Complément – Exercices Dynamique

02.11.2018

Exemple 1:

Déduire l'équation dynamique directe et inverse d'un axe moteur à courant continu.
$\boldsymbol{i}$, est le courant de contrôle du moteur.
$\boldsymbol{J_m}$, est l'inertie (moment d'inertie) du moteur.
$\boldsymbol{J_c}$, est l'inertie (moment d'inertie) de la charge.
$\boldsymbol{k_c}$, est la constante de couple du moteur.

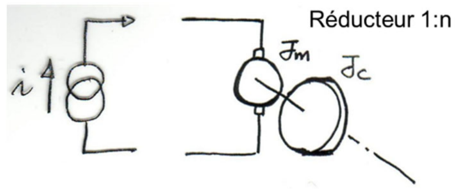

Fig. 1 axe motorisé à courant continu, réducteur et charge

Solution

La plupart des axes de robots sont des axes construits sur la base d'un moteur à courant continu, souvent sans balais, avec un réducteur* pour augmenter la capacité de couple de l'actionnement.

*) Un réducteur est principalement un multiplicateur de couple.

Pour écrire l'équation de la dynamique de mouvement d'un axe rotatif, il faut commencer par l'équation d'Euler, que je vous propose de la manière suivante.

$$\sum \boldsymbol{\Gamma_X} = \boldsymbol{J_{t\_rX}} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{X}}$$

- $\sum \boldsymbol{\Gamma_X}$ est la somme des moments, tous pris par rapport à un axe de rotation choisi $\boldsymbol{X}$.
- $\boldsymbol{J_{t\_rX}}$ est le moment d'inertie total ramené à l'axe de rotation $\boldsymbol{X}$. Ce moment d'inertie total est le moment d'inertie correspondant à une seule charge tournante autour de l'axe $\boldsymbol{X}$.
- $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{X}}$ est l'accélération par rapport à l'axe $\boldsymbol{X}$.

Dans le cas de l'axe de la figure 1, en rapportant tous les moments à l'axe de rotation du moteur, nous écrivons le moment d'inertie total vu par le moteur comme suit :

$$\boldsymbol{J_{t\_rX}} = \boldsymbol{J_m} + \frac{\boldsymbol{J_c}}{\boldsymbol{n^2}}$$

Le seul couple actif est le couple moteur $\boldsymbol{\Gamma_m}$. Il n'y a aucun couple résistif et le couple moteur est proportionnel au courant par la constante de couple k_c. La commande en courant correspond à une commande en couple . C'est **« kif-kif »**, les deux dénominations existent et sont utilisées d'une manière identique : <u>*commande en courant*</u> ou <u>*commande en couple*</u>.

$$\Gamma_m = k_c i$$

L'équation de la dynamique s'écrit alors simplement : $\sum \boldsymbol{\Gamma_X} = \boldsymbol{\Gamma_m} = \left(\boldsymbol{J_m} + \frac{\boldsymbol{J_c}}{\boldsymbol{n^2}}\right) \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{k_c i}$

Les modèles dynamiques **inverses** sont alors :

$\Gamma_m = \left(J_m + \frac{J_c}{n^2}\right) \ddot{\theta}_m$ **ou** $i = \frac{1}{k_c}\left(J_m + \frac{J_c}{n^2}\right) \ddot{\theta}_m$, selon que nous considérons le courant ou le couple comme grandeur d'entrée.

Le modèle dynamique **direct** représenté par la fonction de transfert est : $\frac{\theta_m}{\Gamma_m} = \frac{1}{\left(J_m + \frac{J_c}{n^2}\right)s^2}$

Parenthèse 1- Combinaison *Moteur + Réducteur* : Calcul du moment d'inertie rapporté

Considérons un axe rotatif construit par une combinaison moteur + réducteur + charge tournante.

$\boldsymbol{J_m}$, est le moment d'inertie du moteur.

$\boldsymbol{J_c}$, est le moment d'inertie de la charge.

L'objectif est de connaitre le moment d'inertie total (**inertie par abus de langage**) telle que vue par le moteur. Cette inertie est celle que le moteur est censé percevoir depuis son axe de rotation.

$$E_{CT} = \frac{1}{2}J_{tot\_m}\omega_m^2 = \frac{1}{2}J_m\omega_m^2 + \frac{1}{2}J_c\omega_c^2$$

E_{CT} est l'énergie cinétique totale.

J_{tot_m} est l'inertie totale telle que vue par le moteur, c'est notre inconnue.

En écrivant la vitesse de la charge en fonction de celle du moteur, nous obtenons :

$$E_{CT} = \frac{1}{2}\boldsymbol{J_{tot\_m}}\omega_m^2 = \frac{1}{2}J_m\omega_m^2 + \frac{1}{2}J_c\left(\frac{\omega_m}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{J_m} + \frac{\boldsymbol{J_c}}{\boldsymbol{n^2}}\right)\omega_m^2$$

Soit finalement :

$$\boldsymbol{J_{tot\_m}} = \left(\boldsymbol{J_m} + \frac{\boldsymbol{J_c}}{\boldsymbol{n^2}}\right)$$

En considérant le rendement $\boldsymbol{\eta}$, l'énergie cinétique de la charge se retrouve diminuée d'un coefficient $\boldsymbol{\eta}$. C'est comme si l'énergie à dépenser devait être devait plus élevée.

$$E_{CT} = \frac{1}{2}\boldsymbol{J_{tot\_m}}\omega_m^2 = \frac{1}{2}J_m\omega_m^2 + \frac{1}{\eta}\left\{\frac{1}{2}J_c\left(\frac{\omega_m}{n}\right)^2\right\} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{J_m} + \frac{\boldsymbol{J_c}}{\boldsymbol{\eta\, n^2}}\right)\omega_m^2$$

$$\boldsymbol{J_{tot\_m}} = \left(\boldsymbol{J_m} + \frac{\boldsymbol{J_c}}{\boldsymbol{\eta\, n^2}}\right)$$

Autre démonstration. La somme M_c des moments côté charge s'écrit comme suit :

$$\sum \boldsymbol{M_c} = \boldsymbol{J_{tot\_m}}\frac{d\omega_m}{dt} = \left(\boldsymbol{J_m} + \boldsymbol{J_{c\_m}}\right)\frac{d\omega_m}{dt}$$

$$= \boldsymbol{J_m}\frac{d\omega_m}{dt} + \frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{n}\left(\boldsymbol{J_c}\frac{d\omega_c}{dt}\right)\right) = \left(\boldsymbol{J_m} + \frac{1}{\eta}\left(\frac{\boldsymbol{J_c}}{n^2}\right)\right)\frac{d\omega_m}{dt}$$

Avec:

$\left(\boldsymbol{J_c}\frac{d\omega_c}{dt}\right)$ est le couple dynamique à la sortie, dû à la charge J_c.

$\left(\frac{1}{n}\left(\boldsymbol{J_c}\frac{d\omega_c}{dt}\right)\right)$ est le couple dynamique dû à la charge J_c., ramené côté moteur (excl. rendement)

$\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{n}\left(\boldsymbol{J_c}\frac{d\omega_c}{dt}\right)\right)$ est le couple dynamique dû à la charge J_c., ramené côté moteur, en prenant en compte le rendement. ____

D'une manière identique, nous écrivons le moment d'inertie total **ramené du côté de la charge** :

$$E_{CT} = \frac{1}{2}\boldsymbol{J_{tot\_c}}\omega_c^2 = \frac{1}{2}J_m\omega_m^2 + \frac{1}{\eta}\left\{\frac{1}{2}J_c\omega_c^2\right\} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{J_m n^2} + \frac{\boldsymbol{J_c}}{\boldsymbol{\eta}}\right)\omega_c^2$$

$\boldsymbol{J_{tot\_c}} = \left(\boldsymbol{J_c} + \boldsymbol{J_m n^2}\right)$ / à rendement unitaire (aucune perte)

En considérant le rendement, nous aurons $\boldsymbol{J_{tot\_c}} = \left(\frac{\boldsymbol{J_c}}{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{J_m n^2}\right)$

Parenthèse 2 - Combinaison – *Moteur + réducteur* -

Observations

Le moment d'inertie total d'une combinaison moteur + réducteur s'écrit comme suit :

$\boldsymbol{J_{tot\_m}} = \left(\boldsymbol{J_m} + \frac{\boldsymbol{J_c}}{\boldsymbol{n^2}}\right)$

- Plus le rapport de réduction est élevé, moins le moteur voit (perçoit) la charge. C'est la raison pour laquelle les servomécanismes à rapport de réduction élevé sont plus faciles à commander.
- Un réducteur à plusieurs étages possède plus de viscosité, à cause du graissage et le cisaillement entre les étages. Cet amortissement mécanique intrinsèque rend également les servomécanismes avec des réducteurs à plusieurs étages plus faciles à commander
- La réduction réduit les efforts de perturbation et résonnances au niveau de la charge par un rapport n.

Ces belles choses ont quand même plusieurs contre coûts.

- L'augmentation du rapport de réduction est soumise à une réduction de la capacité d'accélération (voir cours moteurs et rapport de réduction optimal).
- Un réducteur coute moyennement autant qu'un moteur… donc cher ☹, et encore plus cher dans le cas de contraintes sur 1) la précision de positionnement, 2) l'absence de jeu, 3) la raideur et 4) la dynamique.
- Un réducteur nécessite un assemblage et un entretien permanent pour des applications de haute dynamique.

Exemple 2 :

Déduire la fonction de transfert du système dynamique régi par l'équation différentielle suivante :

$$I\ddot{\theta} = \Gamma_{in} - mglsin\theta - b\dot{\theta}^2 Sign(\theta)$$

Solution

Ce système dynamique est non linéaire à cause de la présence des deux fonctions non linéaires sinus et sign. Une représentation du modèle dynamique par fonction de transfert est uniquement possible si nous opérons une linéarisation tangente autour d'un point de fonctionnement, en utilisant un développement de Taylor.

<u>Il faut absolument noter…</u>

Que les concepts de « *fonction de transfert* », de *« modes vibratoires* », de « *pôles* » et de « *valeurs propres »* sont des concepts purement linéaires, et supposent donc des comportements dynamiques linéaires.