

Ingénierie optique

Semaine 12 – partie 1

Olivier J.F. Martin
Laboratoire de Nanophotonique et Métrologie

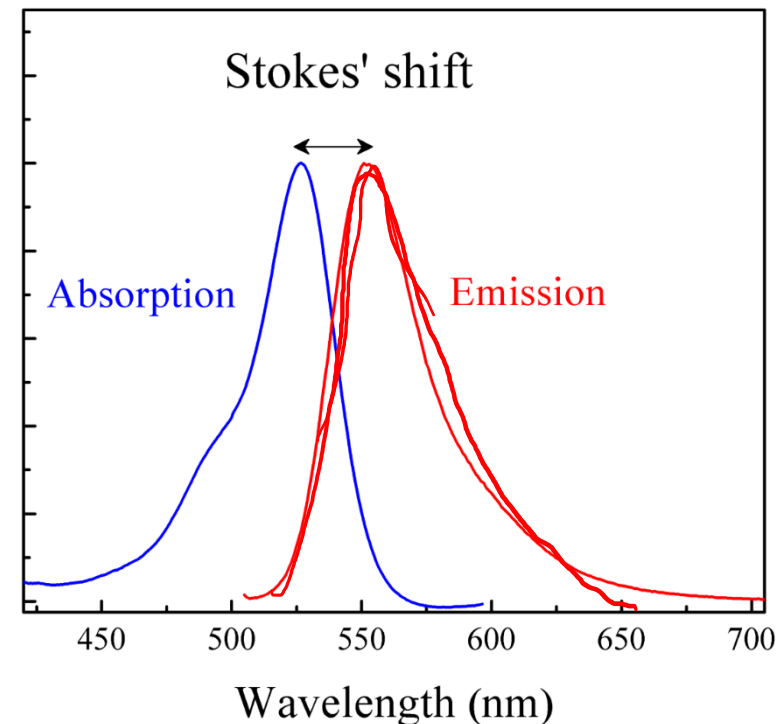
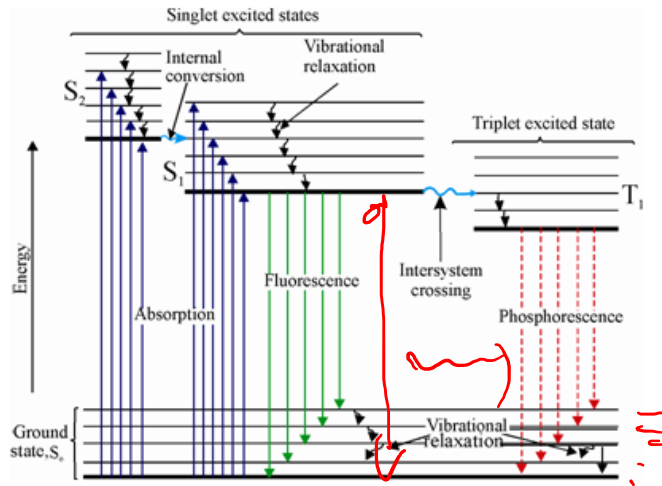


Trois rappels importants pour le cours d'aujourd'hui

- Taux de transition p [s^{-1}] (=probabilité), durée de vie t [s]; caractérisent le nombre de photons qui vont être produits/absorbés par les différentes transitions:

$$p = \frac{1}{\tau}$$

- L'émission d'un atome/molécule est toujours à large spectre:

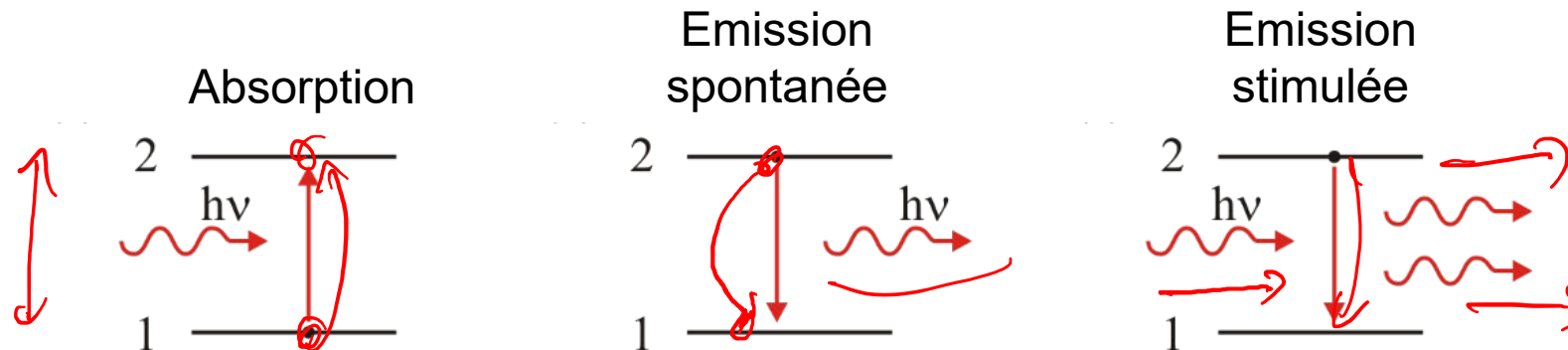


Transitions optiques et coefficients d'Einstein

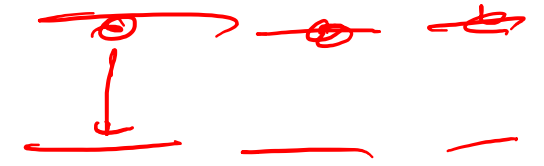
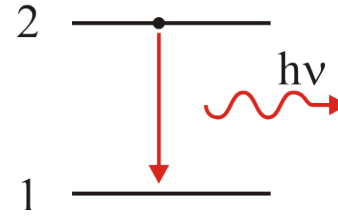
- Les transitions sont déterminées par la différence d'énergie entre les niveaux concernés qui détermine aussi la fréquence de la radiation:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \hbar \nu_0$$

- On considère un volume V avec une certaine quantité de photons
- Dans un premier temps on considère des photons monochromatiques à la fréquence ν (qui peut être ν_0 mais pas nécessairement)
- Il existe trois types de transitions



Transitions optiques



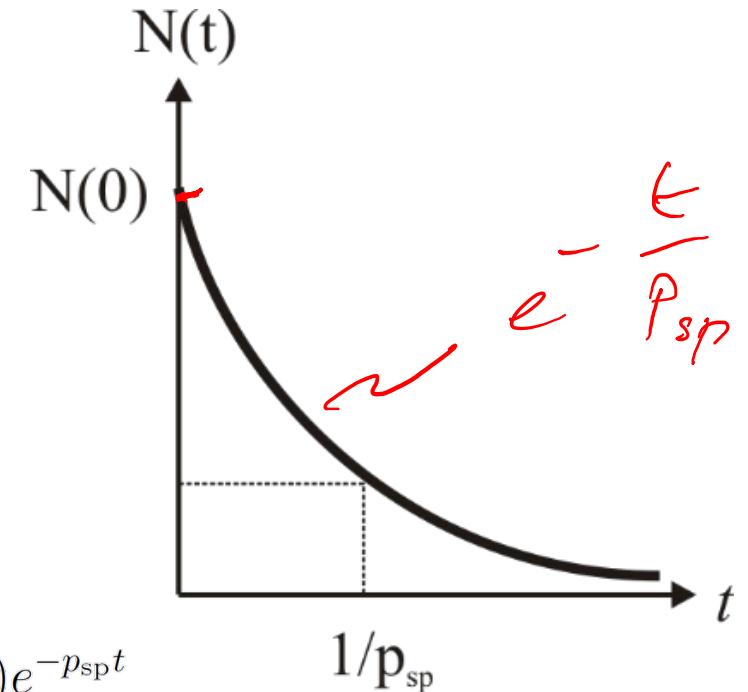
$$c = \frac{c_0}{n}$$

• Emission spontanée:

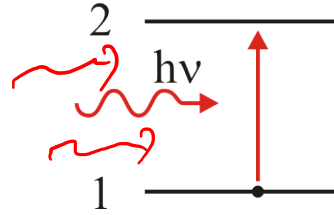
- probabilité de transition $2 \rightarrow 1$ par unité de temps pour un volume V :

$$p_{sp} = \frac{c}{V} \sigma(\nu)$$

- $\sigma(\nu)$ section efficace de transition [cm^2]
- probabilité d'émettre un photon de façon spontanée dans l'intervalle Δt : $p_{sp} \Delta t$.
- pour N atomes, $\Delta N = N p_{sp} \Delta t$ feront une transition pendant l'intervalle Δt ; $dN / dt = -p_{sp} N$
- évolution de la population d'atomes excités: $N(t) = N(0)e^{-p_{sp}t}$



Transitions optiques



- Absorption:

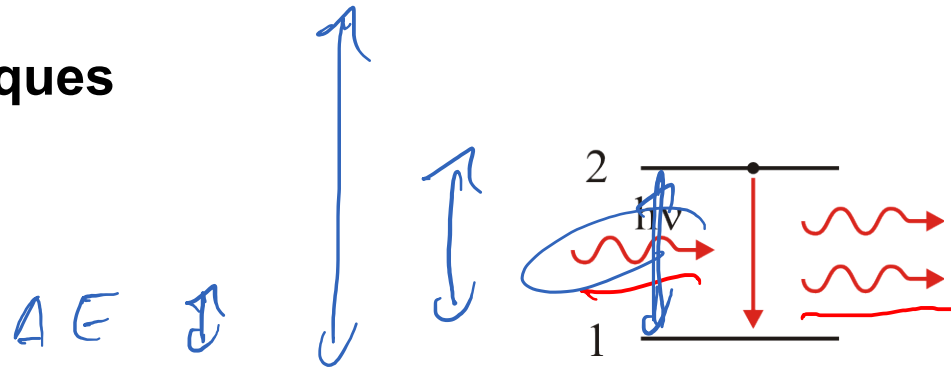
- probabilité de transition $1 \rightarrow 2$ par unité de temps pour un volume V :

$$p_{\text{ab}} = \frac{c}{V} \sigma(\nu)$$

- c'est la même loi qui contrôle l'émission spontanée
- si on a n photons dans le volume V (on utilise P_{ab}):

$$P_{\text{ab}} = n \frac{c}{V} \sigma(\nu)$$

Transitions optiques



- Emission stimulée:

- Probabilité de transition $2 \rightarrow 1$ par unité de temps pour un volume V :

$$p_{\text{st}} = \frac{c}{V} \sigma(\nu)$$

section efficace

- pour n photons dans le volume V : $P_{\text{st}} = n \frac{c}{V} \sigma(\nu)$
- le photon émis est cohérent, il a la même phase que le photon incident !
- comme $P_{\text{st}} = P_{\text{ab}}$ on introduit un symbole unique pour la densité de probabilité d'émission stimulée ou d'absorption $W_i = P_{\text{st}} = P_{\text{ab}}$

Section efficace, ligne spectrale, force d'oscillateur

- Probabilité totale d'émettre un photon $p_{\text{sp}} + P_{\text{st}} = (n + 1) \frac{c}{V} \sigma(\bar{\nu})$
- La section efficace peut prendre différentes formes:

- Lorentz:

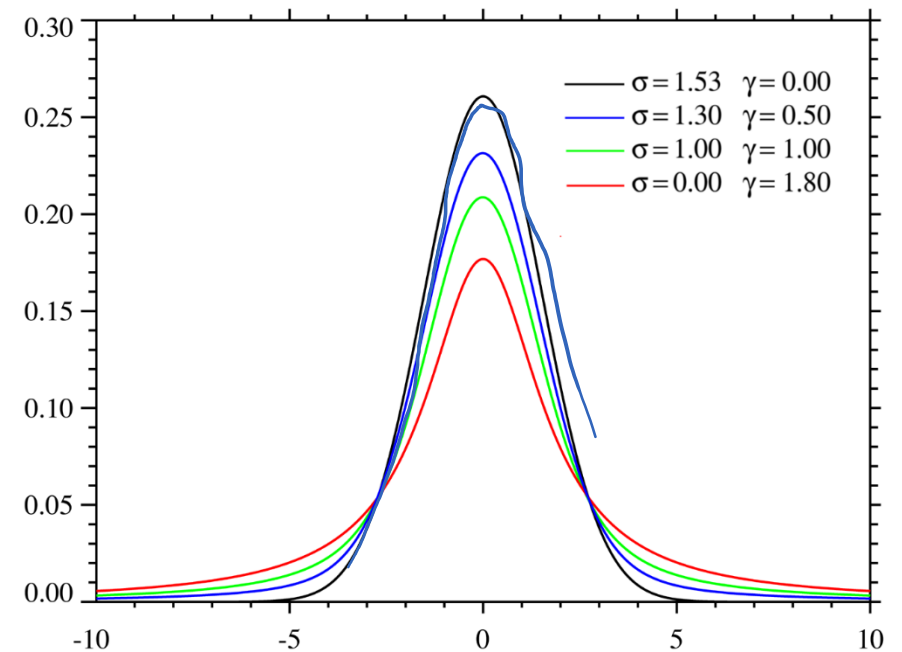
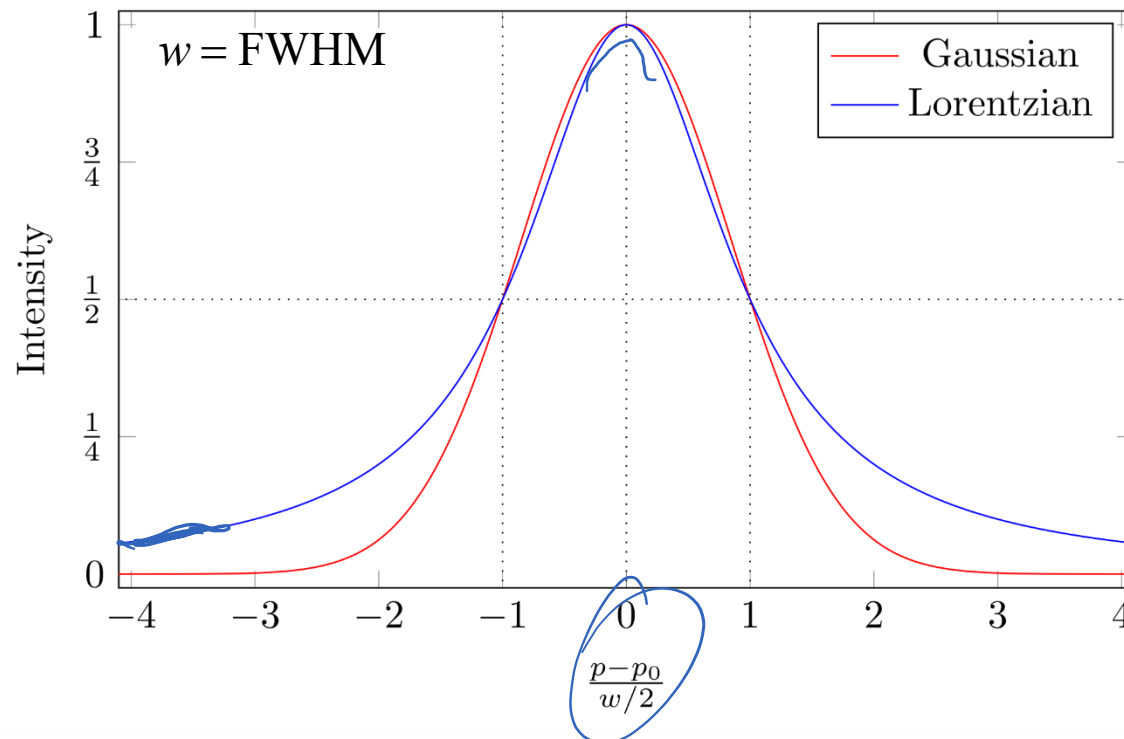
$$L(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad x = \frac{p-p_0}{w/2}$$

- Gauss:

$$G(x) = e^{-(\ln 2)x^2}$$

- Voigt:

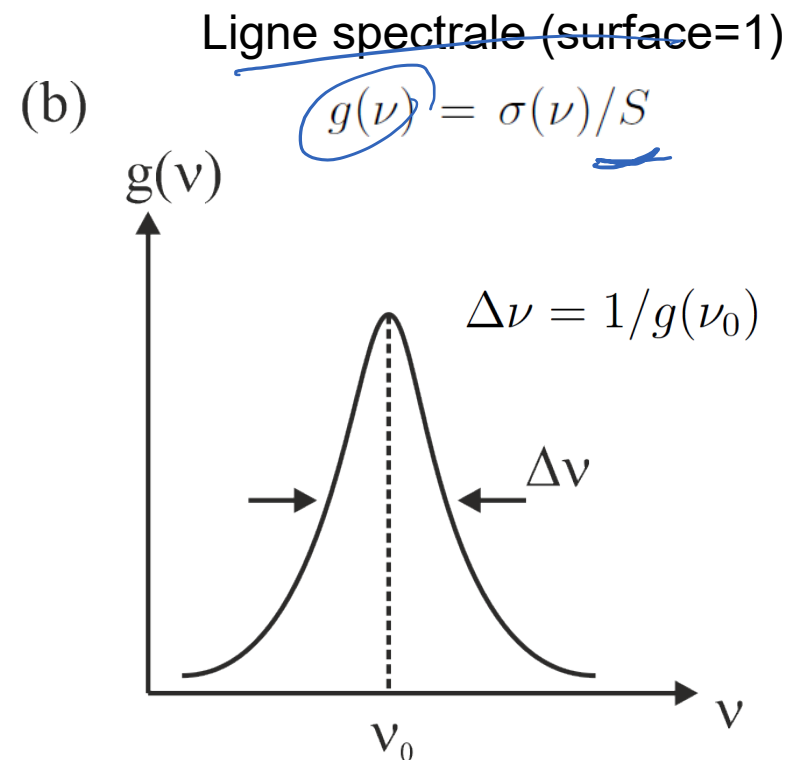
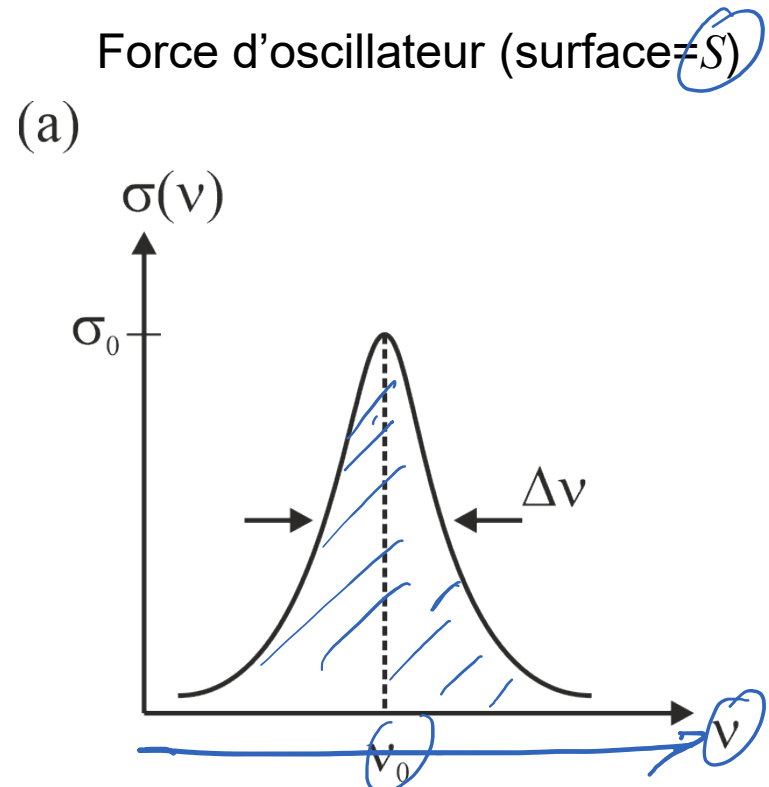
$$V(x; \sigma, \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x'; \sigma) L(x - x'; \gamma) dx'$$



- FWHM: full width at half maximum

Section efficace, ligne spectrale, force d'oscillateur

- Section efficace centrée autour de ν_0 , où les transitions sont les plus probables
- La force d'oscillateur $S = \int_0^\infty d\nu \sigma(\nu)$ caractérise la probabilité d'absorption ou d'émission de radiation sur l'entier du spectre
- Pour comparer différents systèmes, on définit une ligne spectrale dont la surface vaut 1:

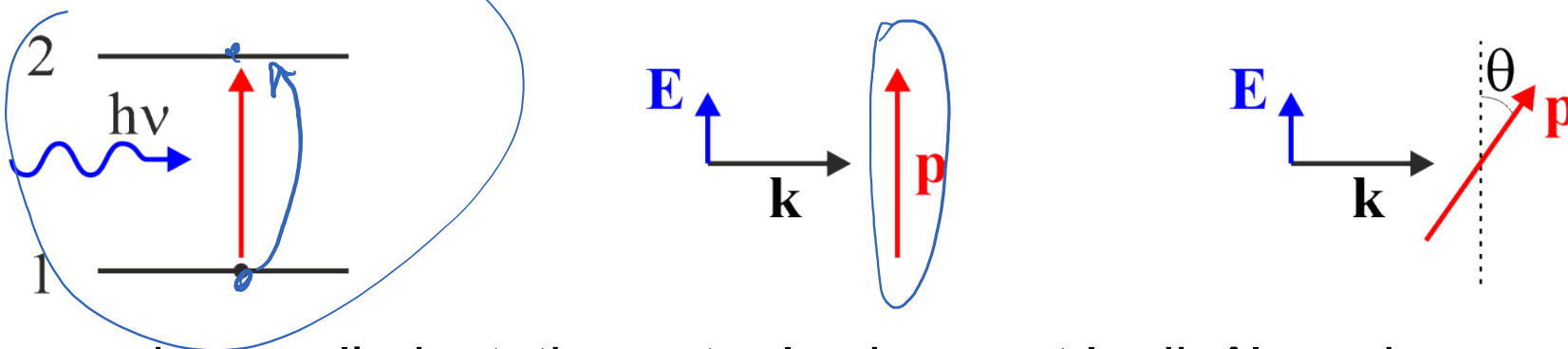


Coefficients d'Einstein

- Jusqu'à présent, nous avons implicitement calculé ce qui se passe dans un volume V ; il est possible de considérer des grandeurs qui ne dépendent pas du volume
- On introduit une nouvelle force d'oscillateur $\bar{S}$ et la ligne spectrale $\bar{\sigma}(\nu) = \bar{S} g(\nu)$
- Des calculs basés sur la distribution de photons et moyennés sur toutes les orientations possibles du moment dipolaire de l'atome et la polarisation du photon permettent d'obtenir:

$$\bar{\sigma}(\nu) = \frac{\lambda^2}{8\pi t_{\text{sp}}} g(\nu)$$

- En effet, on peut considérer une transition atomique comme un dipôle...



- ... et comprendre que l'orientation entre le champ et le dipôle va jouer un rôle

Coefficients d'Einstein

$$\bar{\sigma}(\nu) = \frac{\lambda^2}{8\pi t_{\text{sp}}} g(\nu) \quad \leftarrow$$

- Le coefficient t_{sp} est un temps qui correspond à la durée de vie de la transition $2 \rightarrow 1$
- On le relie à la probabilité d'émission spontanée:

$$\rightarrow P_{\text{sp}} = \frac{1}{t_{\text{sp}}}$$

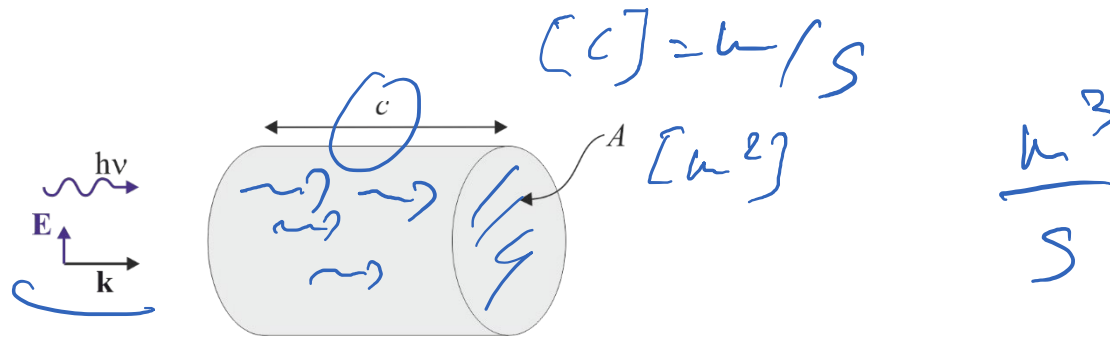
- Dans un laser, on aura une compétition entre l'émission stimulée (qui fait gagner des photons) et l'absorption (qui fait perdre des photons)
- Considérons tout d'abord un flux de photons monochromatiques ϕ , d'intensité I et de fréquence ν :

$$\phi = \frac{I}{h\nu}$$

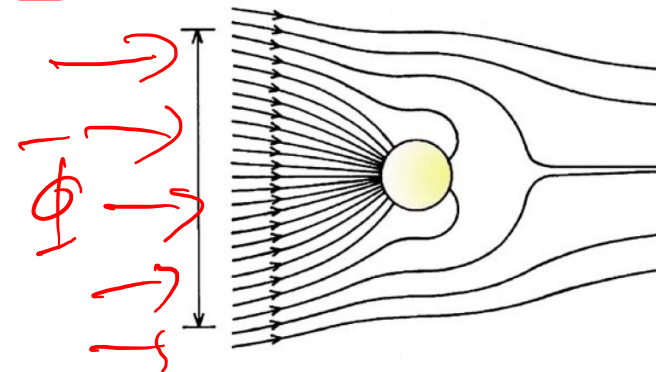
- Ce flux de photons interagît avec un atome de fréquence de résonance ν_0
- On souhaite calculer la probabilité d'interaction $W_i \equiv P_{\text{ab}} = P_{\text{st}}$

→ ← ←

Coefficients d'Einstein



- On peut considérer que le flux de photons ϕ occupe un volume V dans l'espace et le temps, construit sur un cylindre de base A , longueur c et volume $V=cA$ [cm^3/s]
- Le flux de photons (photons/s) qui traverse la base du cylindre est ϕA
- Comme les photons vont à la vitesse c , on a à chaque instant $n = \phi A = \phi V / c$ photons dans volume; on en déduit: $\phi = nc / V$
- Nous avons vu précédemment que $P_{\text{ab}} = n \frac{c}{V} \sigma(\nu)$ (probabilité d'absorption)
- On en déduit donc $P_{\text{ab}} \equiv P_{\text{st}} \equiv W_i = \phi \sigma(\nu)$

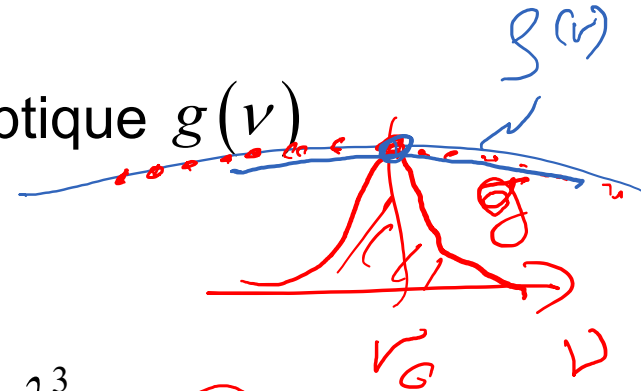


Coefficients d'Einstein

- Dans un laser, on aura différentes longueurs d'onde, on doit donc généraliser ce résultat pour un spectre de photons $\rho(\nu)$
- On a maintenant deux dépendances en fréquence: la transition optique $g(\nu)$ (centrée autour de ν_0) et les photons dans la cavité $\rho(\nu)$
- On intègre la relation $W_i = nc\sigma(\nu)/V$ sur l'entier du spectre:

$$\underline{W_i} = \int_0^\infty \frac{\rho(\nu)V}{h\nu} \frac{c}{V} \sigma(\nu) d\nu \simeq \frac{\rho(\nu_0)c}{h\nu_0} \int_0^\infty \sigma(\nu) d\nu = \frac{\rho(\nu_0)}{h\nu_0} c\bar{S} = \frac{\lambda^3}{8\pi h t_{sp}} \rho(\nu_0)$$

- on a utilisé le fait que $\sigma(\nu)$ varie rapidement autour de ν_0
- on a introduit $\lambda = c / \nu_0$
- on s'est souvenu que $\bar{S} = \lambda^2 / 8\pi t_{sp}$



Coefficients d'Einstein

- On a donc $\underline{W_i} = \frac{\lambda^3}{8\pi h t_{sp}} \rho(\nu_0)$ et $\bar{n} = \frac{\lambda^3}{8\pi h} \rho(\nu_0)$

- Finalement, pour la probabilité d'absorption ou d'émission stimulée:

$$W_i = \frac{\bar{n}}{t_{sp}}$$

- En 1916, Einstein a étudié le rapport entre émission spontanée et stimulée
- On introduit les coefficients d'Einstein A et B:

$$P_{sp} = A$$

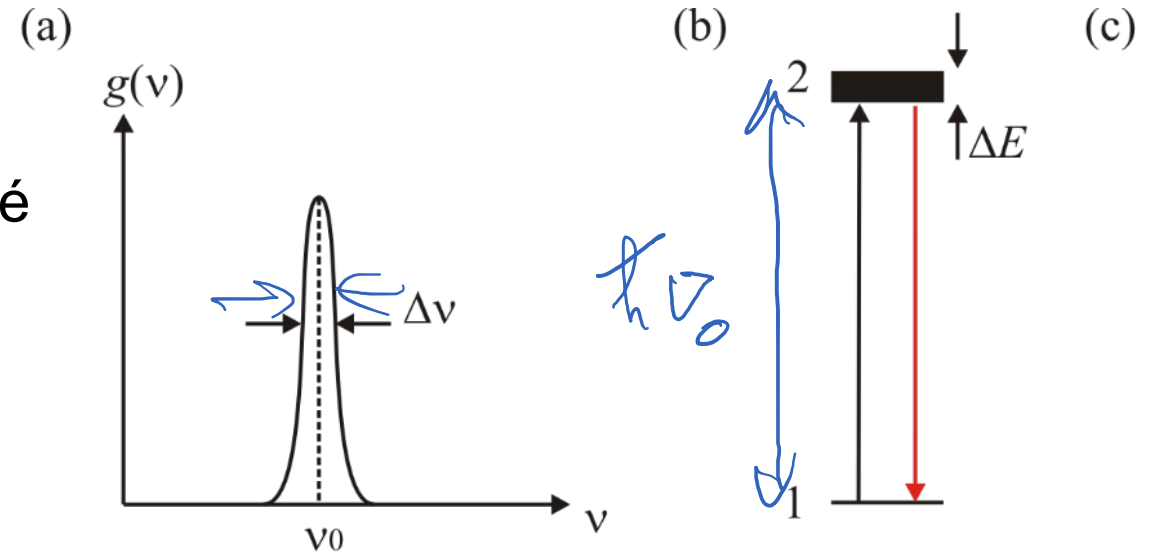
$$W_i = B\rho(\nu_0)$$

$$A = \frac{1}{t_{sp}}$$
$$B = \frac{\lambda^3}{8\pi h t_{sp}}$$
$$\frac{B}{A} = \frac{\lambda^3}{8\pi h}$$

é. spontanée
stimulée

Coefficients d'Einstein

- Le taux d'émission spontanée pour un atome excité dans l'état 2 est constant et vaut $A = 1/t_{sp}$
- Le taux d'émission stimulée occasionné par une source polychromatique est proportionnel à la densité d'énergie lumineuse à la fréquence ν_0 de la transition considérée: $W_i = B\rho(\nu_0)$
- Si l'on observe le spectre de la radiation émise par un ensemble d'atomes tous semblables, on s'attend à n'observer qu'un pic très mince de fréquence correspondant à la transition entre les deux niveaux concernés. Dans la réalité on observe un pic relativement large associé aux différents niveaux en jeu



Ingénierie optique

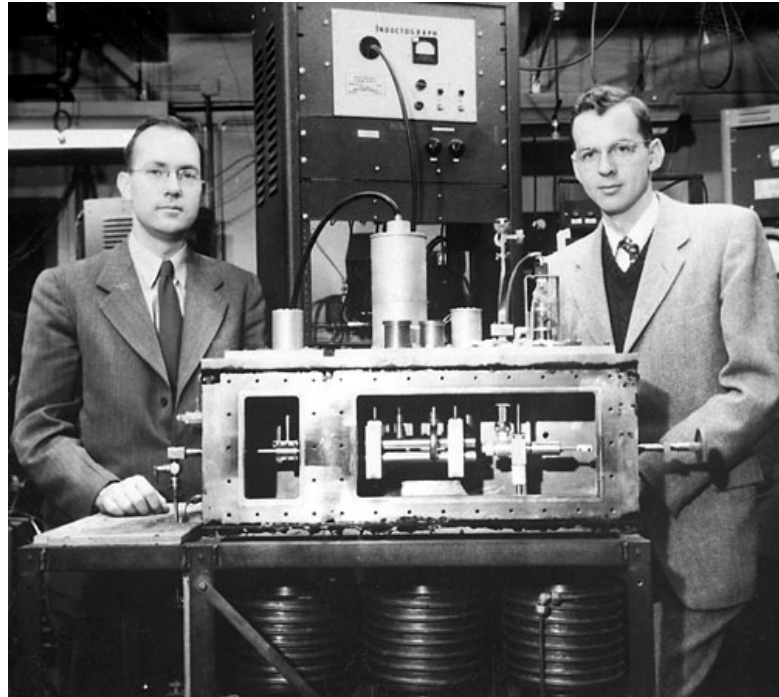
Semaine 12 – partie 1

Olivier J.F. Martin
Laboratoire de Nanophotonique et Métrologie



Lasers

- **L**ight **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation
- **M**icrowave **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation

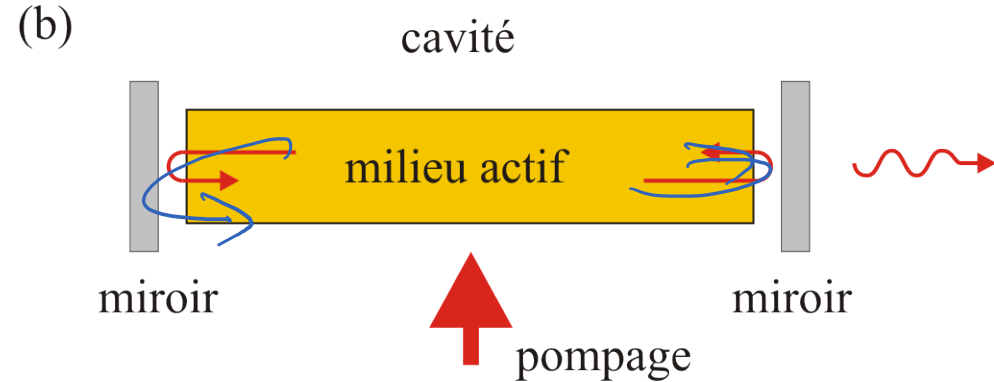
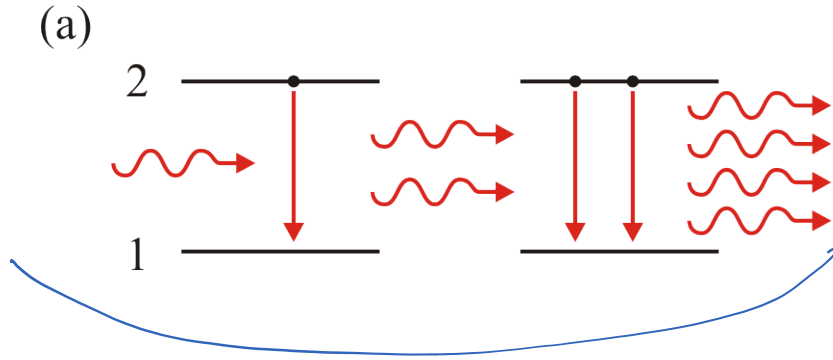


Townes, Gordon (et Zeiger)
1954

prl.aps.org

- 1958: Shalow et Townes, travail théorique
- 1960: Maiman premier laser rubis 
- 1962: première diode laser
- 1964: prix Nobel (Basov, Prokhorov et Townes)

Lasers – Principe



- Objectif: amplifier la lumière et créer un rayonnement cohérent (donc avec une très petite largeur spectrale) en utilisant l'interaction lumière-matière
- Ingrédients?
 - émission stimulée – milieu actif
 - pompage – optique, électrique, chimique
 - feedback et effet de filtre – cavité, résonateur

Cavité laser (Fabry-Perot)

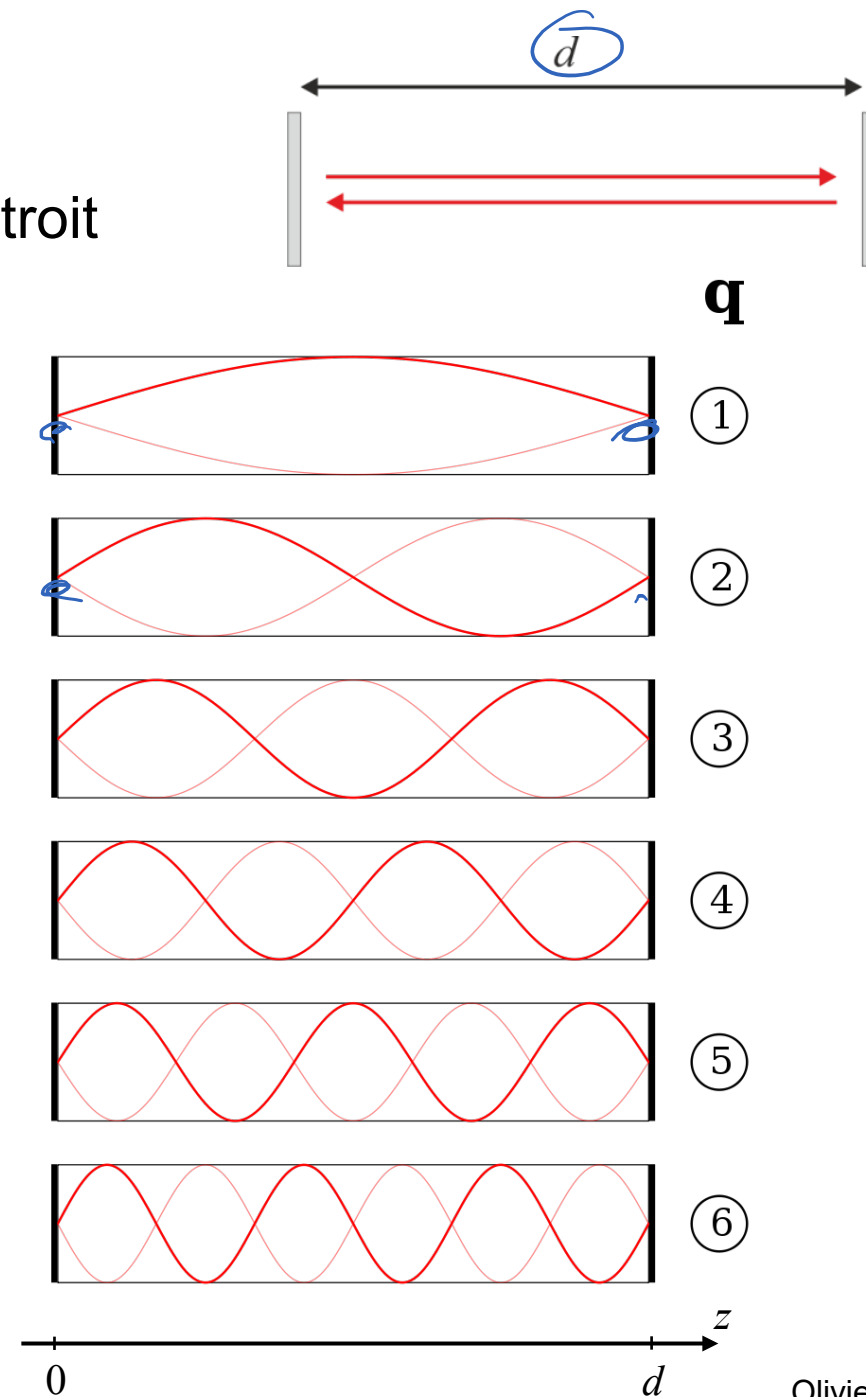
- Rôle principal: créer un spectre d'émission étroit
- Champ électrique dans la cavité
(mode de la cavité):

$$\begin{aligned} u(z, t) &= \Re \{ U(z) \exp(j2\pi\nu t) \} \\ &= \Re \{ A_q \sin(k_q z) \exp(j2\pi\nu_q t) \} \end{aligned}$$

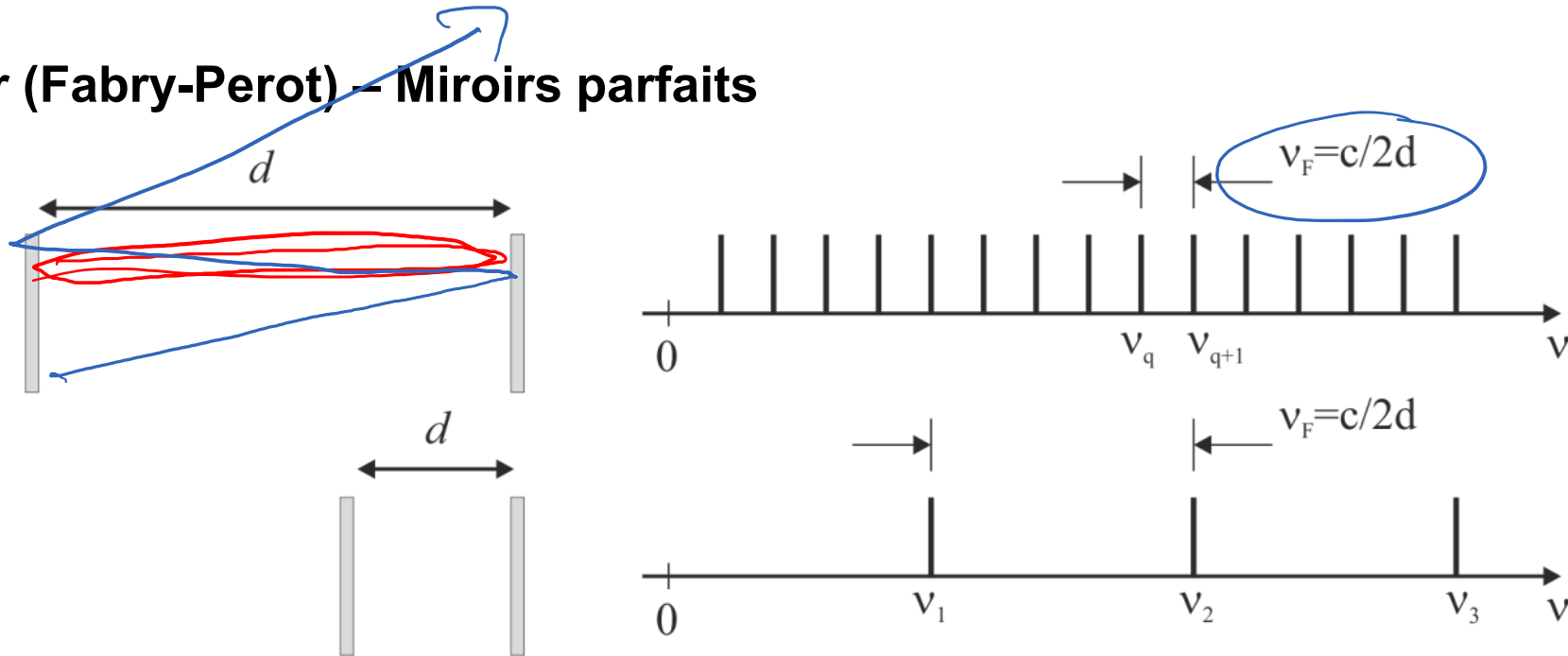
s'annule en $z=0$ et $z=d$

$$k_q = q \frac{\pi}{d} \quad (q = 1, 2, \dots)$$

$\frac{2\pi}{\lambda}$



Cavité laser (Fabry-Perot) – Miroirs parfaits

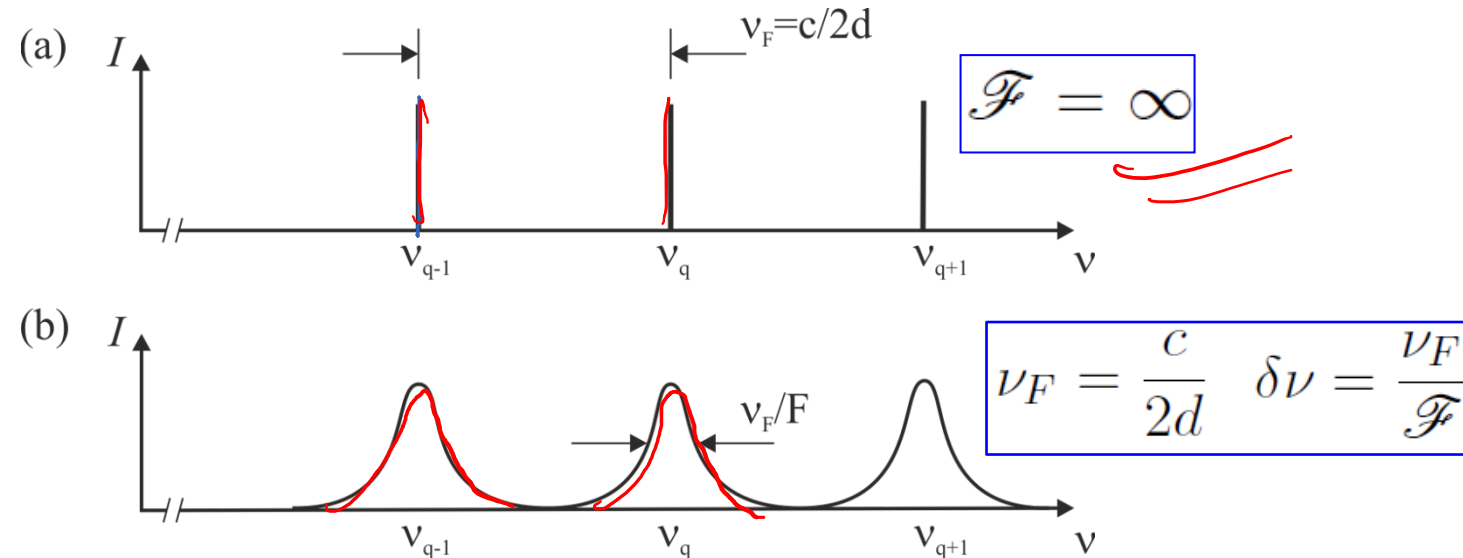


- On considère des miroirs ($r = 1$) parfaits et pas de perte dans le milieu se trouvant dans la cavité
- Les modes sont espacés régulièrement dans l'espace des fréquences ν
- Cet espacement (ν_F *free spectral range*) dépend de la taille de la cavité

$$\nu_q = \frac{ck_q}{2\pi} = q \frac{c}{2d}, \quad q = 1, 2, \dots$$

$$\nu_F = \frac{c}{2d}$$

Cavité laser (Fabry-Perot) – Miroirs réels



- Avec des miroirs réels ($r \neq 1$) ou de l'absorption dans la cavité, l'intensité diminue d'un facteur $|r|^2$ pendant un aller-retour et le spectre d'intensité prend une autre forme:

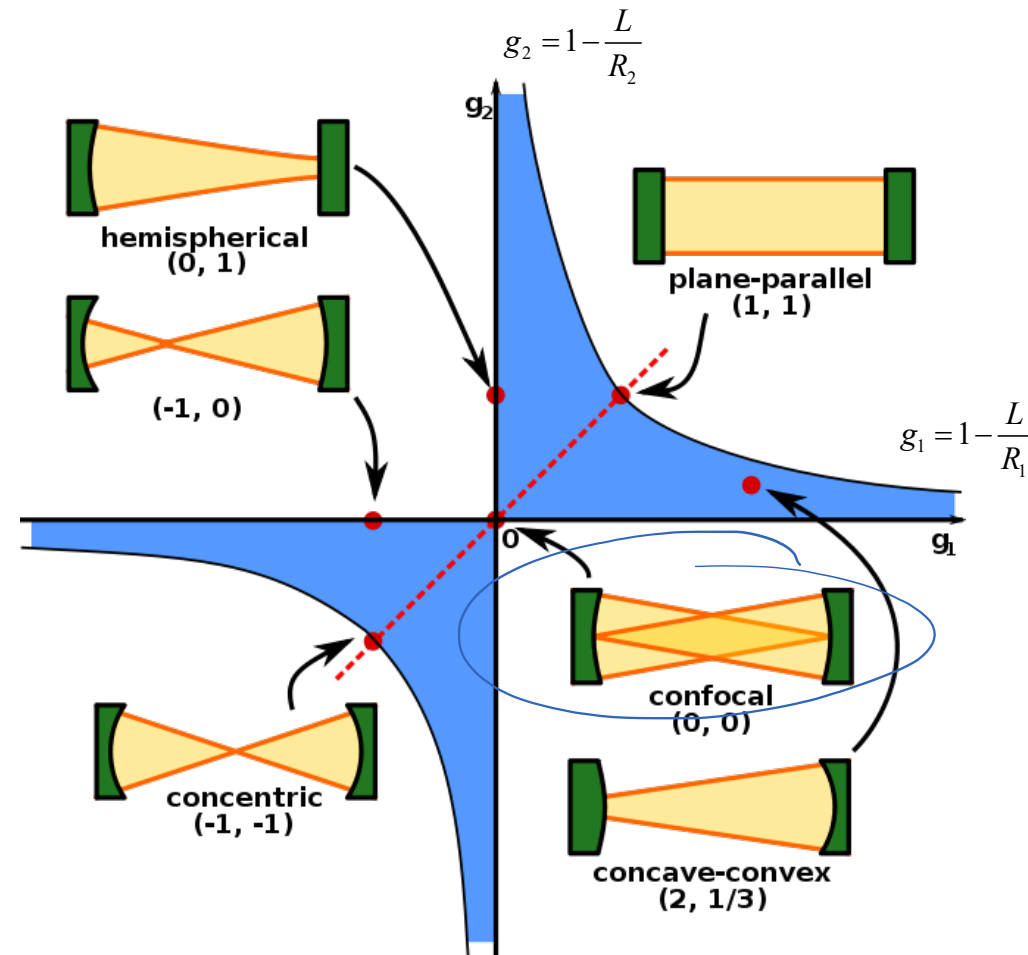
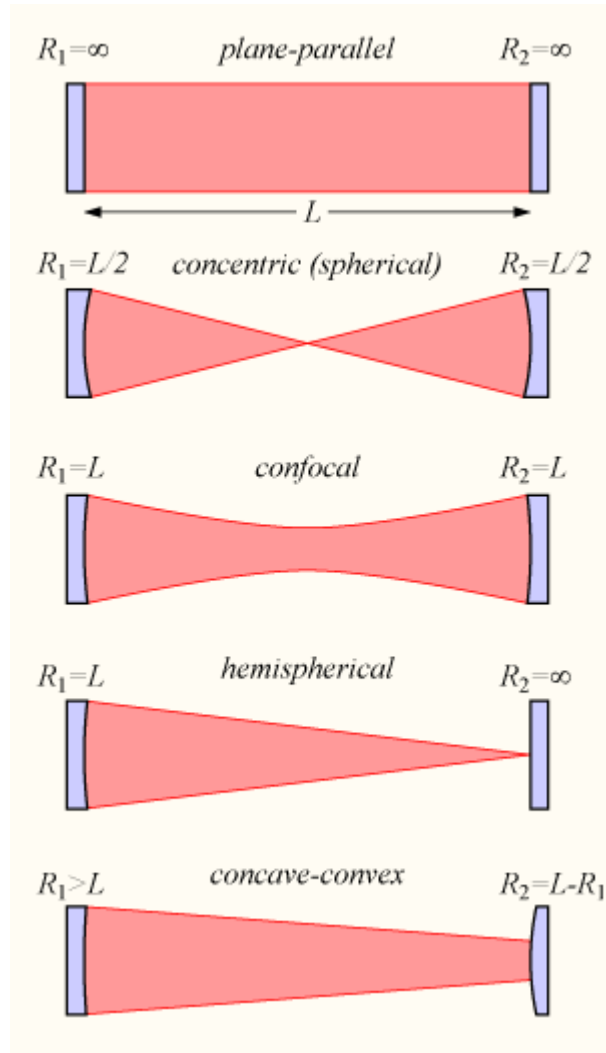
$$I = \frac{I_{\max}}{1 + (2\mathcal{F}/\pi)^2 \sin^2(\pi\nu/\nu_F)}, \quad I_{\max} = \frac{I_0}{(1 - |r|)^2}$$

- On a introduit la finesse de la cavité

$$\mathcal{F} = \frac{\pi \sqrt{|r|}}{1 - |r|}$$

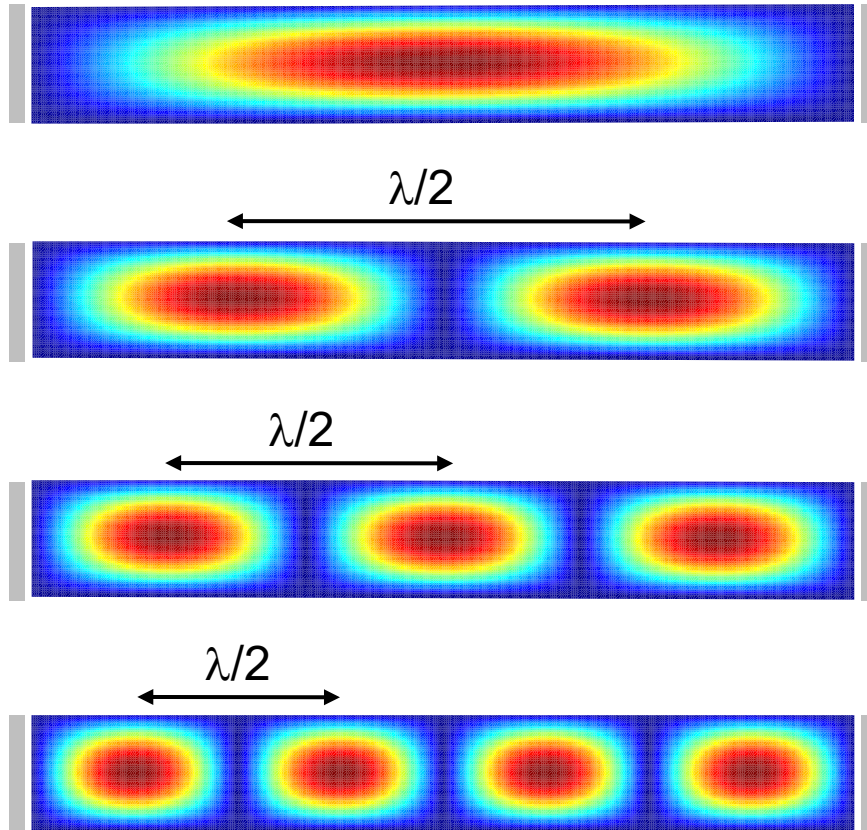
Cavité laser (Fabry-Perot) – Conditions de stabilité

- Il existe différentes géométries de résonateurs
- L'alignement d'un résonateur est primordial pour sa stabilité

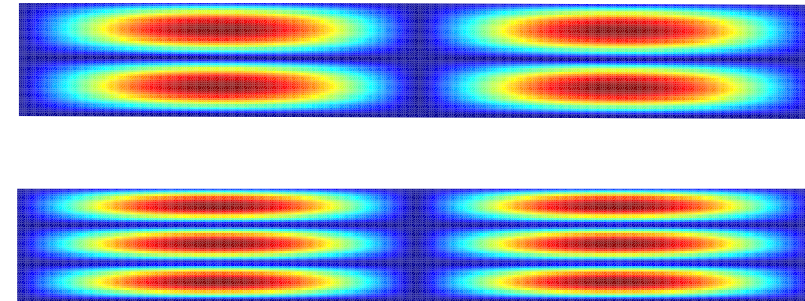


Cavité laser (Fabry-Perot) – Modes transverses

- La structure des modes est plus compliquée: il existe aussi une répartition transverse du champ électrique
- On essaie de limiter ces modes transverses



Modes transverses d'ordre plus élevés

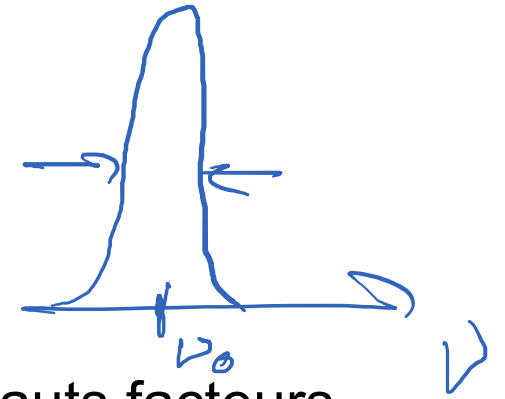


Cavité optique

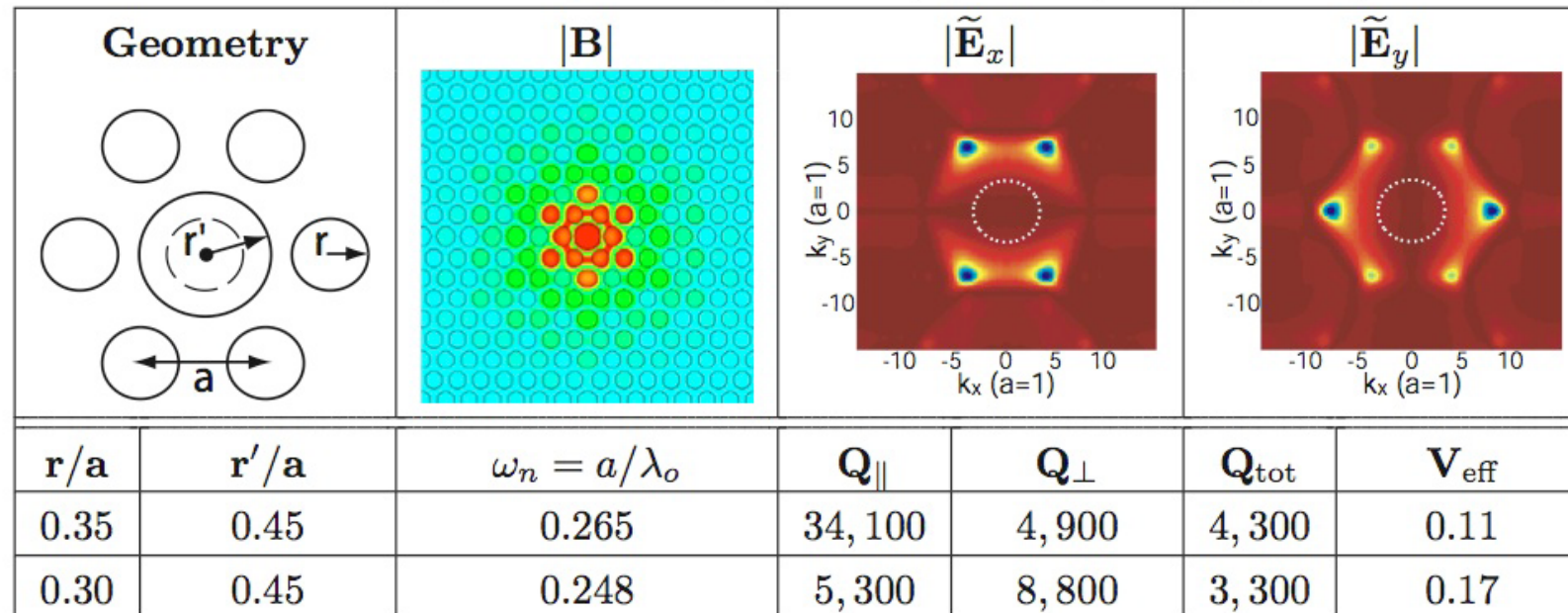
- Facteur de qualité d'une cavité:

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energie emmagasinée}}{\text{Energie perdue par cycle}}$$

$$Q = \frac{\nu_0}{\nu_F} \mathcal{F}$$



- Valeur typique: 10^6 (il existe aussi des cavités lasers avec des très hauts facteurs de qualité $\sim 10^{11}$)



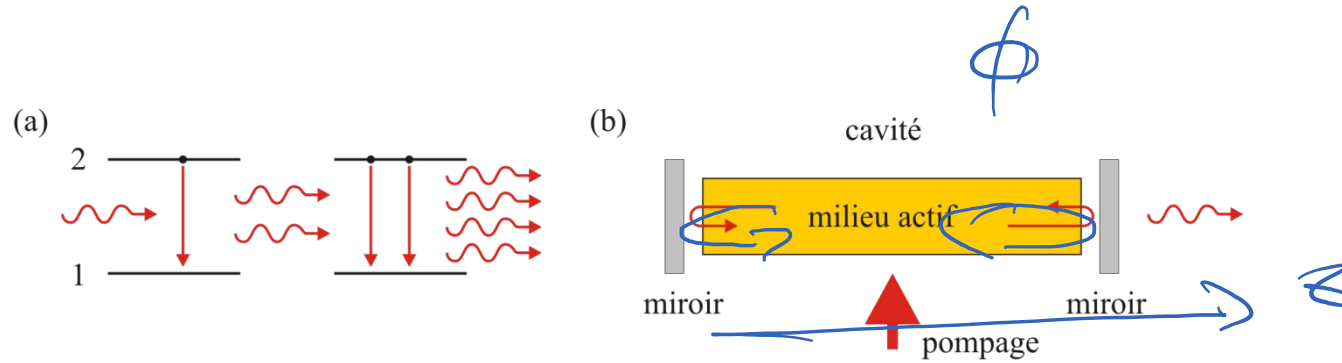
Ingénierie optique

Semaine 12 – partie 2

Olivier J.F. Martin
Laboratoire de Nanophotonique et Métrologie



Amplification laser

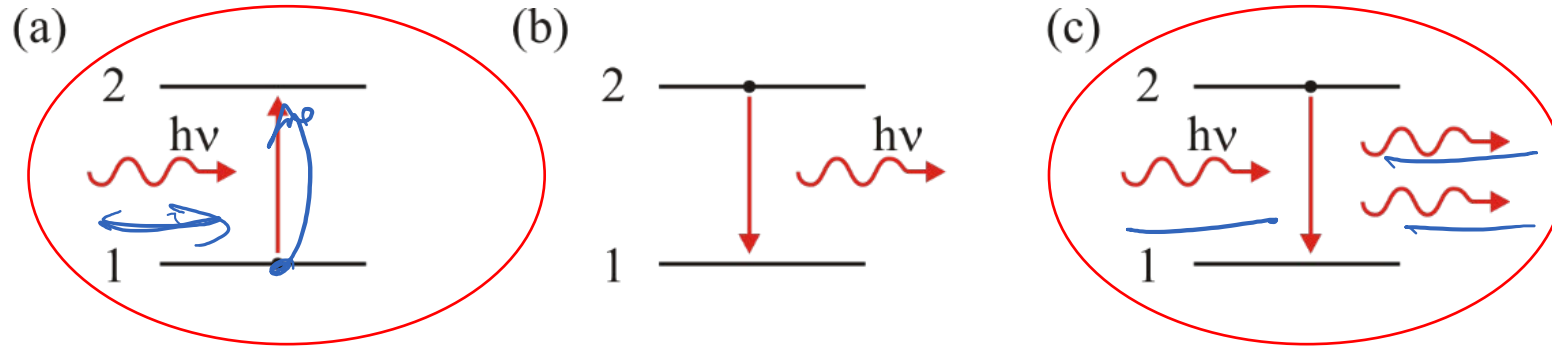


- On considère une cavité avec une onde $E(z) \exp(j2\pi\nu t)$ se propageant dans la direction z (intensité $I(z) = |E(z)|^2/2\eta$, impédance du milieu: $\eta = \sqrt{(\mu_0/\epsilon_0\epsilon_r)}$)
- Flux de photons $\phi(z) = I(z)/h\nu$
- Durant la propagation dans le cavité, le flux de photons est modifié:

$$\frac{d\phi(z)}{dz} = \gamma(\nu)\phi(z)$$

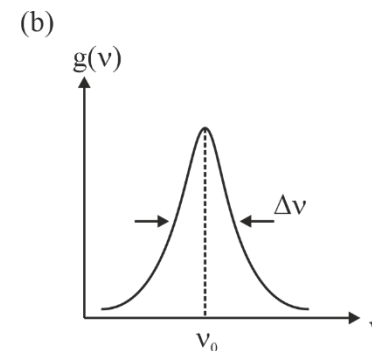
- $\gamma(\nu)$ changement d'amplitude (gain si >0 ; absorption si <0),

Amplification laser



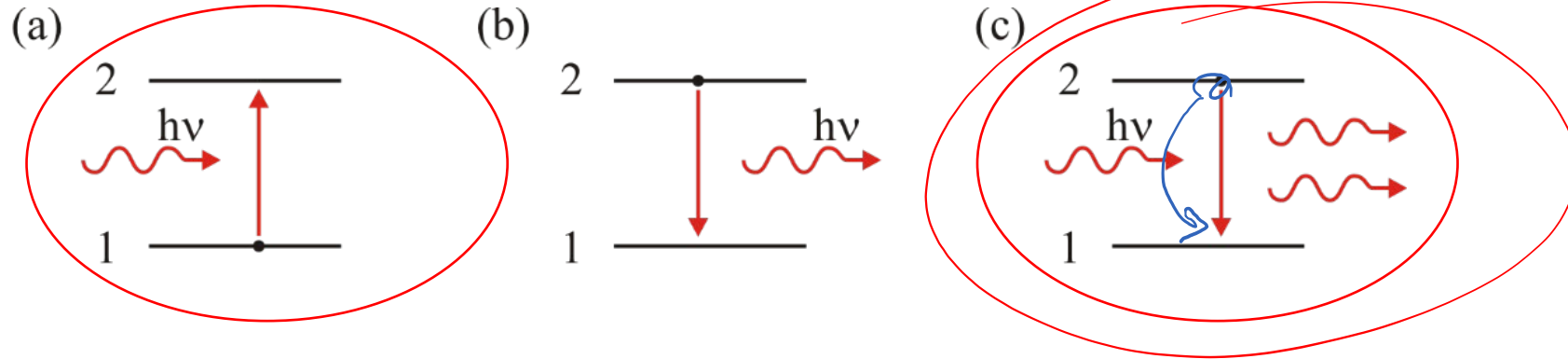
- L'absorption participe à l'atténuation de l'onde, l'émission stimulée participe à son amplification. L'émission spontanée ne participe qu'au bruit avec un photon émis sans relation avec l'onde incidente (photon incohérent)
- Probabilité/taux d'absorption **ou** d'émission stimulée: $W_i = \phi\sigma(\nu)$
- Les coefficients d'Einstein permettent de relier cette probabilité à la courbe de gain:

$$\sigma(\nu) = \frac{\lambda^2}{8\pi t_{sp}} g(\nu)$$

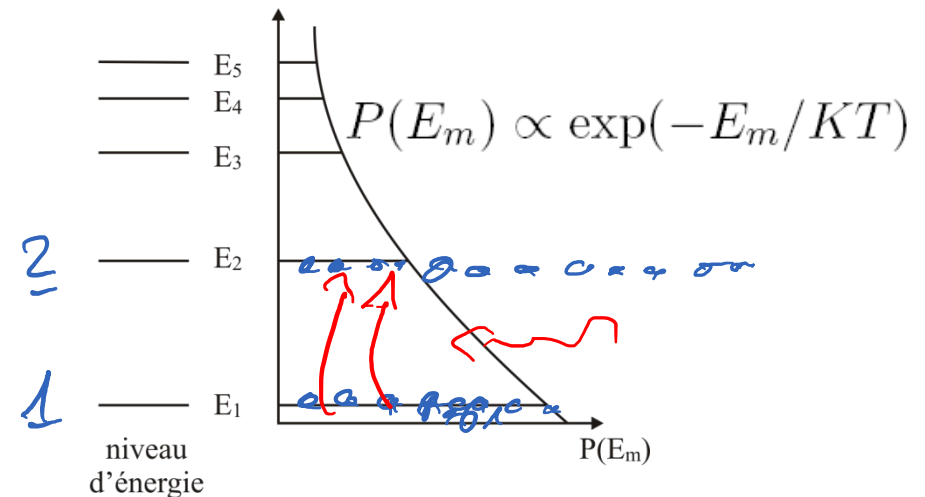


Amplification laser

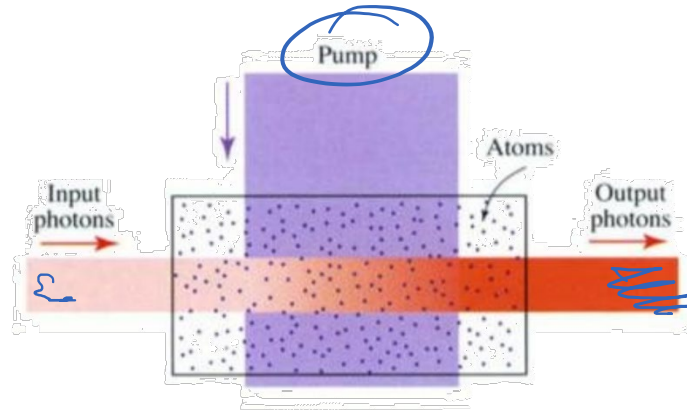
$$[W_i] = s^{-1}$$



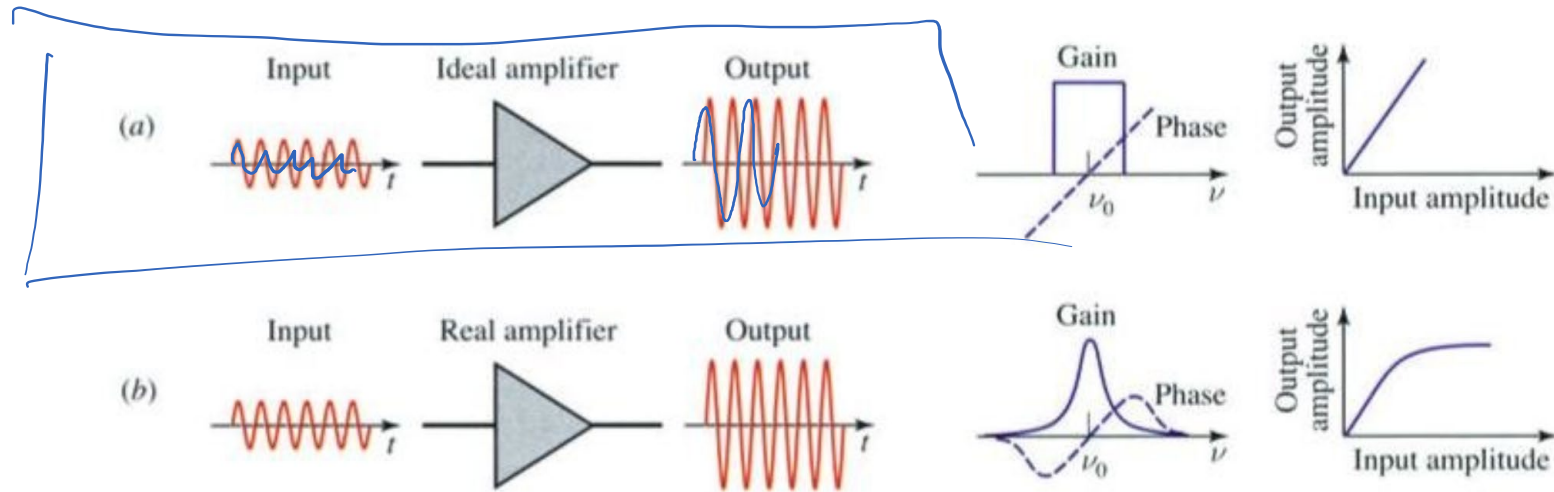
- L'absorption et l'émission stimulée participent au processus d'amplification laser cohérent, pas l'émission spontanée
- $N_1 W_i$ photons absorbés et $N_2 W_i$ photons produits par émission stimulée.
Bilan: $(N_2 - N_1) W_i = N W_i$ photons produits
- N positif: inversion de population
(ne se produit pas sans pompage)
- $N=0$ pas d'interaction, milieu transparent
- $N < 0$ négatif: absorption



Amplification laser

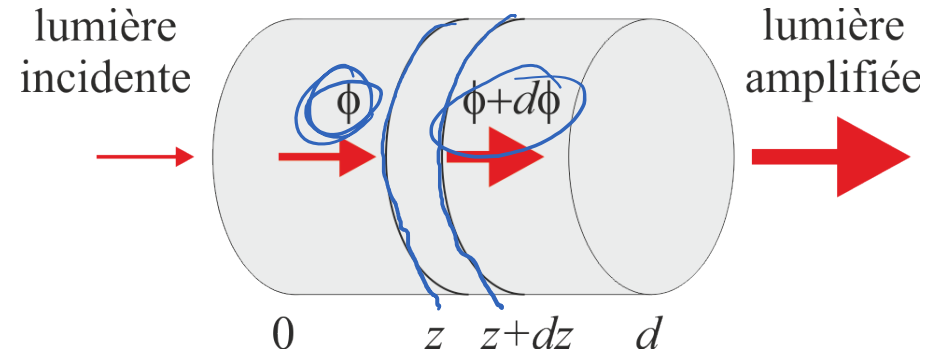


- On souhaite amplifier la lumière tout en gardant la phase du signal original
- Amplificateur idéal ou amplificateur réel:



Saleh & Teich

Amplification laser



- Augmentation de la densité de photons sur une épaisseur dz : $d\phi = NW_i dz$

$$\phi(z) = \phi(0) \exp(\gamma(\nu)z)$$

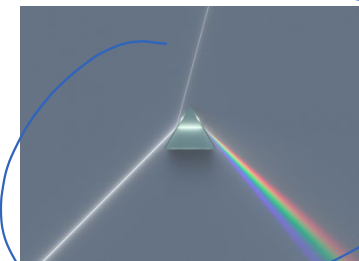
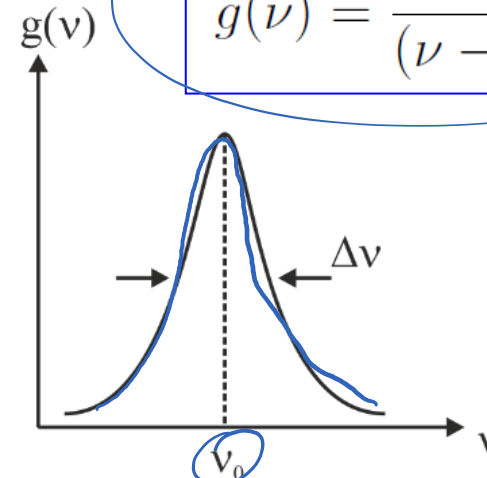
- Coefficient de gain $\gamma(\nu) = N\sigma(\nu) = N \frac{\lambda^2}{8\pi t_{sp}} g(\nu)$

- Section efficace, largeur de ligne (forme Lorentzienne)

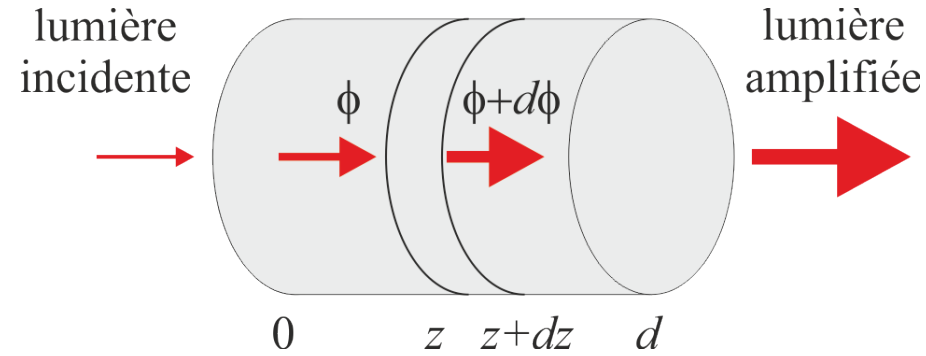
- Le coefficient de gain dépend de la fréquence!

- On a un milieu dispersif!

$$g(\nu) = \frac{\Delta\nu/2\pi}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Delta\nu/2)^2}$$



Amplification laser



$$\phi \sim \frac{I}{h\nu}$$

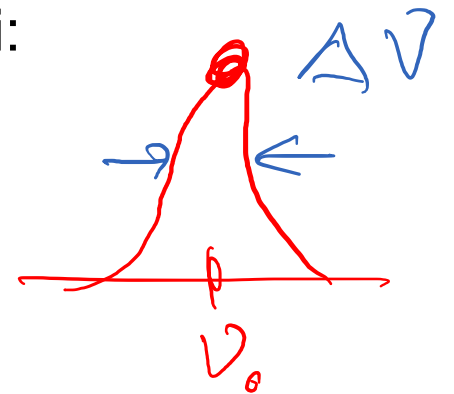
- Evolution de la densité de photons et de l'intensité

$$\underline{\phi(z)} = \phi(0) \exp(\gamma(\nu)z) \quad I(z) = I(0) \exp(\gamma(\nu)z)$$

- Gain total (pour la longueur d): $G(\nu) = \exp(\gamma(\nu)d)$
- Si la ligne spectrale est Lorentzienne, le coefficient de gain l'est aussi:

$$\gamma(\nu) = \gamma(\nu_0) \frac{(\Delta\nu/2)^2}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Delta\nu/2)^2}$$

- Gain pour la fréquence centrale: $\gamma(\nu_0) = N(\lambda^2/4\pi^2 t_{sp} \Delta\nu)$

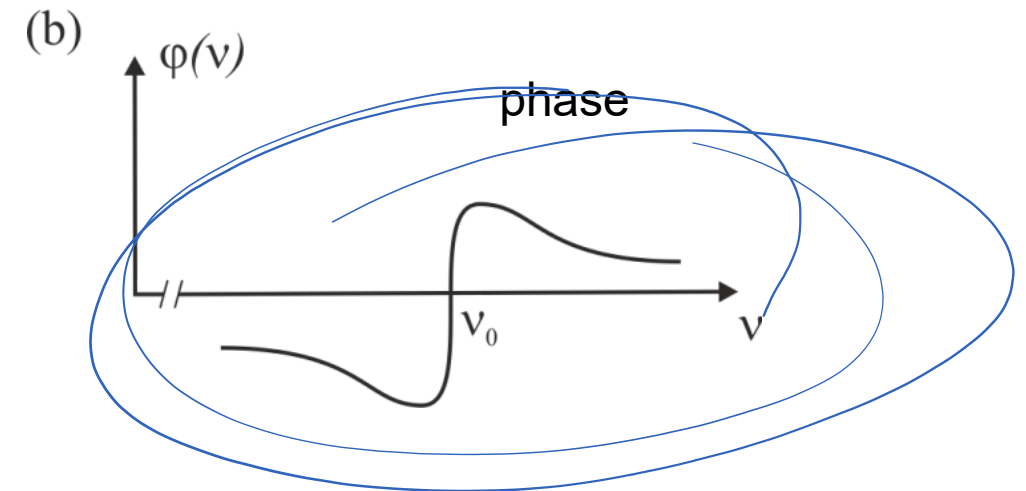
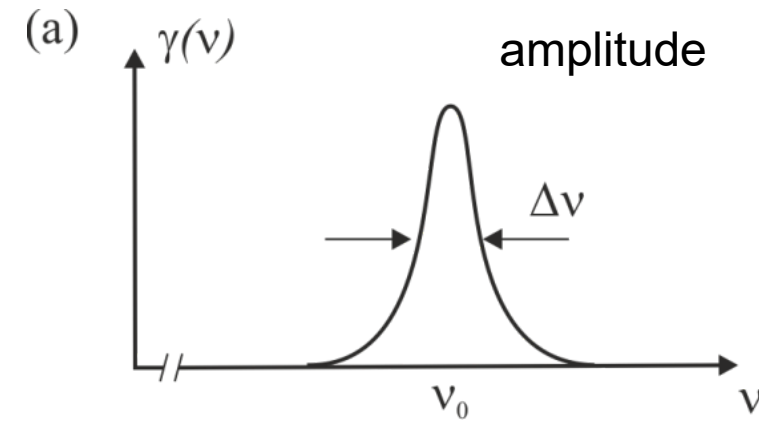
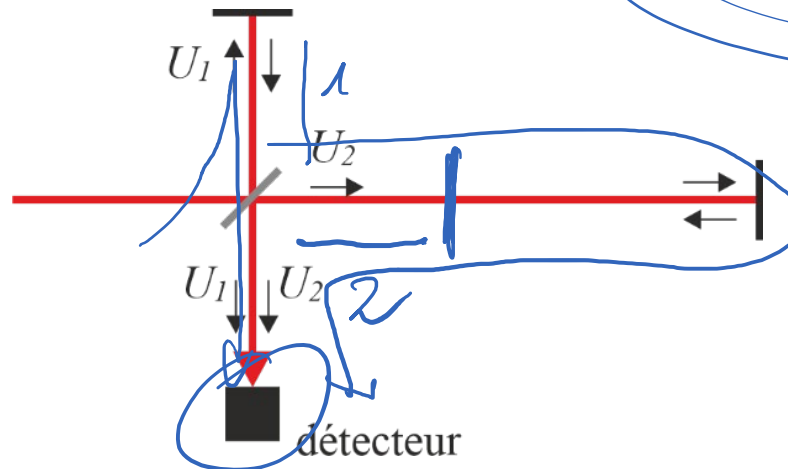
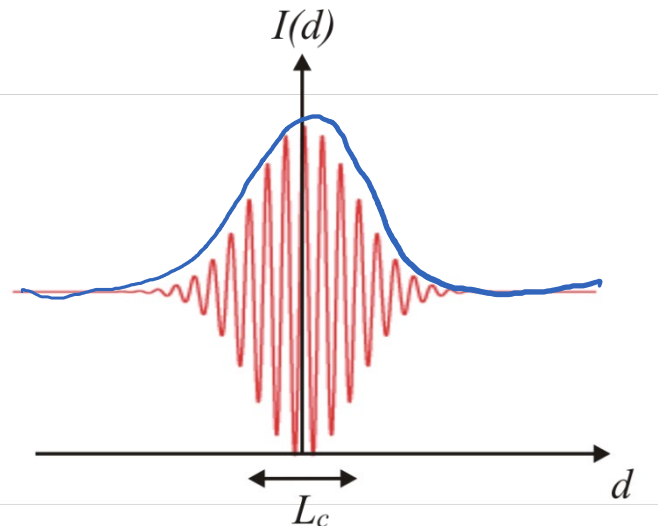


Amplification laser

- En plus de voir son amplitude varier à cause du milieu amplifiant, l'onde dans la cavité voit aussi sa phase varier (le milieu est dispersif):

$$\varphi(\nu) = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu} \gamma(\nu)$$

- Cet effet limite la cohérence:



Ingénierie optique

Semaine 12 – partie 3

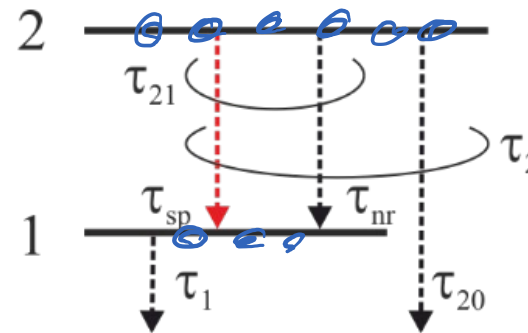
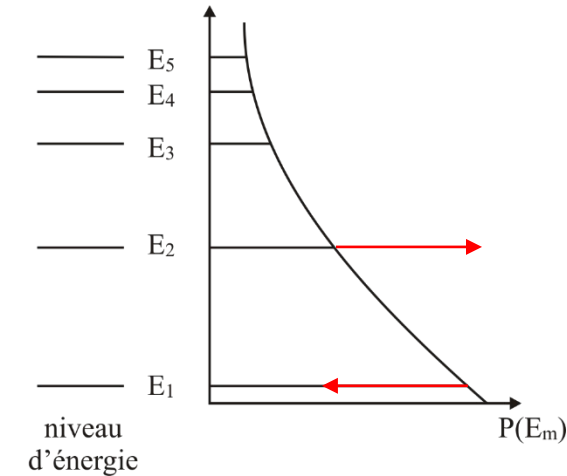
Olivier J.F. Martin
Laboratoire de Nanophotonique et Métrologie



$$[\tau] = \text{s}$$

Rate equations

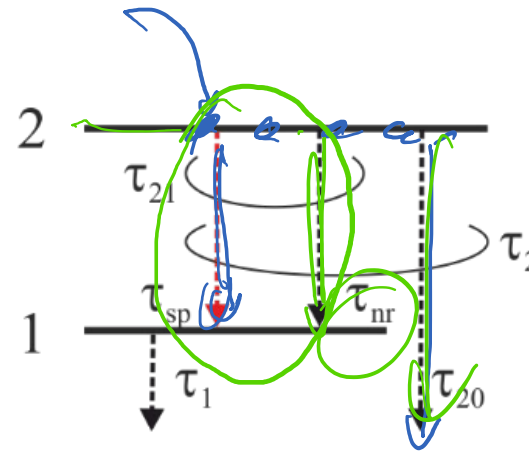
- On souhaite suivre l'évolution dans le temps des populations des niveaux 1 et 2
- Le lasage nécessite une inversion de population
- Il faut maintenir dans le temps $N = N_2 - N_1 > 0$ entre ces populations
- On se concentre sur les niveaux 1 et 2
- D'abord on ne considère pas la présence de lumière (pas d'absorption, pas d'émission stimulée)



$$[\tau] = \text{s}$$

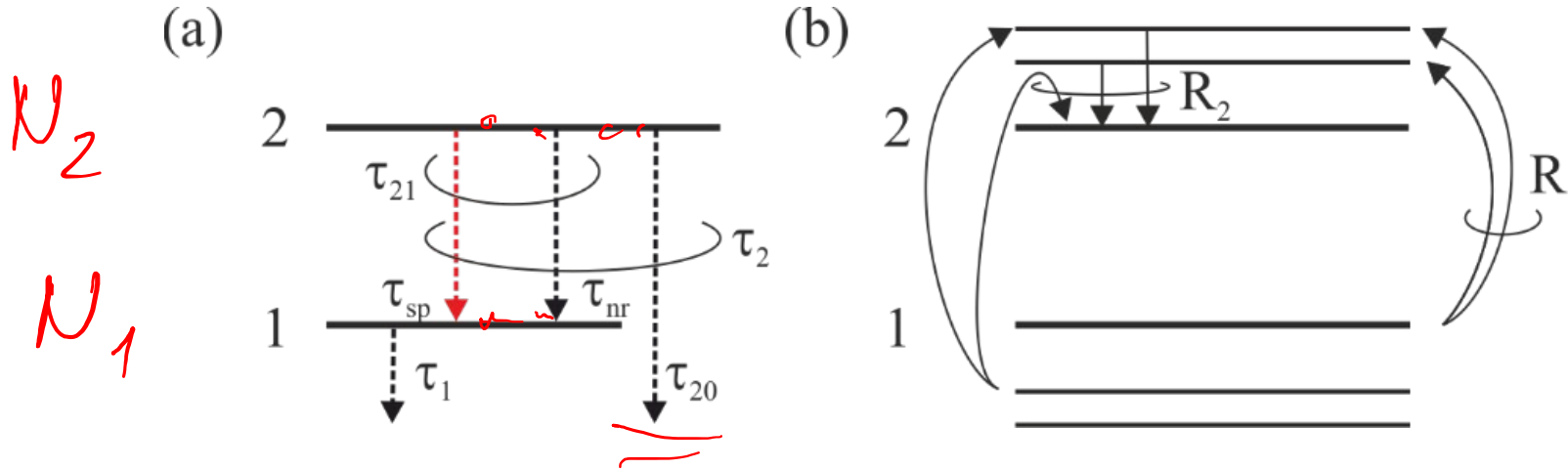
Rate equations

- Ce sont les taux $[\text{s}^{-1}]$ que l'on additionne, pas les durées de vie $[\text{s}]$
- Pour le niveau 2 on a globalement $\tau_2^{-1} = \tau_{21}^{-1} + \tau_{20}^{-1}$ et $\tau_{21}^{-1} = \tau_{sp}^{-1} + \tau_{nr}^{-1}$
- Si au départ les occupations des niveaux sont N_1 et N_2 , le système va se désexciter progressivement en suivant les durées de vie τ_1 et τ_2
- On peut atteindre un état d'équilibre pour les populations des niveaux 1 et 2 en amenant des électrons vers le niveau 2 et en enlevant des électrons du niveau 1



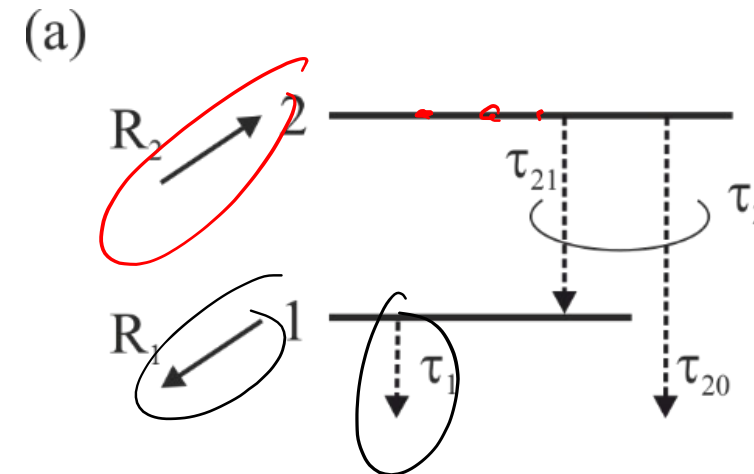
Rate equations

$$[\tau] = \text{s}$$



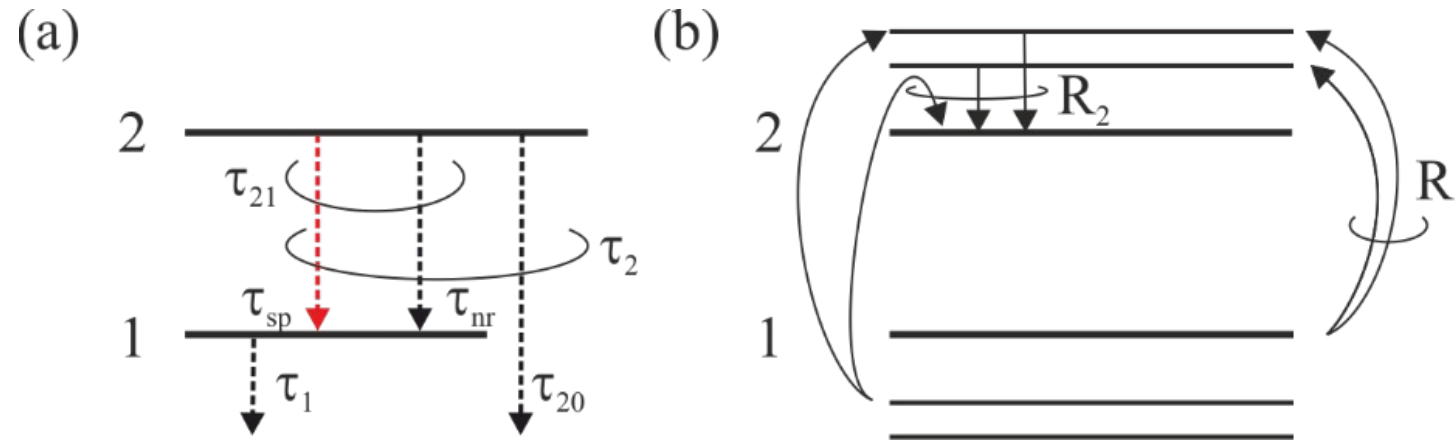
- On peut atteindre un état d'équilibre pour les populations des niveaux 1 et 2 en amenant des électrons vers le niveau 2 et en enlevant des électrons du niveau 1

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt} &= R_2 - \frac{N_2}{\tau_2} \\ \frac{dN_1}{dt} &= -R_1 - \frac{N_1}{\tau_1} + \frac{N_2}{\tau_{21}} \end{aligned}$$



Rate equations

$$[\tau] = \text{s}$$

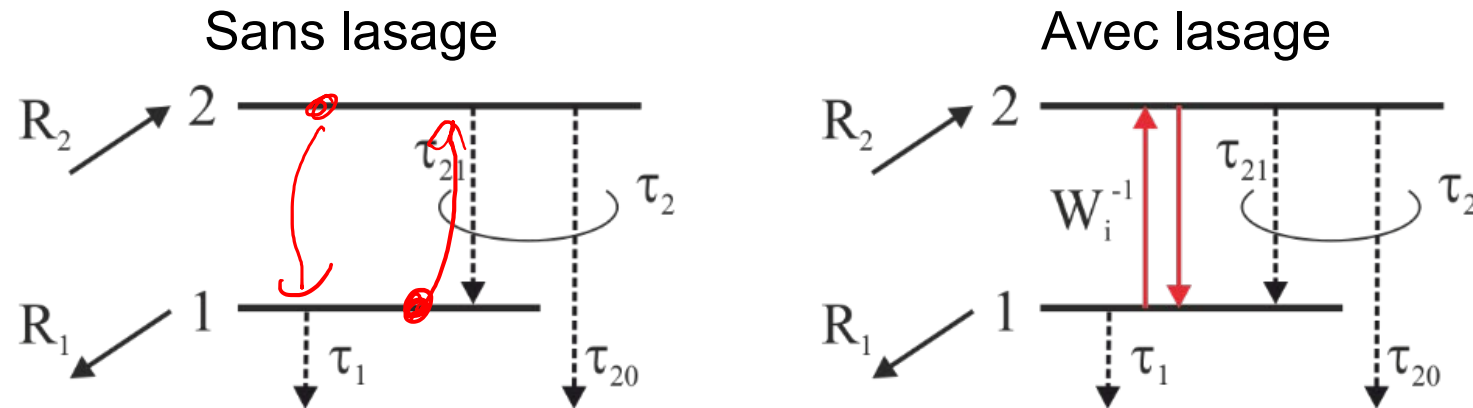


- A l'équilibre $dN_1/dt = dN_2/dt = 0$ on obtient la différence de populations $N_0 = N_{\text{equilibre}} = N_2 - N_1$

$$N_0 = R_2 \tau_2 \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_{21}} \right) + R_1 \tau_1$$

- A l'équilibre, on peut atteindre une grande différence de populations si le niveau deux est pompé de façon intense (R_1 et R_2 grands)

Rate equations – Bilan des taux d'occupation des niveaux



- Avec absorption et émission stimulée:

$$[W_i] = \text{s}^{-1}$$

$$[\tau] = \text{s}$$

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt} &= R_2 - \frac{N_2}{\tau_2} - N_2 W_i + N_1 W_i \\ \frac{dN_1}{dt} &= -R_1 - \frac{N_1}{\tau_1} + \frac{N_2}{\tau_{21}} + N_2 W_i - N_1 W_i \end{aligned}$$

- A l'équilibre: ($N < N_0$)

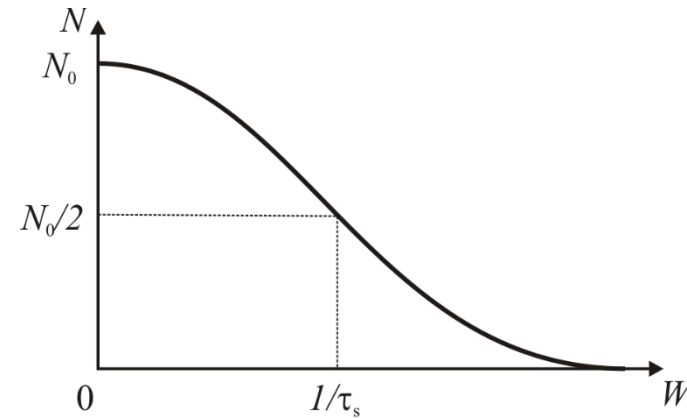
$$N = \left(\frac{N_0}{1 + \tau_s W_i} \right)$$

Rate equations

$$[W_i] = \text{s}^{-1}$$

$$[\tau] = \text{s}$$

$$N_2 - N_1$$



- La différence de population diminue en présence de radiation (avec émission stimulée et absorption)
- Lorsque l'interaction entre les deux niveaux augmente (W_i grand), alors $N \rightarrow 0$ et il ne peut plus y avoir de lasage
- τ_s représente la constante de temps de saturation et joue un rôle important dans la dynamique du laser