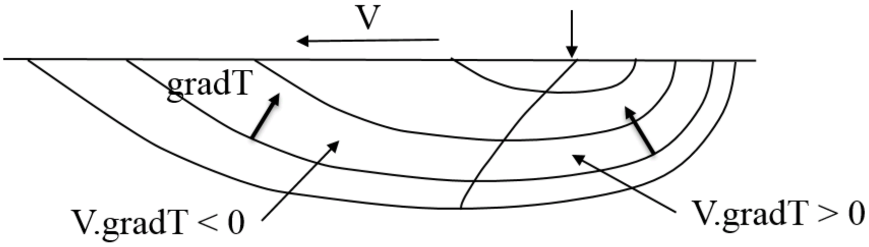
8. La dérivée temporelle en aval (x<0) de la source laser vaut donc :

$$\text{pour } x<0,\ \dot{T}(t) = -\frac{\beta P V}{2\pi\kappa(Vt-x_0)^2} < 0.\ \text{ i.e. refroidissement}$$

9. Pour x < 0, i.e en aval de la source laser, les approches eulérienne et lagrangienne donnent évidemment la même expression de la vitesse de refroidissement. Il en est de même pour le chauffage en amont de la source.

NB :

Dans le plan y = 0, la zone de chauffage et celle de refroidissement sont délimitées par le signe du produit scalaire de la vitesse et du gradient de température, ce dernier étant perpendiculaire aux isothermes :



NB : équation de la surface de température maximum :

le lieux des points de température max est donné par

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}T = \vec{v}.\vec{\nabla}T = -v\frac{\partial T}{\partial x} = 0.\ \text{avec } \vec{v} = -V\vec{e}_x$$

$$\text{et } T(x,y) = T_\alpha + \frac{\beta P}{2\pi\kappa\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\exp\left(-\frac{V(x+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{2\alpha}\right)$$

L'éq. des T max est donnée par $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$. i.e. $\overrightarrow{\nabla T}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ....