

REPRESENTATION DE BASE DES MILIEUX CONTINUS

2.1 POSITION - TEMPS

Nous considérons dès maintenant un milieu continu d'une matière homogène, c'est-à-dire constituée d'une seule phase (solide, liquide ou gaz). Cette matière est contenue dans une portion de l'espace, que nous appellerons Ω . Dans l'espace réel, nous aurons donc $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (Fig. 2.1). Dans certains cas, nous considérerons, pour des raisons de simplicité de représentation graphique, des domaines bidimensionnels ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$), voire parfois monodimensionnels ($\Omega \subset \mathbb{R}$). De tels domaines peuvent également avoir une légitimité

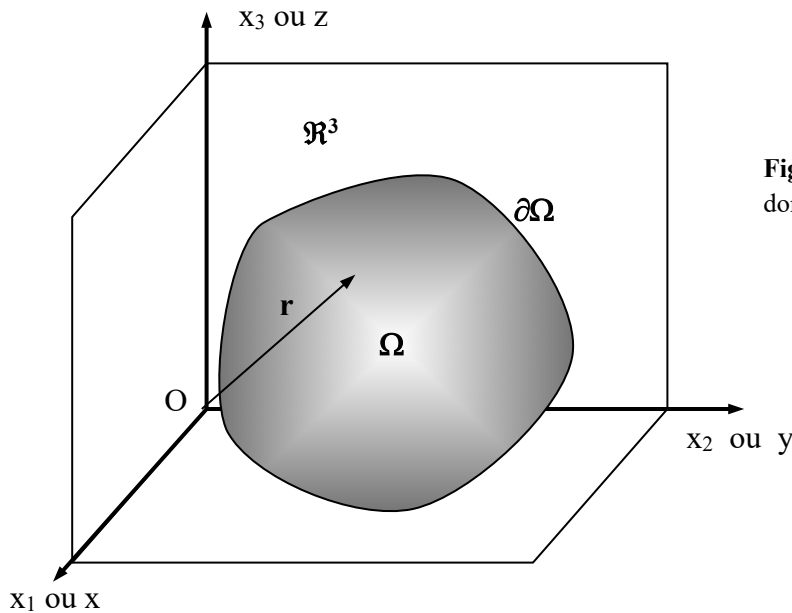


Figure 2.1 : Espace $\mathbb{R}^3$ et domaine Ω considéré.

physique (Fig. 2.2) : considérons par exemple le traitement thermique d'un rail suffisamment long dans des conditions présentant une invariance de translation le long de l'axe. Dans ce cas, pour autant que l'on ne s'intéresse pas aux phénomènes proches des extrémités, une étude des échanges thermiques d'une section transverse, bidimensionnelle, est suffisante. Un autre exemple serait celui d'une billette d'aluminium extrudée (ou coulée) dans des conditions parfaitement *axisymétriques* : la géométrie ainsi que toutes les conditions physiques du problème (nous reviendrons sur ces notions plus tard) présentent

dans ce cas une invariance de rotation par rapport à un axe. L'étude de ce milieu dans une coupe longitudinale, donc bidimensionnelle et axisymétrique, est là également suffisante. Enfin, l'étude d'une plaque présentant une invariance dans les directions parallèles à la surface ou d'une sphère présentant une invariance de rotation permet de ramener un problème à une dimension d'espace.

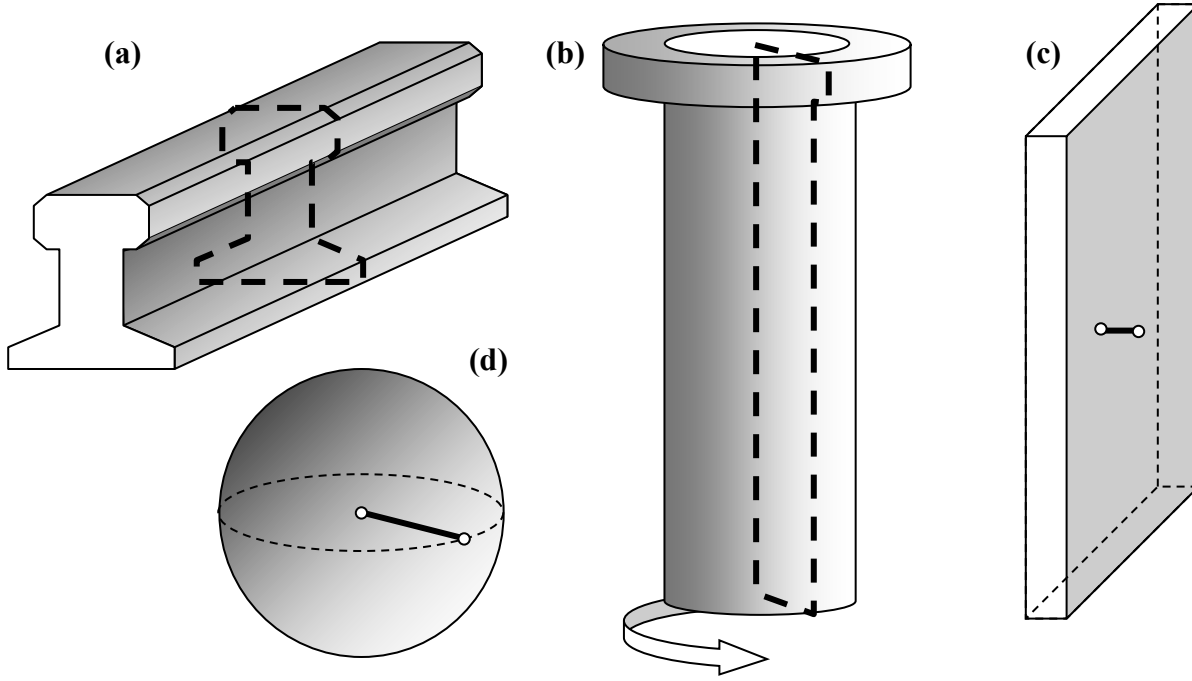


Figure 2.2 : La considération des symétries du problème permet de réduire sa dimensionnalité : (a) rail présentant une invariance de translation (étude dans la section) ; (b) géométrie axisymétrique (étude dans une coupe longitudinale) ; (c) plaque (étude selon la dimension transverse) ; (d) sphère (étude selon un rayon).

Revenons au cas de la Fig. 2.1. Le domaine Ω est séparé du reste du monde par une *frontière*, notée $\partial\Omega$. Cette frontière a donc une dimension inférieure d'une unité à celle du domaine : c'est une surface pour un corps tridimensionnel, une ligne pour un domaine bidimensionnel et un point pour un domaine monodimensionnel.

Afin de repérer un point quelconque de l'espace, nous allons utiliser un repère orthonormé (Fig. 2.1) constitué de trois axes perpendiculaires que nous noterons : $\{Ox_1, Ox_2, Ox_3\}$ ou $\{Ox, Oy, Oz\}$. Sur chacun de ces axes, nous définissons des vecteurs unitaires $\{e_1, e_2, e_3\}$ ou $\{e_x, e_y, e_z\}$ qui sont donc tels que :

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \quad \text{où } \delta_{ij} \text{ est le symbole de Kroneker} = \begin{cases} = 1 & \text{si } i = j \\ = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.1)$$

et où « $\cdot$ » désigne le produit scalaire usuel. Un vecteur $\mathbf{r}$ de l'espace est donc repéré dans ce système de coordonnées par un triplet de nombre (x_1, x_2, x_3) ou (x, y, z) tel que :

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = x_i\mathbf{e}_i \quad \text{ou encore} \quad \mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad (2.2)$$

Dans la relation de gauche (2.2), nous avons introduit une convention que nous allons fréquemment utiliser dans ce cours, à savoir la convention dite d'Einstein : elle suppose une sommation implicite sur tous les indices répétés (dans le cas présent, sommation sur l'indice i , qui varie de 1 à 3). Lorsque les limites de la sommation ne seront pas claires, nous expliciterons parfois ces sommations. En utilisant les propriétés du produit scalaire et le fait que le repère est orthonormé, le produit scalaire de deux vecteurs, $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$, est donc donné par :

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3' = x_ix_i' \quad (2.3)$$

et la norme d'un vecteur par :

$$\|\mathbf{r}\| = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad (2.4)$$

Un milieu est donc continu si, quel que soit un point matériel du domaine, $\mathbf{r}$, et quel que soit ε arbitrairement petit, on peut trouver un point matériel « voisin », $\mathbf{r}'$, tel que : $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| < \varepsilon$.

Le temps quant à lui sera noté t . Il est supposé également continu et « s'écoulant » dans une direction. L'ensemble des temps sera noté $\mathfrak{T}$ et l'espace temps $\mathfrak{R}^3 \otimes \mathfrak{T}$: un point de cet espace est donc constitué d'un quadruplet de nombres réels (x, y, z, t) , les trois premiers spécifiant les coordonnées spatiales, le dernier un instant donné. A noter que l'origine du temps doit bien sûr être définie (comme l'origine O du repère orthonormé).

2.2 TRAJECTOIRE D'UN POINT MATERIEL

DYNAMIQUE DES SOLIDES INDEFORMABLES

Le mouvement d'un point matériel, discipline communément appelée cinématique du point matériel, est assez facile à décrire. En effet, si ce point occupe une position $\mathbf{r}_0$ au temps $t = 0$ ($\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t=0)$), il peut ensuite se déplacer dans l'espace et occuper des positions $\mathbf{r}(t_1)$, $\mathbf{r}(t_2)$, $\mathbf{r}(t_3)$,... aux temps successifs : $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$. Nous pouvons alors noter simplement $\mathbf{r}(t)$ l'ensemble (continu) des positions occupées par ce point. Supposons par exemple que ce point matériel soit astreint à se déplacer à vitesse angulaire constante, ω , sur un cercle de rayon R contenu dans le plan Oxy . Son mouvement est alors décrit par :

$$x = R \cos(\omega t) \quad y = R \sin(\omega t) \quad z = 0 \quad (2.5)$$

si au temps $t = 0$, $\mathbf{r}_0 = (R, 0, 0)$. La vitesse de ce point matériel est donnée par :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (2.6)$$

ce qui, pour le mouvement particulier choisi, donne :

$$v_x = -R\omega \sin(\omega t) \quad v_y = R\omega \cos(\omega t) \quad v_z = 0 \quad (2.7)$$

De même, l'accélération du point s'écrit :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (2.8)$$

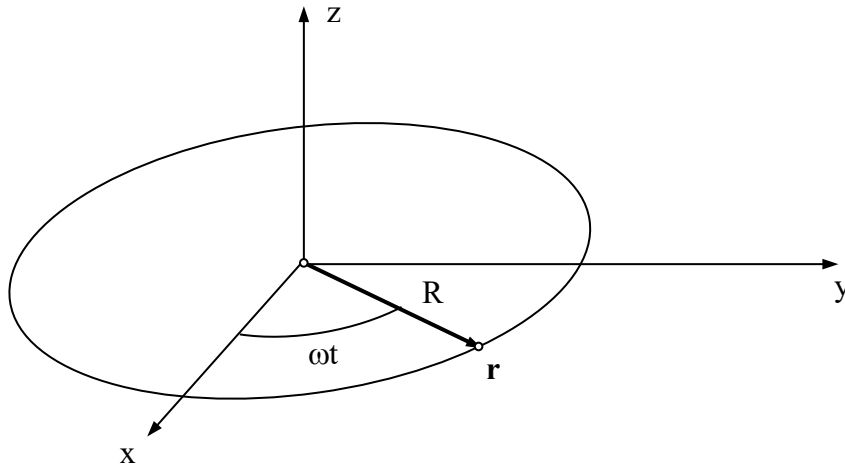


Figure 2.3 : Rotation d'un point matériel autour d'un axe.

et l'on retrouve pour le mouvement circulaire uniforme :

$$a_x = -R\omega^2 \cos(\omega t) \quad a_y = -R\omega^2 \sin(\omega t) \quad a_z = 0 \quad (2.9)$$

soit $\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}$. De manière générale, la mécanique Newtonienne appliquée à un point matériel de masse m nous dit que $(m\mathbf{a})$ est égale à la somme des forces appliquées sur le point (on parle alors de dynamique) :

$$m\mathbf{a} = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (2.10)$$

Les forces étant connues, cette loi permet, par double intégration, de trouver la trajectoire de ce point matériel, pour autant que l'on spécifie sa position et sa vitesse initiale (en effet, puisque deux constantes d'intégrations à déterminer vont intervenir).

Pour un corps solide de dimensions finies, on peut montrer en mécanique générale que cette loi s'applique toujours mais pour un point particulier, le **centre de masse** (ou

centre de gravité), G . La masse m du point matériel est bien sûr remplacée par la masse totale du corps, M .

Donc, par intégration, l'équation de Newton (2.10) permet de trouver la trajectoire du centre de masse. A cette trajectoire, on peut associer un référentiel en translation avec G , dont les axes restent parallèles aux axes du système cartésien (Fig. 2.4). Dans ce référentiel, la rotation du corps est décrite par une deuxième équation :

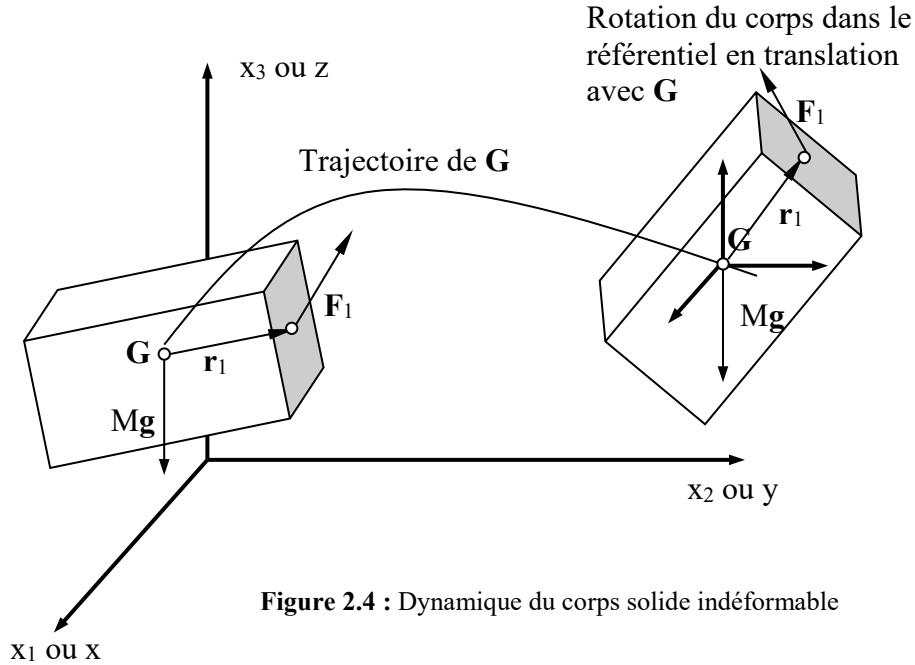


Figure 2.4 : Dynamique du corps solide indéformable

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \sum \mathbf{M}_{\text{ext}} \quad (2.11)$$

où $\mathbf{b}$ est le moment cinétique du corps solide et $\mathbf{M}_{\text{ext}}$ les moments extérieurs associés aux forces appliquées, $\mathbf{F}_{\text{ext}}$, dans ce repère (voir Fig. 2.4) :

$$\mathbf{b} = \rho \int \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_{\text{ext}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (2.12)$$

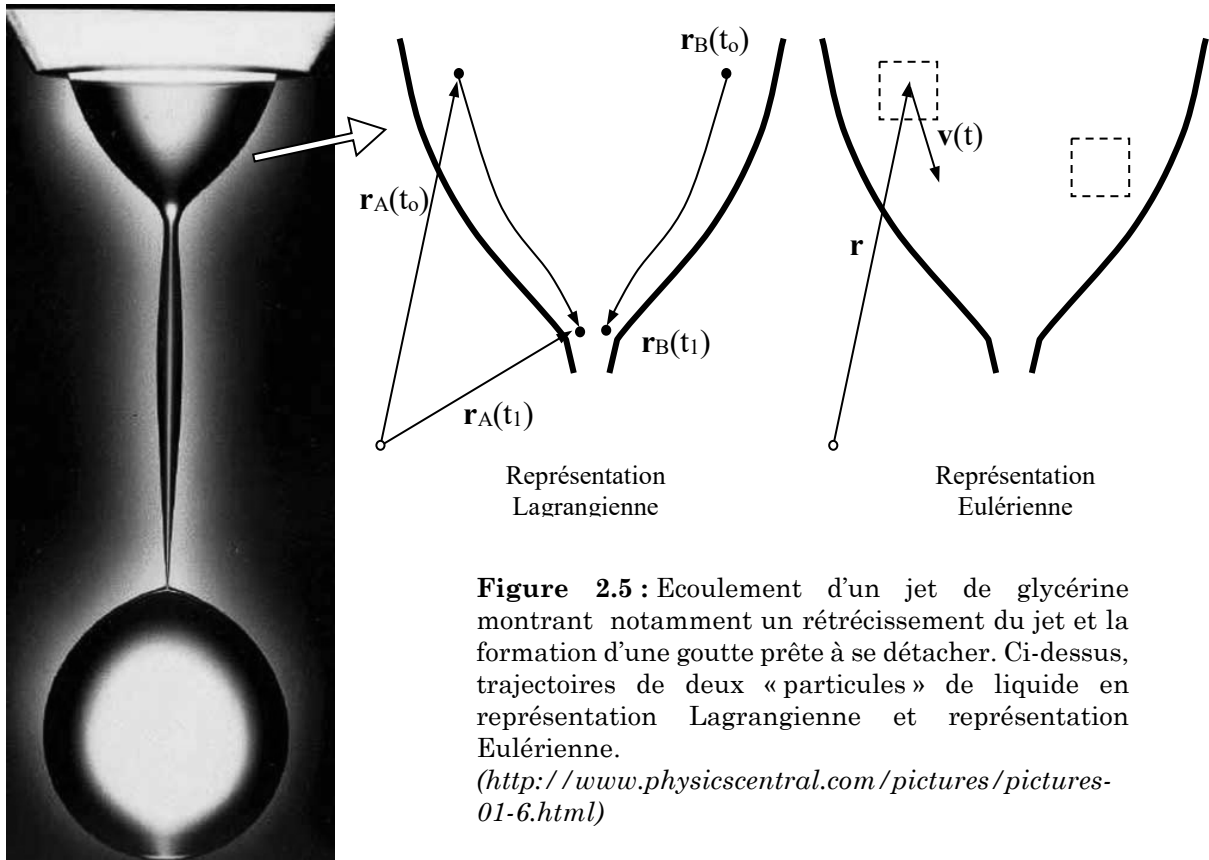
En d'autres termes, pour un solide indéformable, il n'est pas nécessaire de caractériser le mouvement de chacun de ses points pour connaître son mouvement, puisque la distance entre tout couple de points doit rester fixe. Le corps solide indéformable a de manière générale 6 degrés de liberté : 3 degrés de translation qui sont généralement exprimés par l'intermédiaire de ceux du centre de gravité ($x_G(t)$, $y_G(t)$, $z_G(t)$), et qui sont déterminés par intégration de (2.10) ; 3 degrés de rotation qui peuvent être trouvés au moyen de (2.11) et qui s'expriment donc dans un référentiel en translation avec G . Nous verrons que ceci n'est bien sûr plus vrai lorsque le milieu devient *déformable*.

2.3 REPRESENTATIONS D'EULER ET DE LAGRANGE

Prenons le cas d'un corps très facilement déformable : un jet de glycérine s'écoulant d'un orifice (Fig. 2.5) ! Dans ce cas, si l'on veut décrire le mouvement de ce liquide au cours du temps, nous ne pouvons plus nous restreindre aux 6 degrés de liberté du corps indéformable puisque les atomes ou molécules composant ce milieu ne vont pas rester à distance fixe entre eux au cours du temps. Par exemple, deux petits volumes de fluide A et B situés initialement en périphérie du jet (positions $\mathbf{r}_A(t_0)$ et $\mathbf{r}_B(t_0)$ au temps $t = t_0$) peuvent se retrouver très voisins dans l'étranglement au temps t_1 (positions $\mathbf{r}_A(t_1)$ et $\mathbf{r}_B(t_1)$). Il faudrait donc décrire le mouvement de chacun d'eux au cours du temps pour avoir une vision complète du phénomène. Dans le cadre des milieux continus, il faut même décrire le mouvement de chacun des points du domaine (infinité de degrés de liberté). On a alors le choix entre deux modes de représentation.

Dans la représentation dite **Lagrangienne** (le nom vient bien sûr de la mécanique du même nom), on s'intéresse à décrire la trajectoire de chacun des points composant le milieu, comme pour les petits volumes A et B de la Fig. 2.5. Le mouvement du corps sera alors décrit par l'ensemble $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{r}(\mathbf{r}(t=0), t) = \mathbf{r}(x_0, y_0, z_0, t)$, où $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ est la position quelconque d'un point au temps $t = 0$. Dans cette opération, on suppose bien sûr que chaque trajectoire est unique et continue, c'est-à-dire qu'en partant d'un point initial, la trajectoire est parfaitement définie. La vitesse d'une particule fluide est donc décrite dans ce cas par $\mathbf{v}(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)) = \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t)$.

Dans la représentation dite **Eulérienne** (Euler décrivit en 1755 l'équation de mouvement d'un fluide), on s'intéresse non plus à suivre une particule de fluide mais à observer en un point $\mathbf{r}$ fixe de l'espace l'évolution du fluide (petite fenêtre d'observation dans la Fig. 2.5). Dans ce cas, l'observateur notera simplement que la vitesse du fluide (ou de toute autre grandeur) est fonction du temps et de la position $\mathbf{r}$ de la fenêtre d'observation, donc $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. La grande différence avec la représentation Lagrangienne est qu'ici $\mathbf{r}$ est indépendant du temps alors que dans la représentation Lagrangienne, $\mathbf{r}$ suit la particule, donc est fonction du temps. On dira d'un écoulement qu'il est *stationnaire* si, en représentation Eulérienne, la vitesse (et toute autre grandeur) est indépendante du temps, et donc fonction de l'espace uniquement. Ce qui ne veut pas dire que chaque particule de fluide conserve sa vitesse au cours du temps !



Pour mieux clarifier ces notions, reprenons le cas du jet de glycérine (Fig. 2.5) en supposant qu'il est stationnaire (oublions pour un instant la formation et le détachement de la goutte en bas !). Dans la partie supérieure du jet, qui garde donc sa forme constante en régime stationnaire, il est clair qu'une petite particule de fluide va voir sa vitesse augmenter au cours du temps ($v_A(t_1) > v_A(t_0)$) puisque la section transverse du jet diminue et que le débit est constant. Donc, en suivant une particule fluide, un observateur constaterait que sa vitesse augmente (un peu comme dans un bouchon de voitures, où la vitesse d'une voiture particulière augmente précisément à l'endroit du rétrécissement de la chaussée). Pourtant, en représentation Eulérienne, la vitesse du jet à un endroit donné indique que la vitesse est constante (la vitesse des voitures par exemple avant le rétrécissement reste la même (proche de zéro !) et celle des véhicules après le rétrécissement aussi). On a donc bien deux modes de représentation du même phénomène et il va falloir savoir passer de l'une à l'autre suivant le type de problème. De manière générale, on adopte une représentation Lagrangienne dans tous les problèmes de déformation des corps solides (déformations relativement faibles), alors que la représentation Eulérienne est usuellement choisie pour les problèmes d'écoulement de fluide.

2.4 CHAMPS SCALAIRE, VECTORIEL, TENSORIEL

Reprenons encore une fois l'exemple de l'écoulement de glycérine et supposons que ce jet soit préchauffé avant dans le tube. Au contact de l'air ambiant plus froid, le jet tout en s'écoulant va se refroidir. Une caméra infrarouge ou quelques thermomètres (ou thermocouples) placés en des endroits précis vont enregistrer des température $T(\mathbf{r},t)$, fonction du lieu et du temps : ces mesures de température sont bien associées à une représentation Eulérienne, puisque ni les thermomètres ni la caméra infrarouge ne suivent les particules fluides. Le cas stationnaire est là encore caractérisé par des températures, $T(\mathbf{r})$, indépendantes du temps mais fonction du lieu. Et pourtant, là encore, chaque particule de fluide suivie dans une représentation Lagrangienne se refroidit.

La répartition de température dans le jet (ou dans un domaine) est un cas typique de *champ scalaire* : il s'agit donc d'une application de $\mathcal{R}^3 \otimes \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{R}$, puisqu'à tout point du domaine et à tout instant on associe une grandeur réelle, la température en l'occurrence. (Dans le cas stationnaire, il s'agit d'une application de $\mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}$). Le tableau 2.1 donne les principaux champs scalaires considérés dans les milieux continus, parmi lesquels mentionnons la masse spécifique, l'énergie (ou l'enthalpie), la concentration en soluté mesurée en moles par m^3 ou en % poids (titre massique), etc.

Le champ de vitesse, déjà rencontré auparavant, est lui typiquement un *champ vectoriel* : à tout point de l'espace-temps, il fait correspondre une grandeur vectorielle, la vitesse, qui a trois composantes réelles ($v_x(\mathbf{r},t)$, $v_y(\mathbf{r},t)$, $v_z(\mathbf{r},t)$). Il s'agit donc d'une application de $\mathcal{R}^3 \otimes \mathcal{T}$ dans $\mathcal{R}^3$. L'accélération déjà rencontrée pour le solide indéformable, est elle aussi un champ vectoriel. Mentionnons encore la densité de quantité de mouvement, $\rho \mathbf{v}(\mathbf{r},t)$, que nous allons rencontrer lors de l'établissement de la loi de conservation de la quantité de mouvement, les champs électrique, $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, et magnétique, $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$, la densité de courant électrique, $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$, etc.

Il existe dans la nature des grandeurs faisant intervenir plus de trois composantes. Nous en verrons notamment deux de manière très détaillée aux chapitres 4 et 5, lorsque nous traiterons les contraintes, $\sigma_{ij}(\mathbf{r},t)$, et les déformations, $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r},t)$. Prenons le cas (plus simple par certains aspects) de la relation entre densité de courant électrique, $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$, et champ électrique, $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$. Ces deux grandeurs sont clairement de nature vectorielle. A l'intérieur d'un conducteur isotrope et lorsque ces champs sont stationnaires, nous pouvons écrire la loi d'Ohm :

$$\mathbf{j} = \|\mathbf{j}\| = \sigma^E E = \sigma^E \|\mathbf{E}\| \quad (2.13)$$

où σ^E est la conductivité électrique du matériaux (en $\text{AV}^{-1}\text{m}^{-1} = \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$). Toutefois, à haute fréquence et pour des matériaux non-isotropes, les deux vecteurs $\mathbf{j}$ et $\mathbf{E}$ ne sont plus

$$\sigma_{ij}^E, \text{ et défini ainsi : } j_i = \sigma_{ij}^E E_j = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}^E E_j$$

$$\text{ou sous forme matricielle } \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^E & \sigma_{12}^E & \sigma_{13}^E \\ \sigma_{21}^E & \sigma_{22}^E & \sigma_{23}^E \\ \sigma_{31}^E & \sigma_{32}^E & \sigma_{33}^E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Cette matrice permettant de lier $\mathbf{j}$ et $\mathbf{E}$ est un *tenseur d'ordre 2*. Si cette propriété de la matière est fonction du lieu (et éventuellement du temps), on parlera alors de champ tensoriel (d'ordre 2).

Attention : toute entité à deux indices n'est pas nécessairement un tenseur ! Par exemple, une matrice de transformation de repères orthonormés, A_{ij} , possède bien deux indices pour repérer les lignes et colonnes mais n'est pas un tenseur d'ordre deux. Les tenseurs sont des entités mathématiques possédant un sens physique bien déterminé et en général une unité.

Tableau 2.1 : Quelques champs rencontrés dans les milieux continus

Champ	Nature	Notation	Unité
Masse spécifique	Scalaire	$\rho(\mathbf{r},t)$	Kg m^{-3}
Température	Scalaire	$T(\mathbf{r},t)$	$^{\circ}\text{C}$ ou K
Energie ou enthalpie	Scalaire	$E(\mathbf{r},t), H(\mathbf{r},t)$	J kg^{-1}
Teneur en soluté / titre massique	Scalaire	$c(\mathbf{r},t), w(\mathbf{r},t)$	$\text{mole m}^{-3}, \text{ \%pds}$
Vitesse	Vectoriel	$\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$	m s^{-1}
Densité de quantité de mouvement	Vectoriel	$\rho \mathbf{v}(\mathbf{r},t)$	$\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$
Champ électrique	Vectoriel	$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$	V m^{-1}
Champ magnétique	Vectoriel	$\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$	A m^{-1}
Densité de courant électrique	Vectoriel	$\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$	A m^{-2}
Déformation	Tensoriel	$\varepsilon_{ij}(\mathbf{r},t)$	-
Contraintes	Tensoriel	$\sigma_{ij}(\mathbf{r},t)$	Nm^{-2}

2.5 SYSTEME DE COORDONNEES

Nous avons vu dans la section 1.1 le système de coordonnées le plus fréquemment utilisé, à savoir le système orthonormé *cartésien*. Dans certaines situations, il peut être judicieux de choisir un autre système. Par exemple, pour le problème de la billette cylindrique de la Fig. 2.2, on a recours à un système de coordonnées *cylindriques* donné à la Fig. 2.6. Les vecteurs de base de ce système, fonction du lieu, sont notés $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$. Dans un tel système, les champs (scalaire, vectoriel ou tensoriel) ne sont plus des fonctions de (x, y, z) , mais des fonctions de (ρ, θ, z) (+ éventuellement le temps). L'avantage d'un tel système est le suivant : si la géométrie est axisymétrique, la description de la surface deviendra indépendante de la variable θ . Il suffira de décrire l'objet par une coupe longitudinale $\theta = \text{cste}$, donc par les variables ρ et z . Si le problème lui-même est axisymétrique (géométrie et conditions physiques sont indépendantes de θ), alors les champs eux-mêmes ne seront plus que fonction de ρ et z , d'où une simplification du problème. Le passage du système cartésien au système cylindrique est relativement aisé si

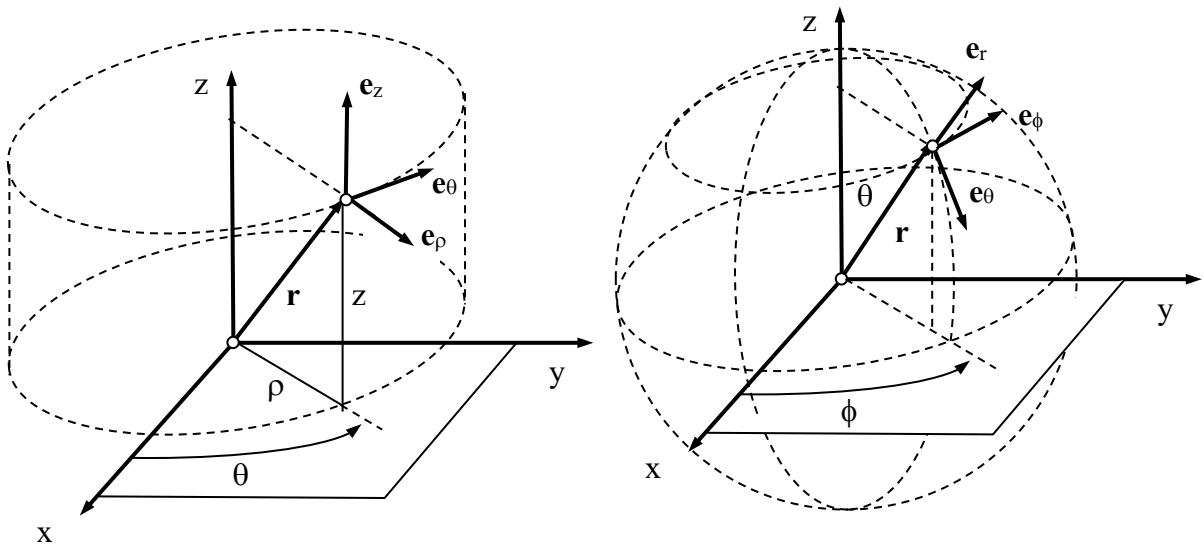


Figure 2.6 : Systèmes de coordonnées cylindrique (gauche) et sphérique (droite).

l'on considère les composantes de $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$ dans $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho &= \cos\theta \mathbf{e}_x + \sin\theta \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\theta &= -\sin\theta \mathbf{e}_x + \cos\theta \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_z \end{aligned} \tag{2.15}$$

Connaissant les composantes (ρ, θ, z) d'un vecteur $\mathbf{r}$, il est aisé de remonter aux composantes (x, y, z) :

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z = \rho(\cos\theta \mathbf{e}_x + \sin\theta \mathbf{e}_y) + z \mathbf{e}_z = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z \quad (2.16)$$

ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = P_\theta \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

La matrice P_θ permettant de faire ce changement de coordonnées entre deux systèmes orthonormés (dite matrice de passage) a un déterminant égal à 1 (matrice unitaire). Les colonnes de cette matrice ne sont rien d'autre que les composantes des vecteurs $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$ dans $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ (2.15). A noter que l'angle θ , seconde composante du vecteur $\mathbf{r}(\rho, \theta, z)$, est présent dans la matrice elle-même.

De même, pour des géométries *sphériques*, on introduit un système de coordonnées sphériques $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi\}$ (voir Fig. 2.6) dont les composantes dans $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ sont données par :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \sin\theta \cos\phi \mathbf{e}_x + \sin\theta \sin\phi \mathbf{e}_y + \cos\theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\theta &= \cos\theta \cos\phi \mathbf{e}_x + \cos\theta \sin\phi \mathbf{e}_y - \sin\theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\phi &= -\sin\phi \mathbf{e}_x + \cos\phi \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (2.18)$$

Dans le repère $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi\}$, un vecteur $\mathbf{r}$ a les composantes $(r, 0, 0)$ et le passage d'un système à l'autre est donné par la transformation :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\phi & \cos\theta \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta \sin\phi & \cos\theta \sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = P_{\theta\phi} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

On peut vérifier là encore que la matrice de passage est unitaire.

2.6 TRANSFORMATION DES GRANDEURS ET NATURE DES TENSEURS

Lors d'un changement de base, comme par exemple (2.17) ou (2.19) pour le passage des systèmes de coordonnées cylindriques ou sphériques au système cartésien, on peut se poser la question de savoir comment les autres entités ou champs définis en 1.4 sont transformés.

Pour ce faire, considérons un changement de systèmes de coordonnées $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ en un système $(\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y, \mathbf{e}'_z)$ (Fig. 2.7). Dans un tel système, les nouvelles composantes d'un vecteur $\mathbf{r}$ sont données par (x', y', z') : celles-ci sont fonction des coordonnées (x, y, z) dans

l'ancien système. De manière générale, on a comme pour le passage d'un système de coordonnées cartésien à un système de coordonnées cylindrique ou sphérique :

$$x' = x'(x, y, z) \quad y' = y'(x, y, z) \quad z' = z'(x, y, z) \quad (2.20)$$

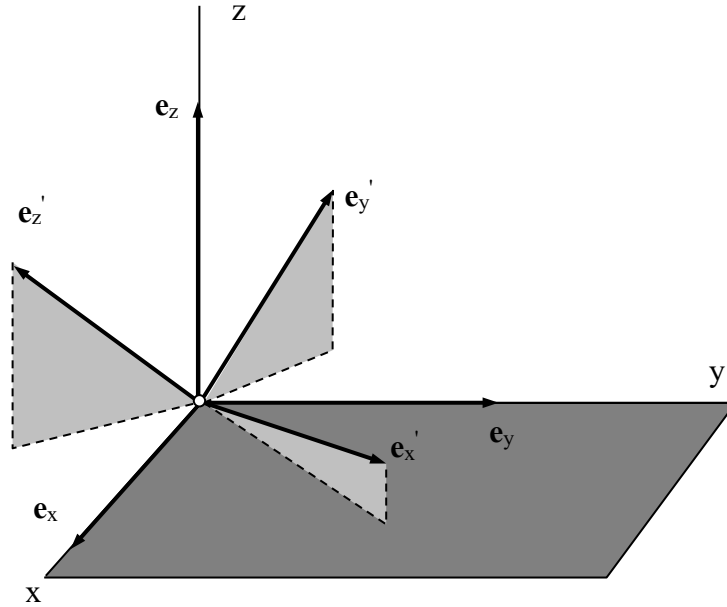


Figure 2.7 : Changement de systèmes de coordonnées

Dans le cas simple indiqué à la Fig. 2.7 de passage d'un système cartésien orthonormé à un autre système cartésien orthonormé, les relations (2.20) sont réduites à des combinaisons linéaires avec coefficients constants et on appelle alors P la matrice de passage du repère de base au nouveau repère. En notant X' les coordonnées d'un vecteur exprimé dans le repère « prime » et X les coordonnées de ce même vecteur exprimé dans le repère de départ, P est définie par :

$$X' = P X \quad (2.21)$$

La matrice P a alors la particularité d'être unitaire car elle permet le passage d'un repère orthonormé vers un autre repère orthonormé. Elle vérifie les relations suivantes :

$$P \cdot P^t = P^t \cdot P = I \quad \text{ou encore} \quad P^{-1} = P^t \quad (2.22)$$

Les grandeurs ou champs scalaires sont transformés tout naturellement puisqu'ils font simplement référence au lieu et au temps, mais ne sont pas eux-mêmes dépendant du système de coordonnées. Ainsi, le champ de scalaire de température sera donné par : $T(x,y,z,t)$ dans un système de coordonnées cartésien, $T(\rho,\theta,z,t)$ dans un système de coordonnées cylindrique et $T(r,\theta,\phi)$ dans un système de coordonnées sphérique. Les

relations 2.21 et 2.22 seront utilisés pour exprimer les composantes d'un tenseur d'ordre deux lors d'un changement de repère.

Exercice 2.1 : Système de coordonnées

Les équations (2.17) et (2.19) permettent d'exprimer les composantes d'un vecteur dans les repères cylindriques et sphériques.

1. Inverser la relation matricielle (2.17) et montrer l'unicité de ρ , de l'angle θ et de z pour un point de coordonnées (x,y,z) .
2. Que vaut la matrice de passage P_{cyl} du repère cartésien vers le repère cylindrique ?
3. Calculer le déterminant de la matrice de l'équation (2.19)
4. Déterminer la matrice de passage P_{sph} du repère cartésien vers le repère sphérique.

Exercice 2.2 : Matrice de passage

Soit l'espace vectoriel R^3 muni des bases cartésienne $b_{cart} = (e_x, e_y, e_z)$ et cylindrique $b_{cyl} = (e_r, e_\theta, e_z)$.

1. Exprimer e_r ainsi que e_θ en fonction de e_x et e_y
2. Déterminer la matrice de passage de la base cartésienne vers la base cylindrique P définie par: $X_{cyl} = P_\theta X_{cart}$ où X_{cart} et X_{cyl} sont les représentations d'un vecteur X de R^3 dans les bases cartésienne et cylindrique respectivement.
3. Calculer le déterminant de P_θ puis $P_\theta P_\theta^t$ et $P_\theta^t P_\theta$. En déduire que P_θ^t est orthogonale, c'est-à-dire que son inverse et sa transposée sont égales. A quoi correspond P_θ^{-1} ?
4. On donne $X_{cart} = (3, \sqrt{3}, 5)$. Déterminer les coordonnées de ce vecteur dans la base cylindrique.

5. On donne $\sigma_{cart} = \begin{pmatrix} 10 & 5\sqrt{3} & 0 \\ 5\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$. On effectue le changement de repère cartésien

vers cylindrique avec $\theta = \pi/6$. Déterminer σ_{cyl} , expression de σ_{cart} dans le nouveau repère, en utilisant $\sigma_{cyl} = P_\theta \sigma_{cart} P_\theta^t$.

6. Quelle est la particularité de σ_{cyl} ? Que venez-vous de faire ?

Exercice 2.3 : Moment d'inertie d'un disque

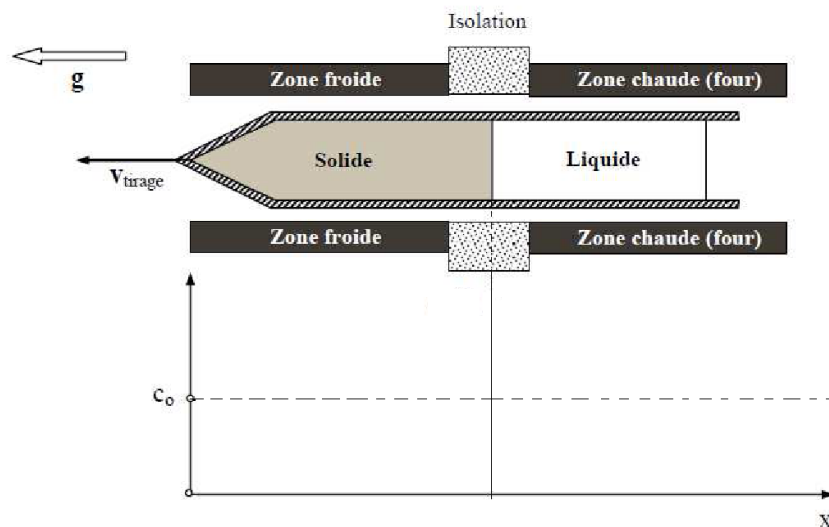
Un volant d'inertie indéformable est en rotation autour de son axe de symétrie (axe zz' de vecteur unitaire $\mathbf{u}_z$).

1. Montrer que son moment cinétique $\mathbf{b}$ (cf. eq. 2.12) est proportionnel à sa vitesse angulaire et se trouve selon $\mathbf{u}_z$. On écrira alors $\mathbf{b} = J \omega \mathbf{u}_z$
2. Calculer le moment d'inertie J d'un disque plein de rayon R et d'épaisseur H
3. Calculer le moment d'inertie J d'un disque creux de rayon intérieur R_1 , de rayon extérieur R_2 et d'épaisseur H .

Exercice 2.4 : Solidification dirigée dans un four à gradient (four Bridgman)

Lors de la croissance d'un monocristal dans une ampoule initialement liquide, le soluté (et aussi les impuretés) est rejeté à l'interface par le solide dans le liquide. On note k le coefficient de partition du soluté défini par $C_s = kC_l$ après linéarisation du diagramme de phase. En régime stationnaire, la concentration de soluté à l'interface vaut $c^* = c_0/k$ et la

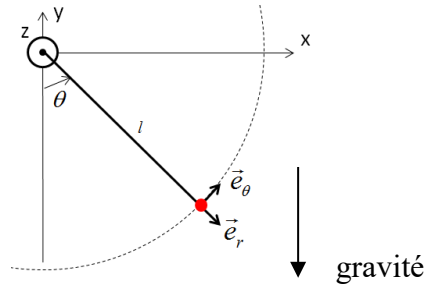
concentration de soluté dans le liquide c_l vérifie $D \frac{d^2 c_l}{dx^2} + v \frac{dc_l}{dx} = 0$ où v est la vitesse d'avance de l'interface solide/liquide et D le coefficient de diffusion des impuretés dans le liquide. La concentration à l'interface vaut c^* et celle loin de l'interface c_0 .



1. La figure ci-dessus décrit-elle ce problème avec une représentation Lagrangienne ou Eulérienne ?
2. Montrer que $c_l(x) = c_0 + \frac{c_0}{k}(1-k)\exp\left(\frac{-x}{\delta}\right)$ où k est le coefficient de partage entre les phases liquide et solide et exprimer l'épaisseur de la couche limite δ en fonction des données du problème. Représenter cette fonction sur la figure ci-dessus.
3. Représenter graphiquement la concentration en soluté, $c(x(x_0, t_0), t)$, au cours du temps d'un petit élément de volume placé dans le liquide loin de l'interface solide/liquide en x_0 à t_0 .

Exercice 2.5 : le pendule plan

Le pendule pesant simple schématisé ci-dessous est un grand classique étudié par Galilée.



Sans tenir compte de la rotation de la Terre par rapport à un référentiel galiléen, la masse m attachée au bout du fil de longueur l décrit un mouvement circulaire dans le plan (O, x, y) où l'origine O correspond au point d'attache du fil (liaison pivot sans frottement). On négligera les frottements de l'air.

- Calculer les vecteurs vitesse et accélération dans le cas général (rayon et angle variant avec le temps t) dans le repère tournant. On partira de $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$
- En utilisant la relation fondamentale de la dynamique et le résultat de la question précédente, montrer que l'équation du mouvement est : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$
- Retrouver cette même équation en utilisant l'équation du moment cinétique (cf. Equation 2.11)
- Résoudre cette équation en faisant l'hypothèse que l'angle θ reste petit.
- Quelle est alors la période d'oscillation du pendule pesant ?

Exercice 2.6: refroidissement par aspersion

Une tôle mince d'acier d'épaisseur e relativement faible sort d'un laminoir à température T_i et à vitesse constante v . Elle est refroidie ensuite par des jets d'eau sur une distance L . On supposera la température uniforme dans l'épaisseur de la tôle, celle-ci étant faible. L'équation de la chaleur gouvernant l'évolution de la température, en régime stationnaire,

est donnée par l'approximation de l'ailette : $\alpha \frac{d^2 T}{dx^2} + v \frac{dT}{dx} + \frac{h}{\rho C_p e} (T(x) - T_0) = 0$.

où T_0 : température de l'eau (15°C), $T_i = 900^\circ\text{C}$.

h : coefficient de transfert thermique entre la plaque et l'eau, $h = 2000 \text{ W/m}^2\text{K}$.

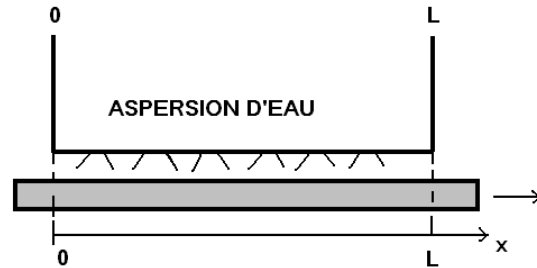
ρC_p : chaleur spécifique volumique, $\rho C_p = 4 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3\text{K}$.

α : coefficient de diffusivité thermique, $\alpha = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

$e = 1 \text{ mm}$, $L = 10 \text{ m}$, $v = 1 \text{ m/s}$.

- La description adoptée ici est-elle Lagrangienne ou Eulérienne ?
- Pour trouver le champ de température $T(x)$, on fait le changement de variable $\theta = T - T_0$. Quelle équation vérifie la fonction θ ? Cherchez les solutions de cette équation sous la forme $Ae^{\lambda x}$. On notera λ_1 et λ_2 les deux valeurs de λ possibles.

- 3- Déterminer les deux constantes d'intégration en supposant que le gradient de température est nul en entrée d'aspersion soit en $x = 0$. On pourra tracer la fonction $T(x)$ à l'aide d'un tableur (eg Excel) et faire varier la vitesse V .
- 4- En suivant un point matériel de la tôle d'acier (position initiale $x = 0$ au temps $t = 0$), déterminer l'évolution temporelle de sa température.
- 5- Quelle est la température en sortie du système d'aspersion, i.e. en $x = L$?



Exercice 2.7 Moment d'inertie d'une sphère pleine

Une sphère indéformable de masse spécifique uniforme γ est en rotation autour d'un de ses diamètres (axe zz' de vecteur unitaire $\mathbf{u}_z$). On souhaite calculer son moment d'inertie, J , en utilisant d'abord les coordonnées cylindriques puis les coordonnées sphériques et montrer

que $J = \frac{2}{5}mR^2$ avec m la masse de la sphère et R son rayon.

1. On utilise en premier le système de coordonnées cylindriques. Faire un dessin avec les 3 vecteurs définissant le repère.
2. Montrer que le moment cinétique $\mathbf{b}$ (cf. eq. 2.12) est proportionnel à sa vitesse angulaire et se trouve selon $\mathbf{u}_z$. On écrira alors $\mathbf{b} = J \omega \mathbf{u}_z$ et on déterminera J .
3. On se place maintenant dans une description sphérique (cf. § 3.8). Faire un dessin avec les 3 vecteurs définissant le repère.
4. Calculer le moment d'inertie J de la sphère pleine de rayon R en utilisant l'intégrale

$$\text{suivante : } \int_0^\pi \sin^3\theta = \frac{4}{3}$$

5. Calculer le moment d'inertie J d'une sphère creuse de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 .