

Ingénierie optique

Semaine 5 – partie 1

Olivier J.F. Martin
Laboratoire de Nanophotonique et Métrologie

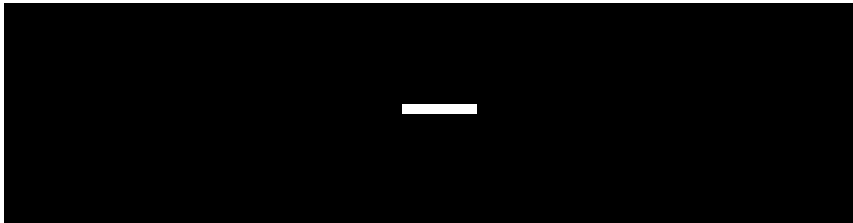


Diffraction et optique de Fourier

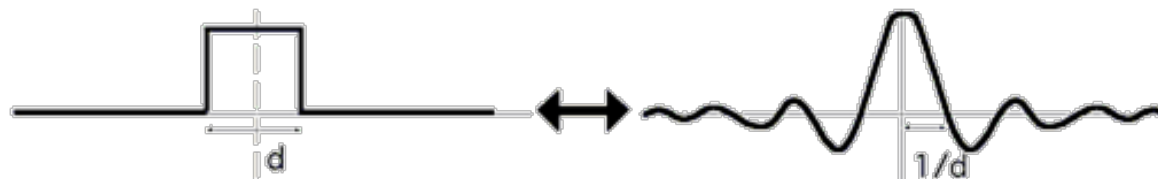
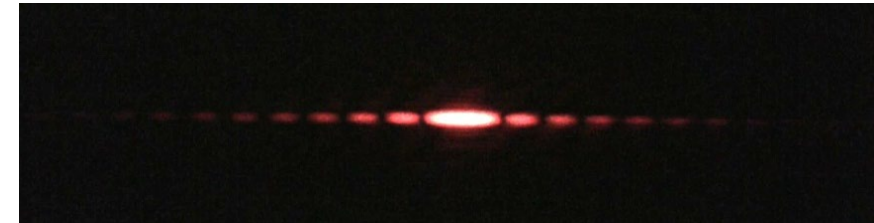
- Théorie scalaire
- Principe de Huygens
- Intégrale de Rayleigh-Sommerfeld
- Optique de Fourier
- Imagerie, système $4f$
- Réseaux de diffraction

Diffraction par une fente:

Optique géométrique

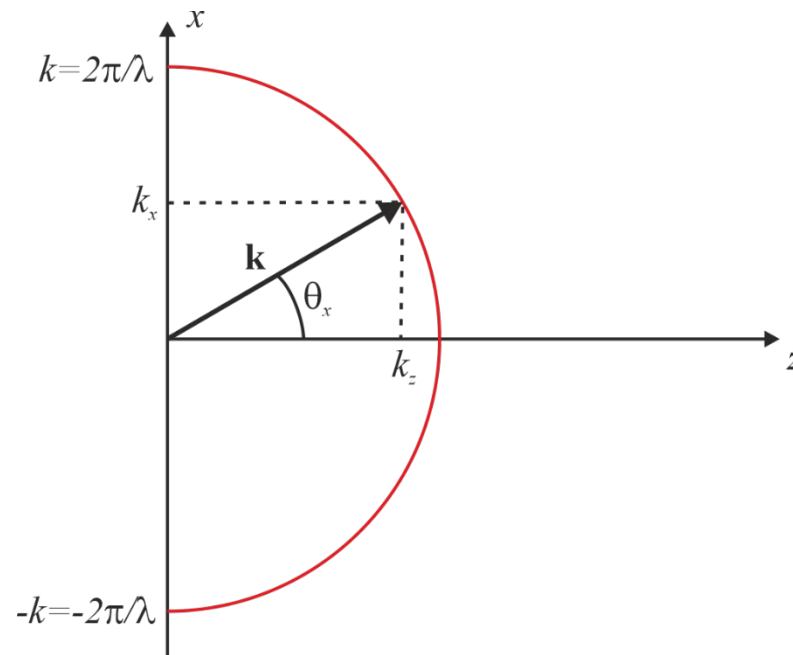


Diffraction, optique de Fourier



Optique de Fourier

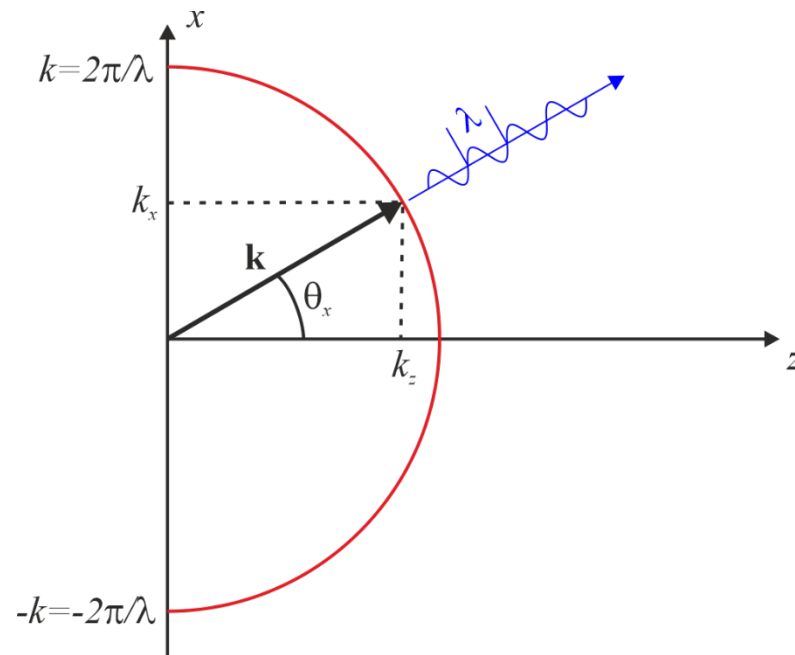
- Pour bien comprendre l'optique de Fourier, il faut saisir quelques subtilités de la propagation d'une onde plane!
- Le vecteur d'onde a une longueur qui dépend de la fréquence $\|\mathbf{k}\| = k = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c_0} n = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n$
- Si une onde se propage de gauche à droite, l'extrémité de son vecteur d'onde doit se trouver sur un cercle de rayon k :



- Le vecteur $\mathbf{k}$ a deux composantes k_z (direction de propagation) et k_x (transverse)

Optique de Fourier

- De plus, une onde qui se propage dans la direction $\mathbf{k}$ est périodique dans cette direction (avec une périodicité λ)

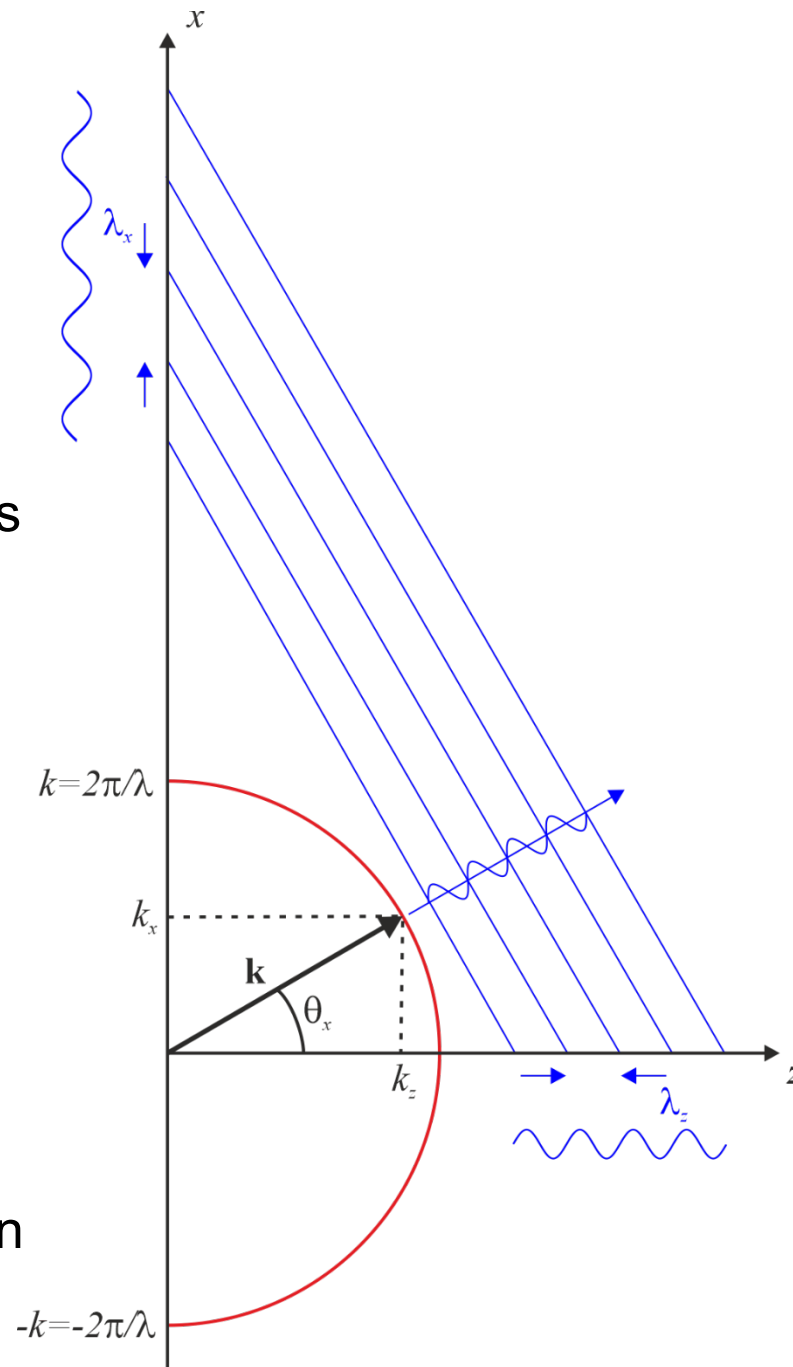


Optique de Fourier

- En prolongeant les fronts d'onde jusqu'aux axes, on note des périodicités λ_z et λ_x le long de chaque direction
- Ces périodicités sont associées aux composantes du vecteur de propagation:

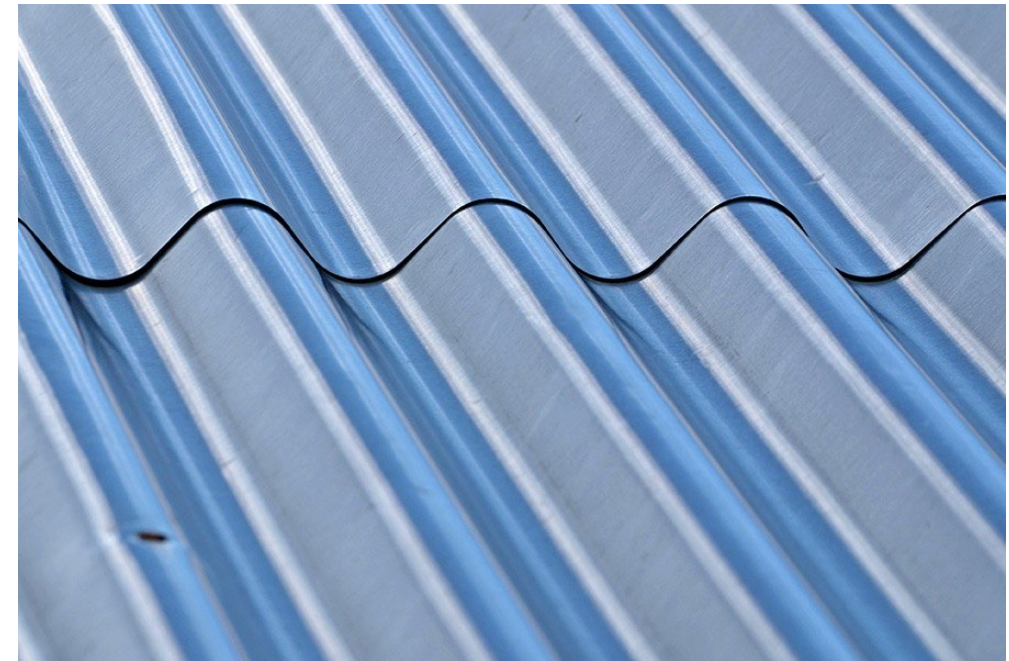
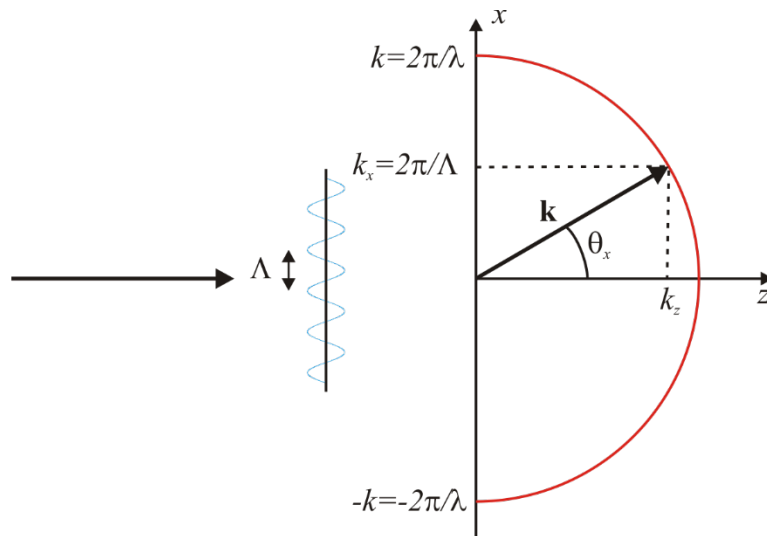
$$k_z = \frac{2\pi}{\lambda_z} \quad k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x}$$

- Grande composante $k \rightarrow$ petite période et inversement
- On peut introduire des ondes partielles dans chaque direction



Optique de Fourier

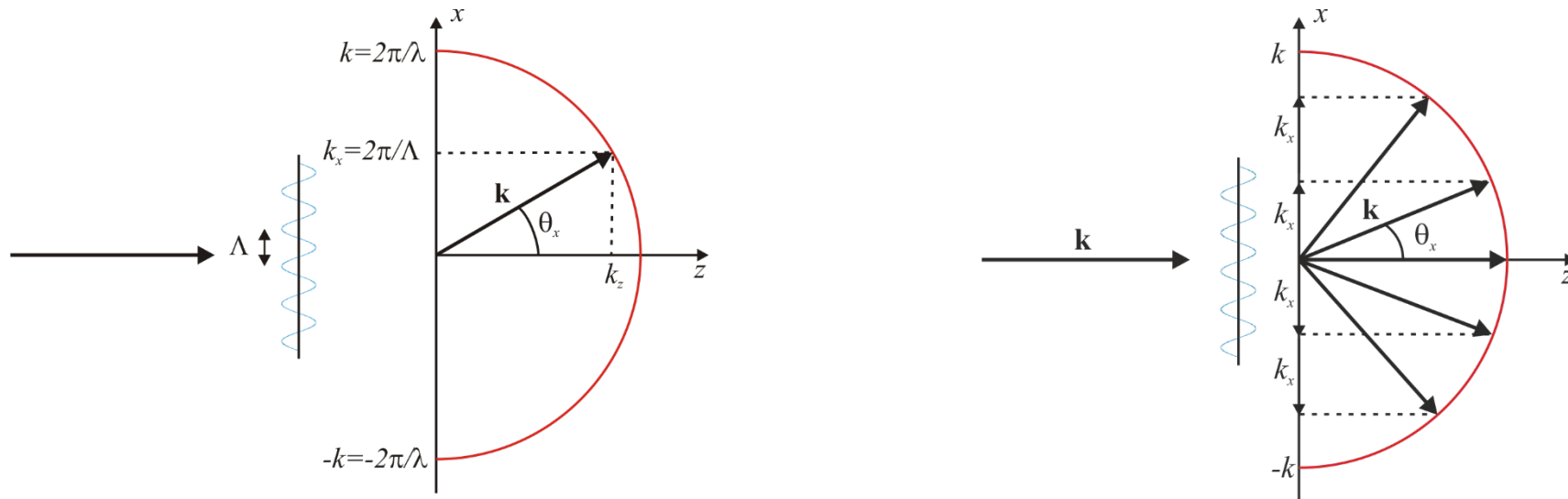
- En résumé, une onde se propageant dans une direction donnée a une composante transverse k_x de son vecteur d'onde, qui correspond à une périodicité transverse λ_x : $k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x}$
- Un phénomène similaire se produit lorsqu'une onde arrive sur une surface périodique de période Λ : son vecteur d'onde acquiert une composante transverse k_x qui dépend de la périodicité : $k_x = \frac{2\pi}{\Lambda}$



Great Northern Metal Company

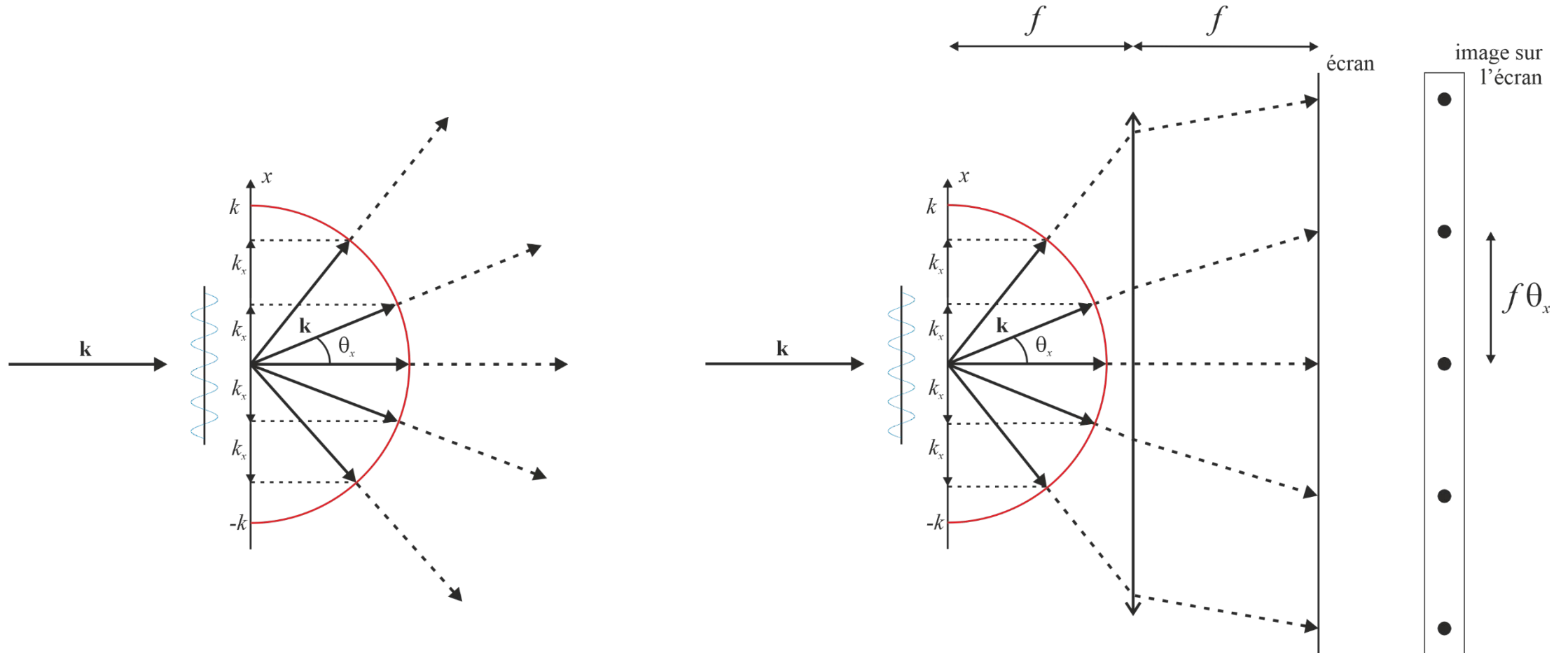
Optique de Fourier

- En résumé, une onde se propageant dans une direction donnée a une composante transverse k_x de son vecteur d'onde, qui correspond à une périodicité transverse λ_x : $k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x}$
- Un phénomène similaire se produit lorsqu'une onde arrive sur une surface périodique de période Λ : son vecteur d'onde acquiert une composante transverse k_x qui dépend de la périodicité : $k_x = \frac{2\pi}{\Lambda}$
- En fait, une multitude d'ondes diffractées sont ainsi créées, avec chacune un multiple de k_x comme composante transverse du vecteur de propagation $\mathbf{k}$ (qui reste sur le cercle!)



Optique de Fourier

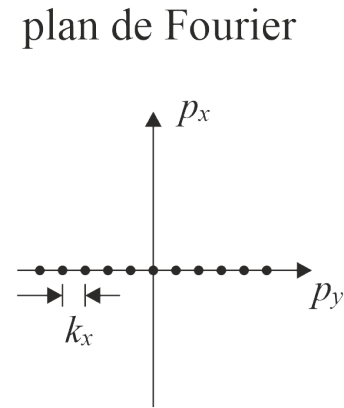
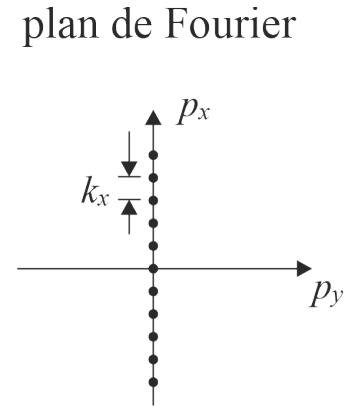
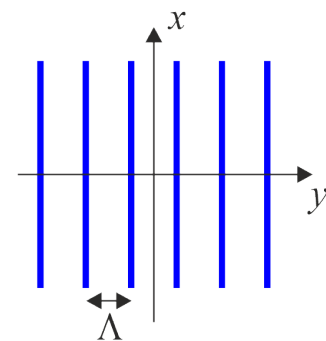
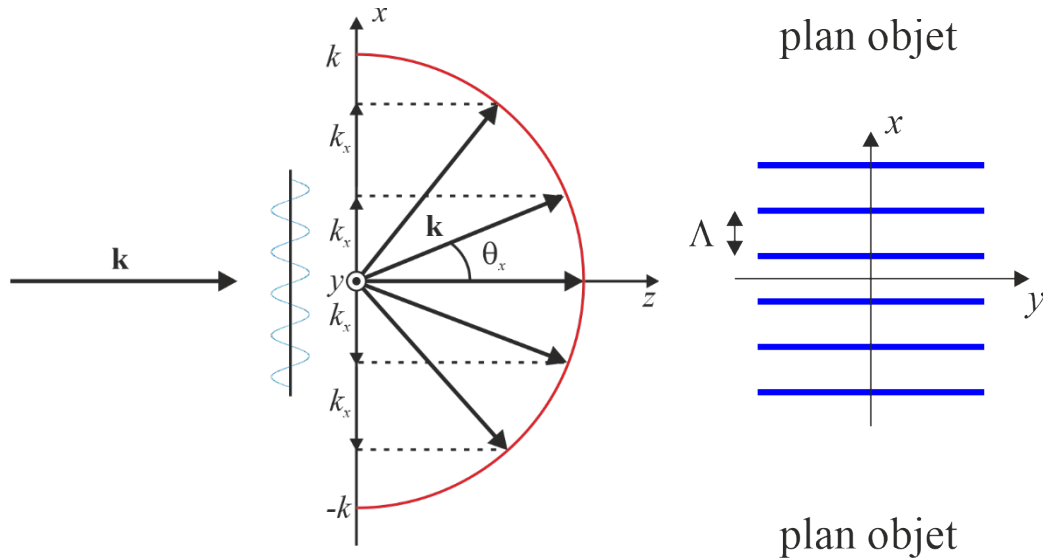
- Toutes ces ondes divergent...
- Une lentille permet de les aligner dans un plan
- On obtient sur l'écran des points qui correspondent à la périodicité de la surface



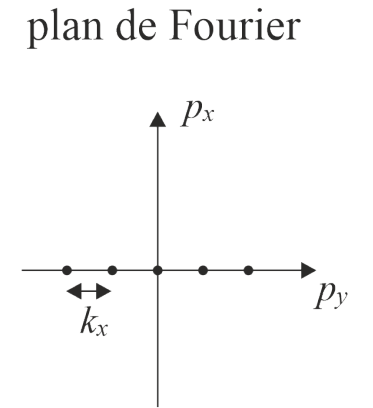
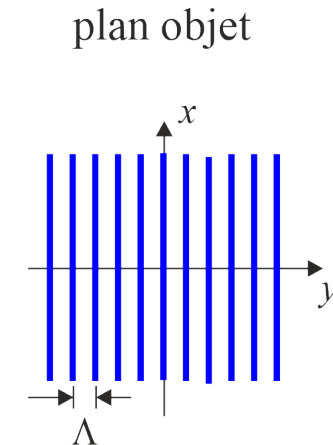
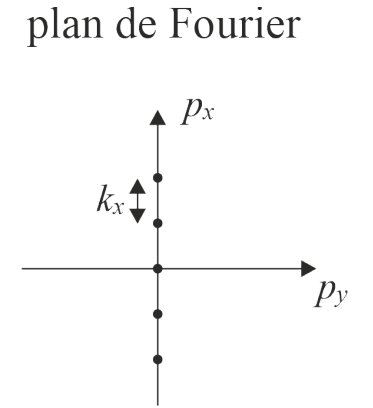
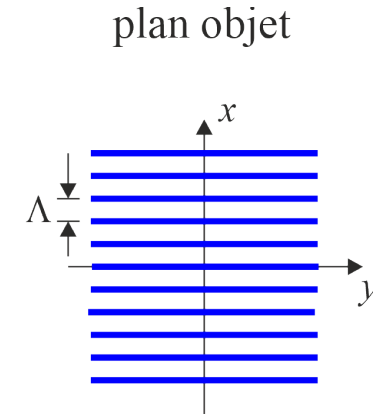
Transformée de Fourier avec une lentille, système $4f$

- Exemples d'images dans le plan de Fourier

- Vue de côté:



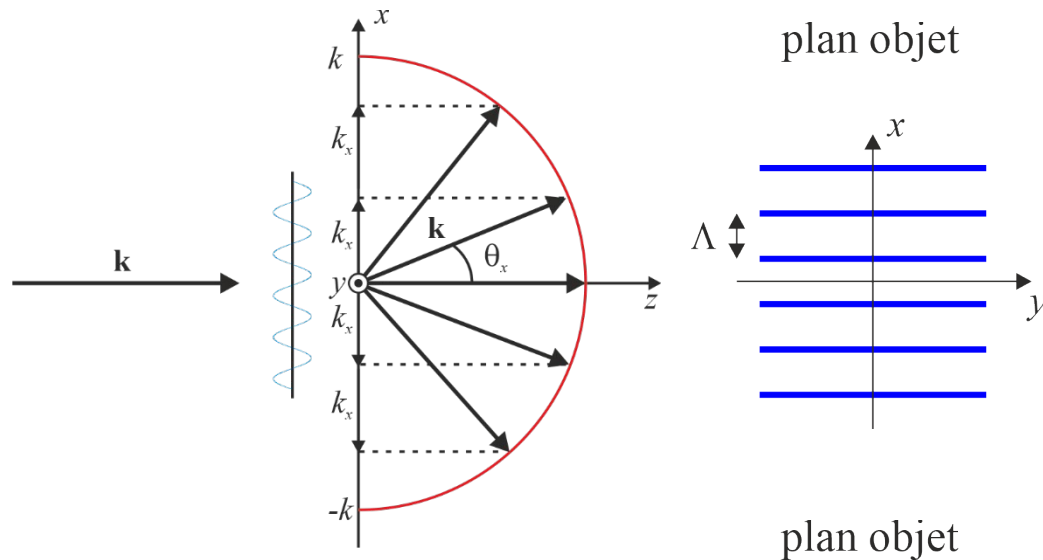
- Vue de derrière:



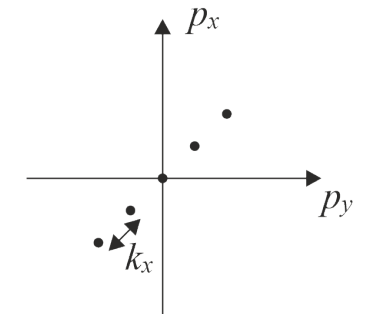
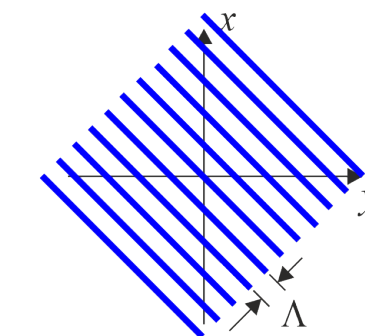
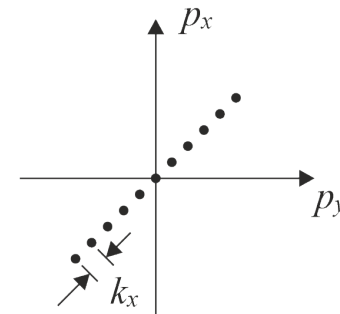
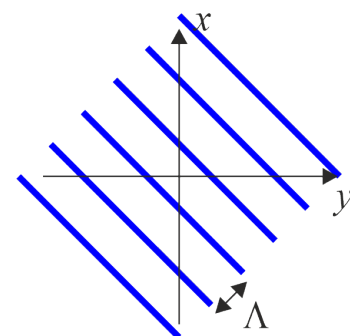
Transformée de Fourier avec une lentille, système $4f$

- Exemples d'images dans le plan de Fourier

- Vue de côté:

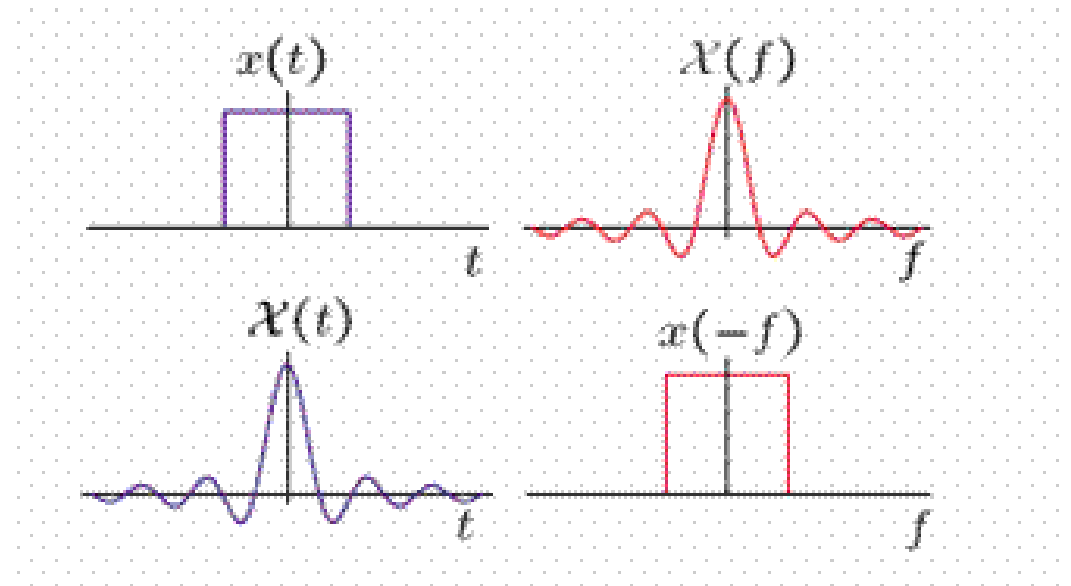
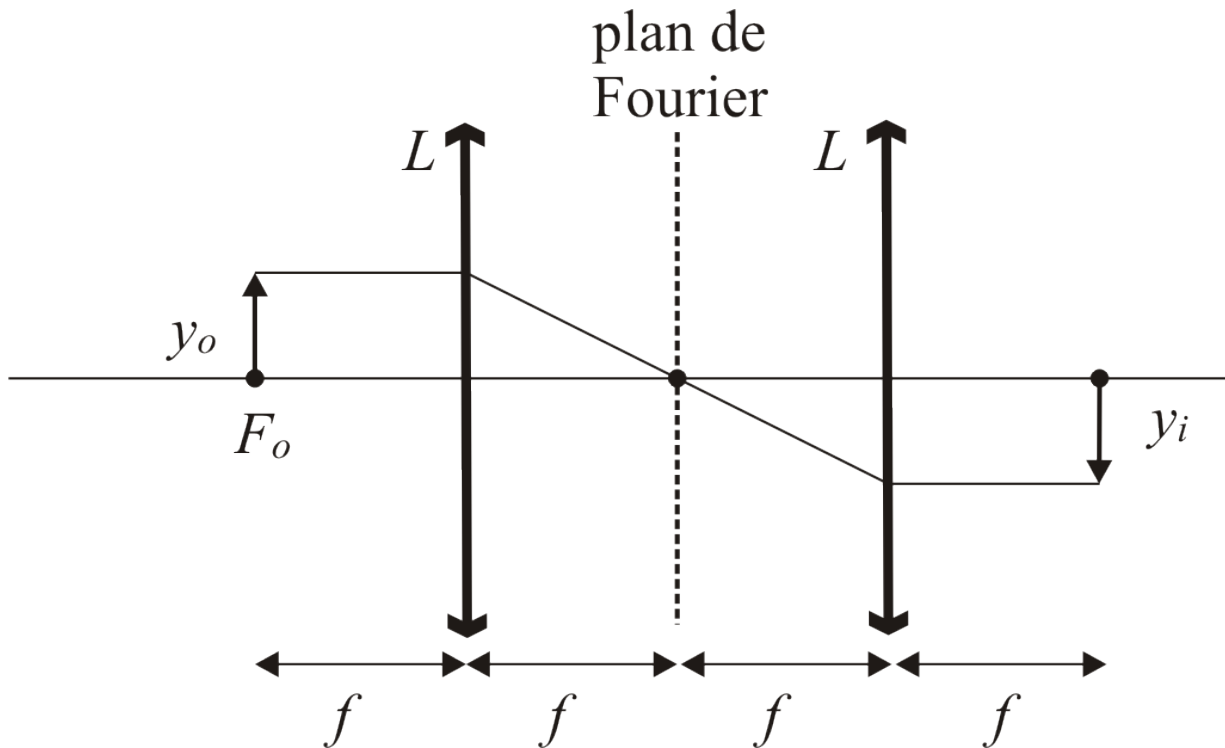


- Vue de derrière:

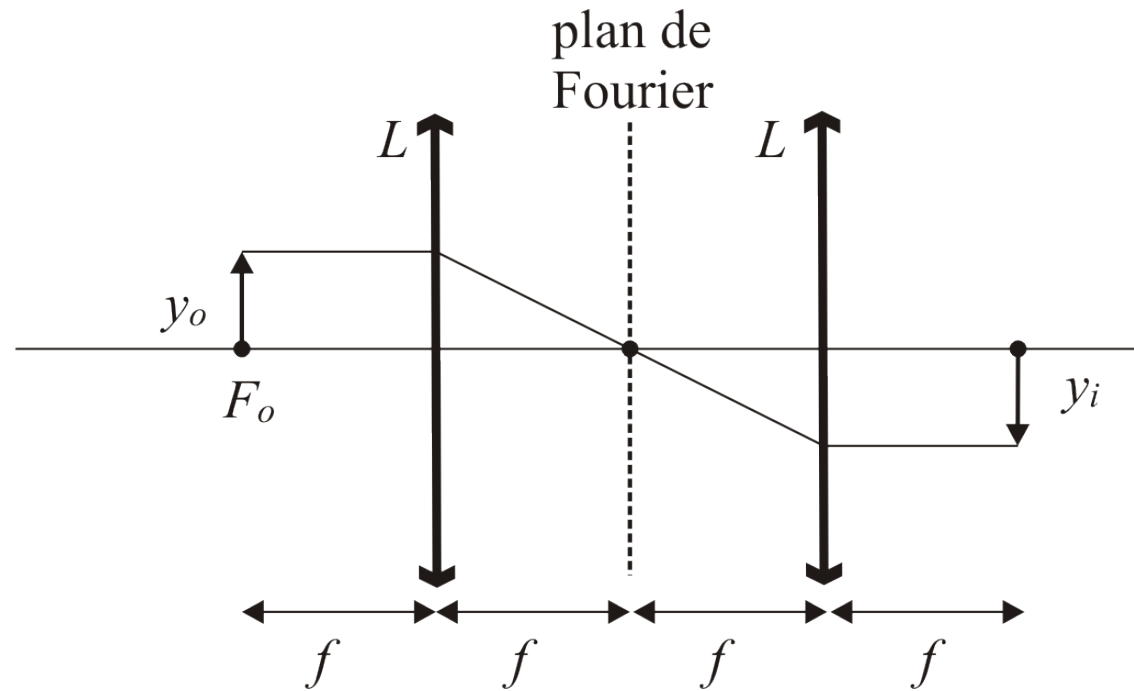


Transformée de Fourier avec une lentille, système $4f$

- Une lentille fait la transformée de Fourier d'une image, elle permet de visualiser les fréquences spatiales de l'image
- En faisant deux transformées de Fourier successives, on obtient l'objet initial (au signe près...)



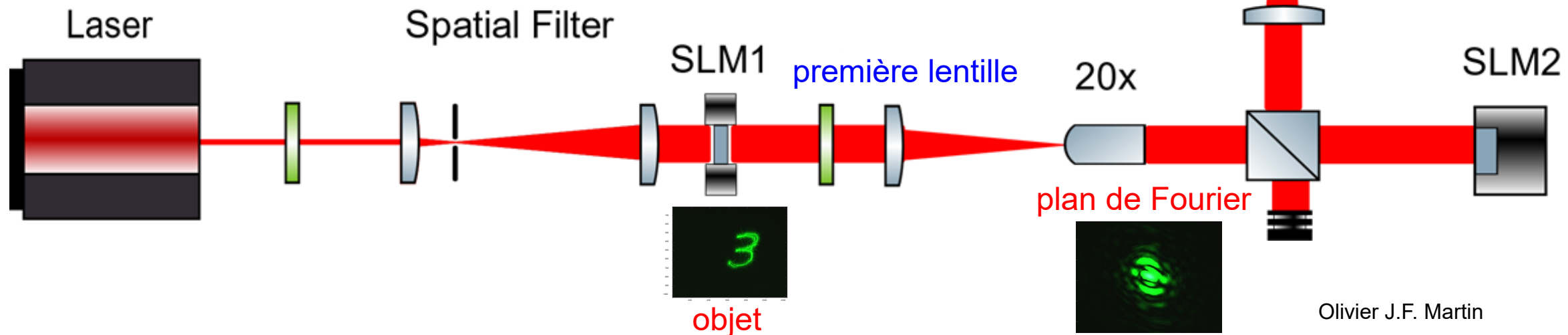
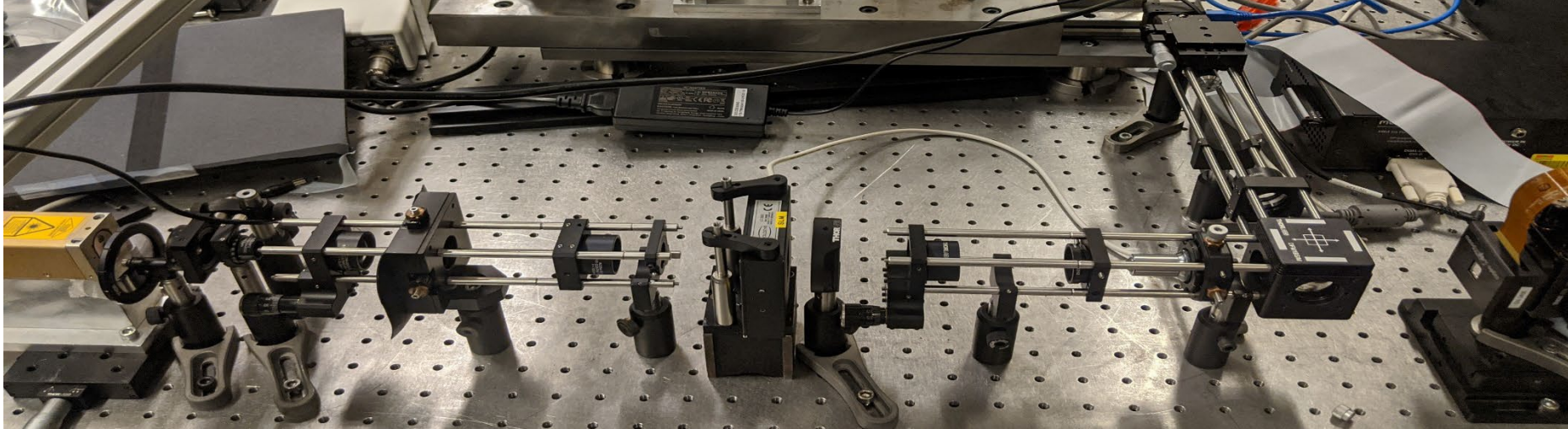
Transformée de Fourier avec une lentille, système $4f$



- Dans un système $4f$ toutes les distances correspondent à la longueur focale f
- Ce système permet d'accéder au plan de Fourier de l'objet
- On peut y effectuer du filtrage, en enlevant des composantes particulières du spectre

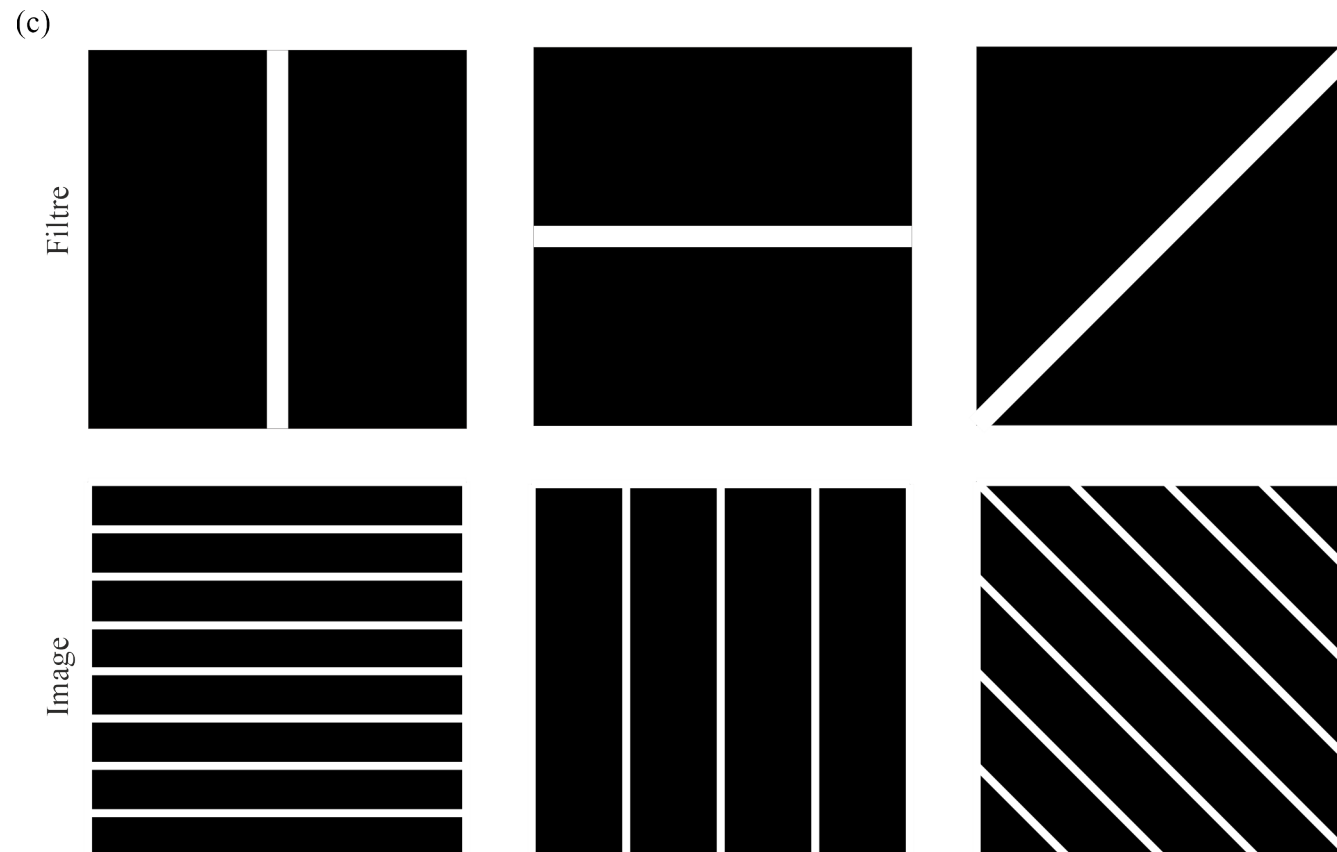
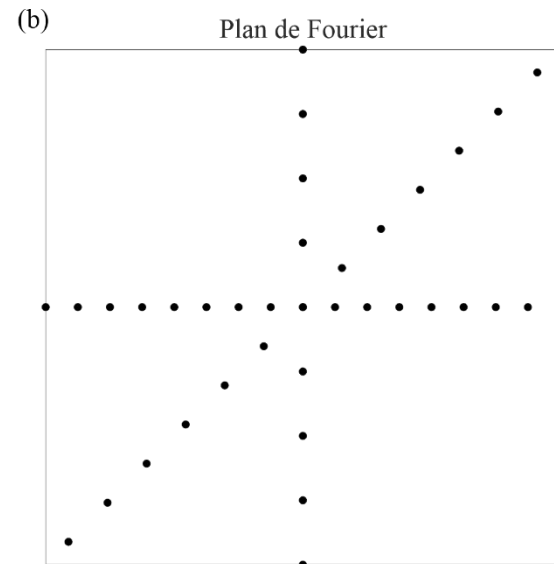
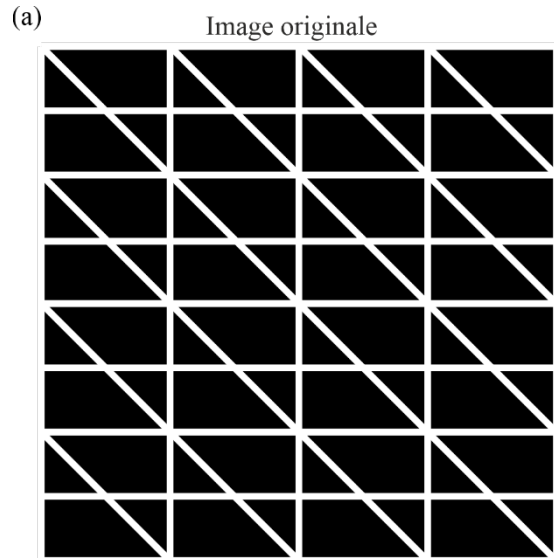
Transformée de Fourier avec une lentille, système $4f$

- Dans la pratique, l'arrangement est rarement rectiligne
- Une lentille supplémentaire permet d'accéder directement au plan de Fourier



Filtrage dans le plan de Fourier avec un système $4f$

- Pour une image périodique, l'image dans le plan de Fourier est aussi périodique
- Rapport des distances inverse entre image et plan de Fourier
- Des filtres qui ne laissent passer qu'une partie du plan de Fourier permettent de ne voir que la partie correspondante de l'image



Ingénierie optique

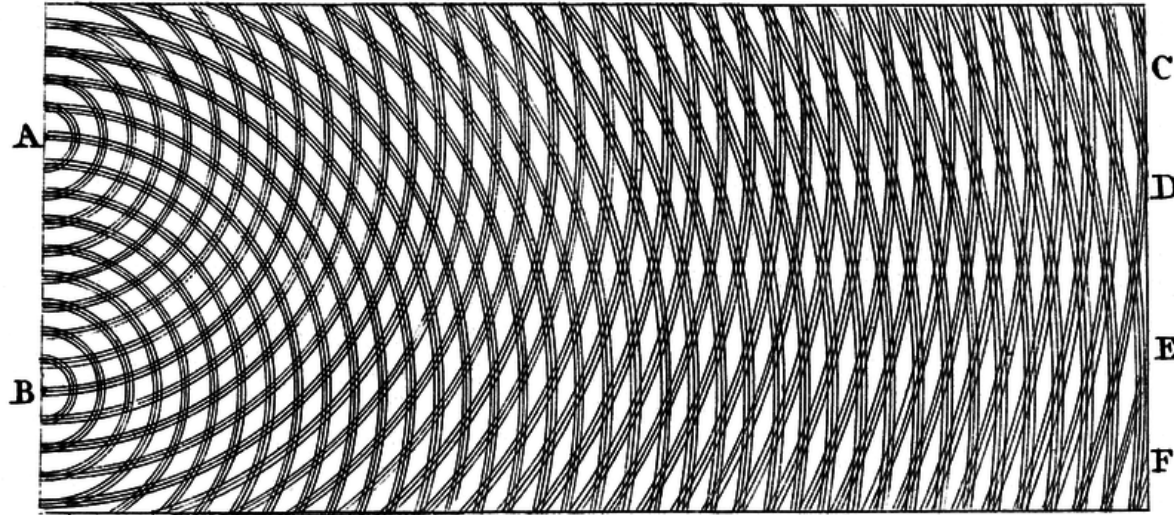
Semaine 5 – partie 2

Olivier J.F. Martin
Laboratoire de Nanophotonique et Métrologie



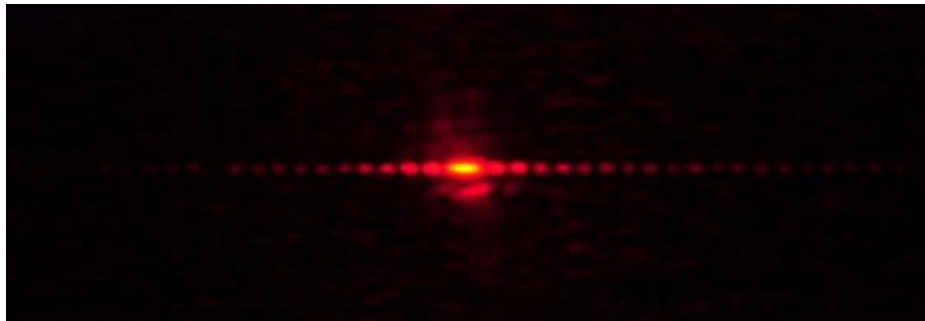
Détour par la diffraction

- La diffraction est une autre façon d'appréhender l'optique de Fourier



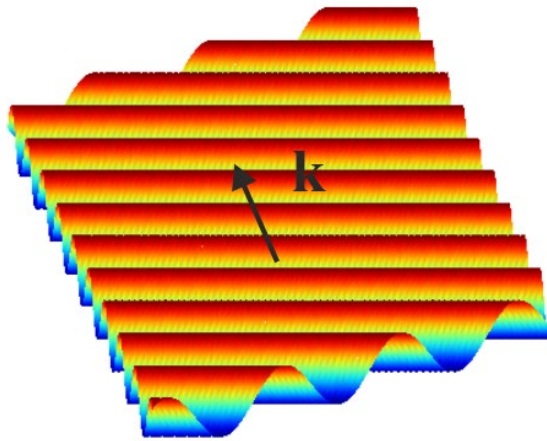
Dessin original de Thomas Yung pour la diffraction par deux fentes

- Diffraction par une fente et par une ouverture carrée:



Onde plane harmonique

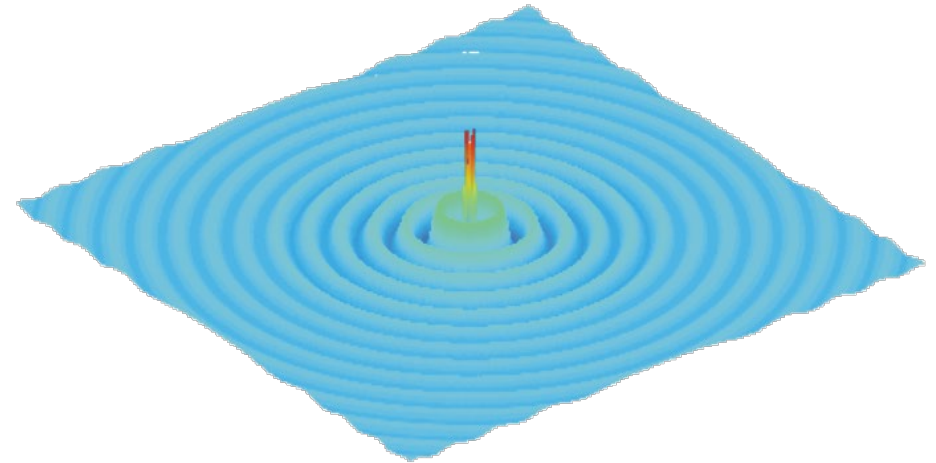
$$U(\mathbf{r}, t) = A e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{j\omega t}$$



- S'exprime en coordonnées cartésiennes
- S'étend à l'infini et a donc une énergie infinie!
- Onde rétrograde $U(\mathbf{r}, t) = A e^{+j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{j\omega t}$

Onde sphérique harmonique

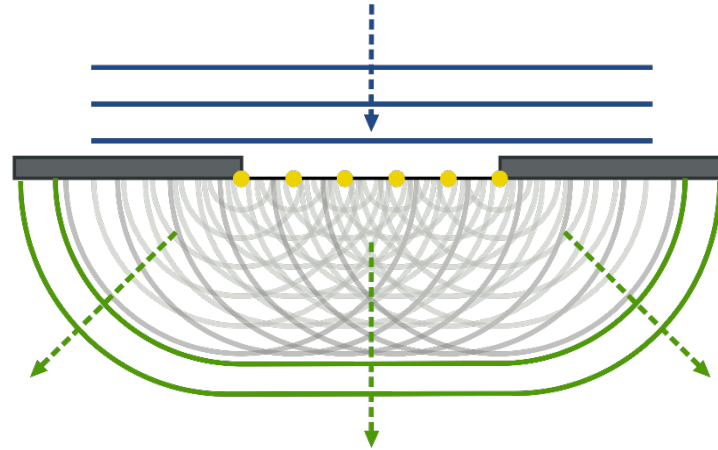
$$U(\mathbf{r}, t) = \frac{A}{\|\mathbf{r}\|} e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{j\omega t}$$



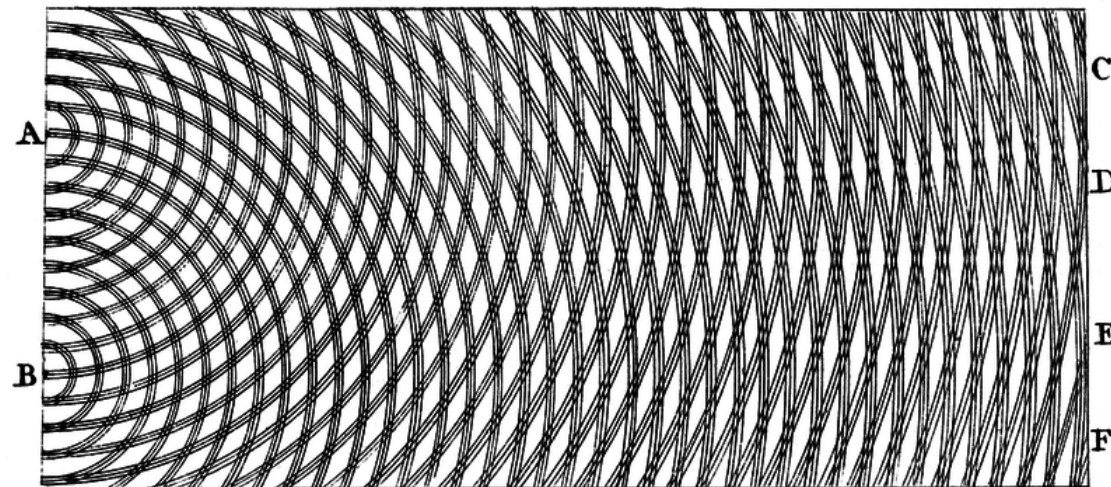
- S'exprime en coordonnées sphériques
- Diverge à l'origine!
- Intensité décroît avec le carré de la distance
- Onde entrante $U(\mathbf{r}, t) = \frac{A}{\|\mathbf{r}\|} e^{+j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{j\omega t}$

Principe de Huygens

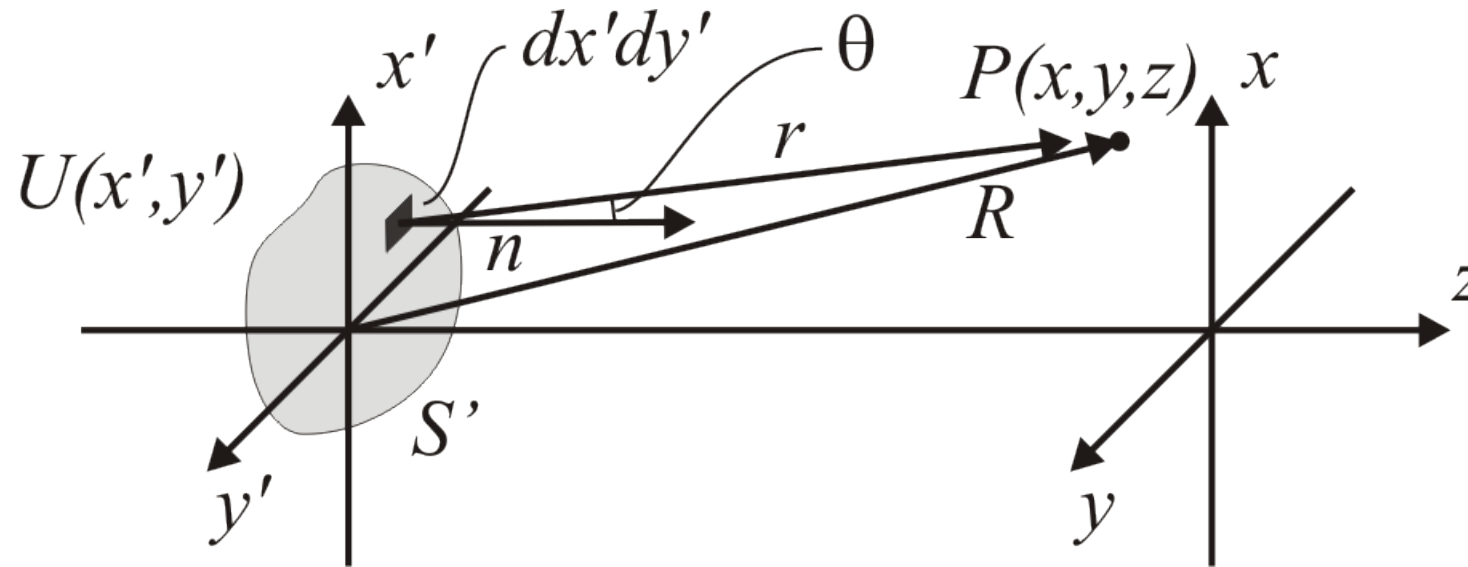
- Chaque partie de l'ouverture est une source d'ondelettes sphériques qui interfèrent



- Se généralise à plusieurs ouvertures (dessin original de Thomas Yung pour la diffraction par deux fentes):



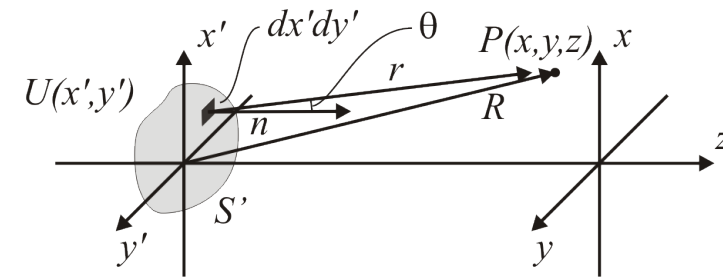
Diffraction – Intégrale de Rayleigh-Sommerfeld



- Calcul général de l'onde transmise par une ouverture S'
- Somme (intégrale) des contributions (ondelettes sphériques) émises par chaque élément de surface $dx'dy'$ et se propageant jusqu'au point $P(x, y, z)$:

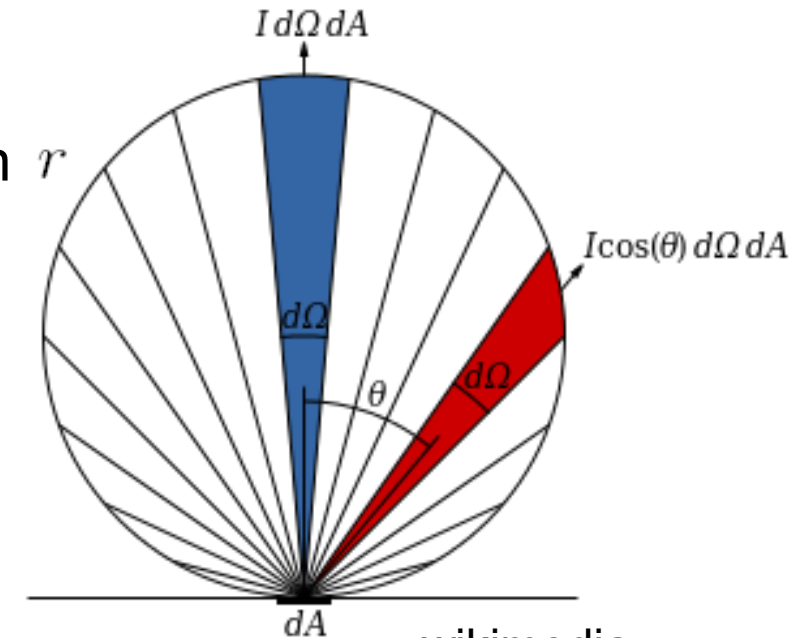
$$U(x, y, z) = \frac{1}{j\lambda} \int_{S'} U(x', y') \frac{e^{-jkr}}{r} \cos \theta dx' dy'$$

Intégrale de Rayleigh-Sommerfeld



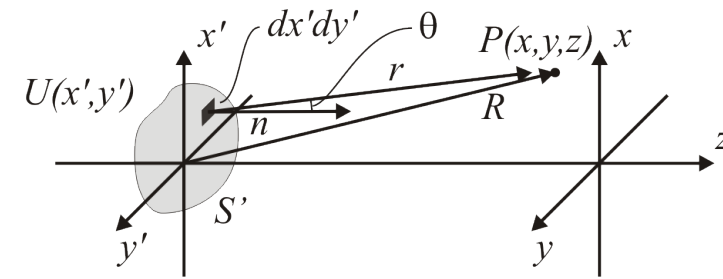
$$U(x, y, z) = \frac{1}{j\lambda} \int_{S'} U(x', y') \frac{e^{-jkr}}{r} \cos \theta dx' dy'$$

- Ouverture dans le plan $z = 0$
- En général, l'illumination est homogène: $U(x', y') = U_0$
- Projection de la surface S' dans la direction d'observation r
→ terme en $\cos \theta$ (émetteur Lambertien)
- La direction r repère la source $dx' dy'$
- La direction R repère le point d'observation
- Dépendance temporelle (harmonique) implicite
- En général $U(x, y, z)$ est incalculable analytiquement...!



wikimedia

Approximation de Fraunhofer



$$U(x, y, z) = \frac{1}{j\lambda} \int_{S'} U(x', y') \frac{e^{-jkr}}{r} \cos \theta dx' dy'$$

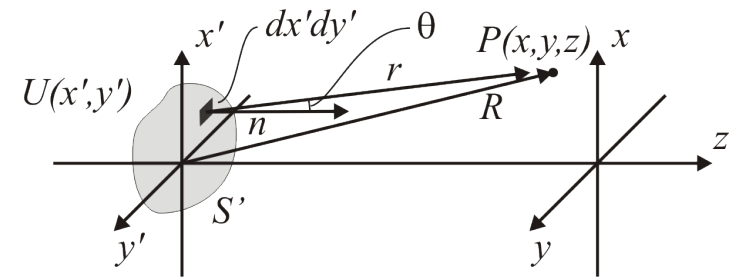
- Les termes en $1/r$ et $\cos \theta$ varient lentement comparés à la phase kr dans l'exponentielle
- On développe la distance:

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2} = z \sqrt{1 + \frac{(x - x')^2}{z^2} + \frac{(y - y')^2}{z^2}}$$

- On utilise le fait que z est grand par rapport à x et y
- On peut donc approximer (développement de Taylor):

$$\sqrt{1 + \epsilon} \simeq 1 + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{approximation de Fresnel}$$

Approximation de Fraunhofer



$$U(x, y, z) = \frac{1}{j\lambda} \int_{S'} U(x', y') \frac{e^{-jkr}}{r} \cos \theta dx' dy'$$

- Approximation de Fresnel pour l'exponentielle:

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2} = z \left[1 + \frac{1}{2z^2} ((x - x')^2 + (y - y')^2) \right]$$

- Avec $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$, on a finalement:

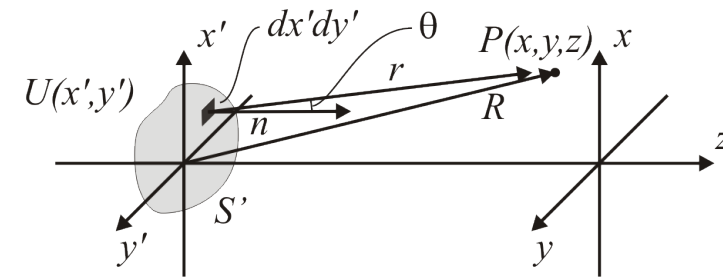
$$r = R \left[1 - \frac{xx' + yy'}{R^2} + \cancel{\frac{x'^2 + y'^2}{2R^2}} \right]$$

approximation de Fraunhofer

x', y' petits

Diffraction par une ouverture

- Intégrale de Rayleigh-Sommerfeld:



$$U(x, y, z) = \frac{1}{j\lambda} \int_{S'} U(x', y') \frac{e^{-jkr}}{r} \cos \theta dx' dy'$$

- Approximation de Fraunhofer:

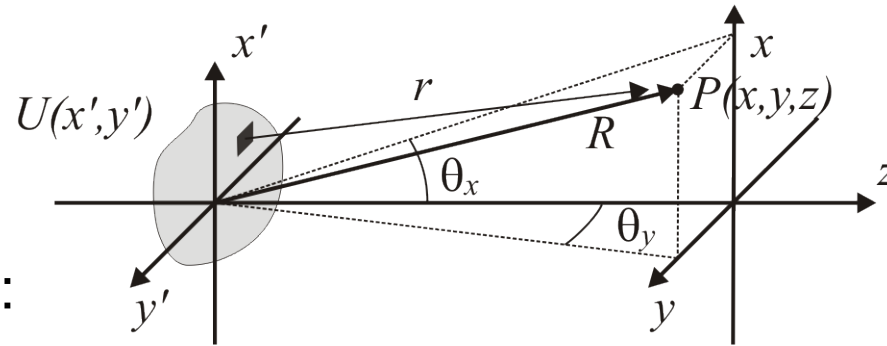
$$U(x, y, R) \simeq \frac{e^{-jkR}}{j\lambda R} \cos \theta \int_{S'} U(x', y') e^{jk \frac{xx' + yy'}{R}} dx' dy'$$

- Nombre de Fresnel $N = \frac{\rho^2}{\lambda z}$ (ρ "rayon maximal")
 - $N \ll 1$ ($\rho \ll \sqrt{\lambda z}$) Fraunhofer est valide
 - $N \simeq 1$ Fraunhofer n'est pas valide (utiliser Fresnel)
 - $N \rightarrow \infty$ optique géométrique ($\lambda \rightarrow 0$ ou $z \rightarrow 0$ ou $\rho \rightarrow \infty$)

Lien avec la transformée de Fourier

- On intègre maintenant dans tout l'espace (pas seulement l'ouverture):

$$U(x, y, R) = \frac{e^{-jkR}}{j\lambda R} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x', y') e^{j2\pi(p_x x' + p_y y')} dx' dy' \quad \cos \theta \simeq 1$$



- En introduisant les fréquences spatiales:

$$p_x = \frac{x}{\lambda R} = \frac{\sin \theta_x}{\lambda} \simeq \frac{\theta_x}{\lambda}$$
$$p_y = \frac{y}{\lambda R} = \frac{\sin \theta_y}{\lambda} \simeq \frac{\theta_y}{\lambda}.$$

- et en définissant la transformée de Fourier (densité spectrale):

$$U(p_x, p_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x', y') e^{j2\pi(p_x x' + p_y y')} dx' dy' = \mathcal{F} \{U(x', y')\}$$

- Le champ diffracté devient:
on observe donc la transformée de Fourier de l'image!

$$U(x, y, R) = \frac{e^{-jkR}}{j\lambda R} U(p_x, p_y)$$

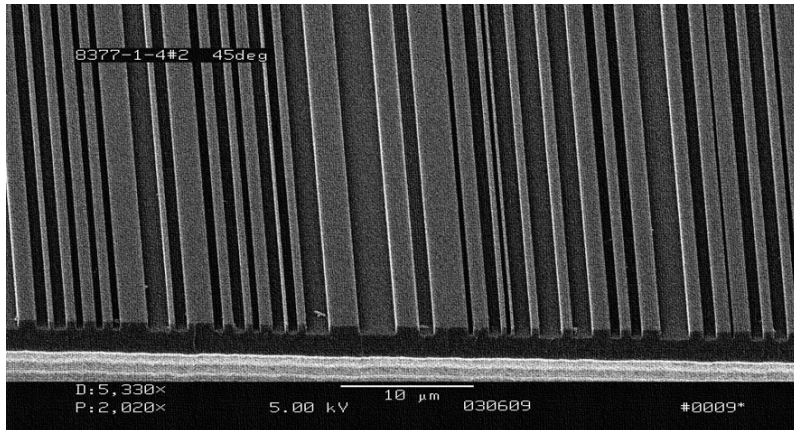
Elements diffractifs

- Le champ diffracté correspond à la transformée de Fourier de l'ouverture/objet

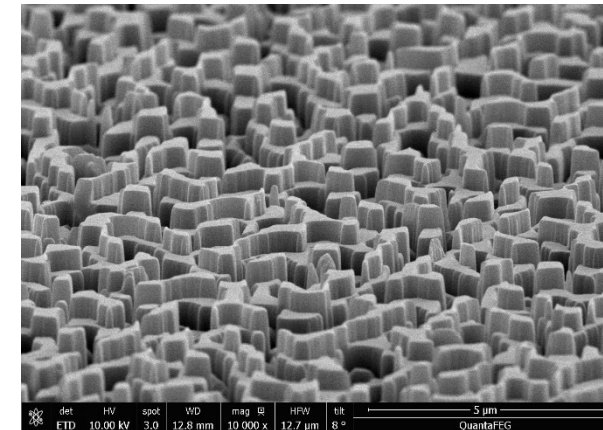
$$U(p_x, p_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x', y') e^{j2\pi(p_x x' + p_y y')} dx' dy' = \mathcal{F}\{U(x', y')\}$$

- On peut donc créer des surfaces qui produisent une illumination spécifique (conception basée sur la transformée de Fourier inverse):

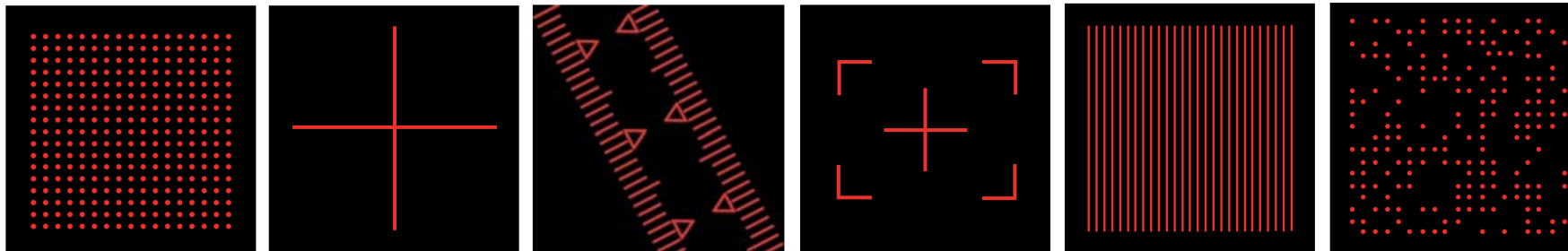
Holographix



Opton

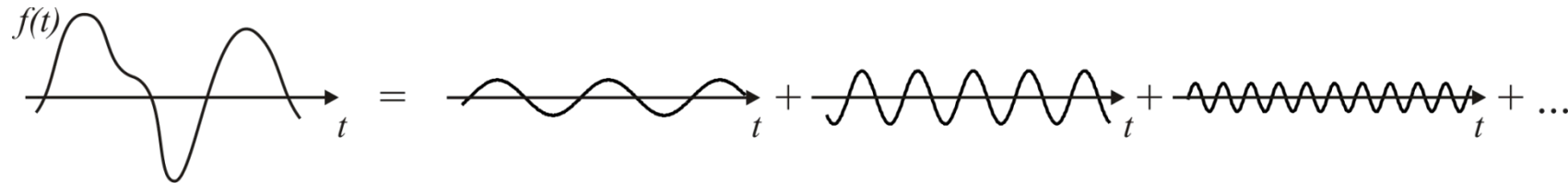


Hololeye

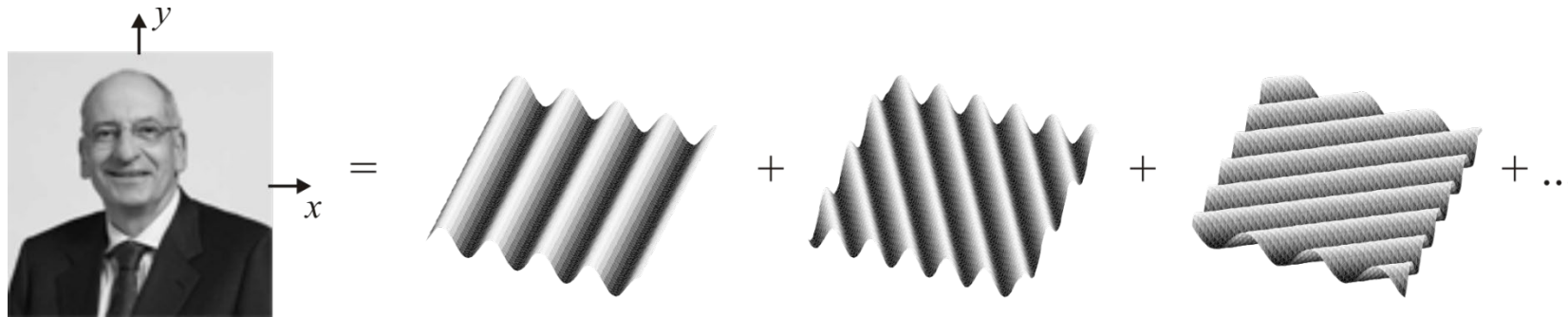


Retour à l'optique de Fourier

- De la théorie de la diffraction, nous avons appris que dans le champ lointain, nous voyons toujours la transformée de Fourier d'une image
- Cette transformée de Fourier correspond à la décomposition de l'image en une somme d'ondes plane, comme un signal qui peut se décomposer en une somme de signaux périodiques



- En optique, on a des images, donc des signaux à 2 dimensions:



Filtrage dans le plan de Fourier avec un système $4f$

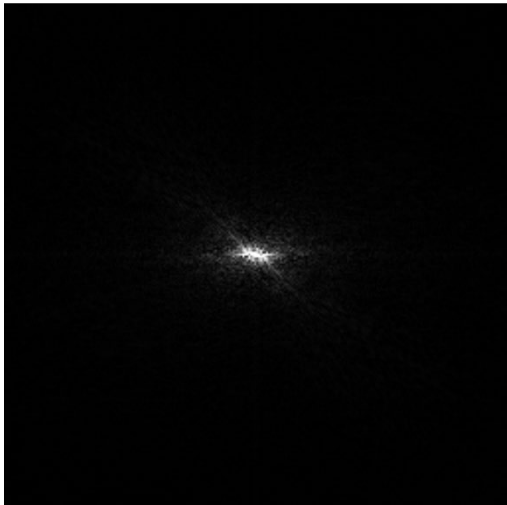
(a)

Image originale



(b)

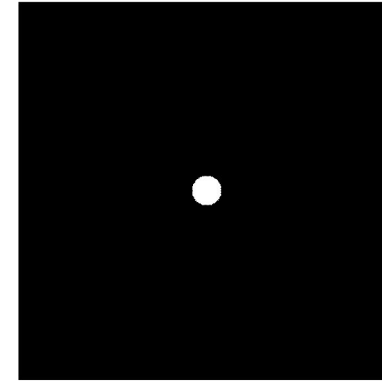
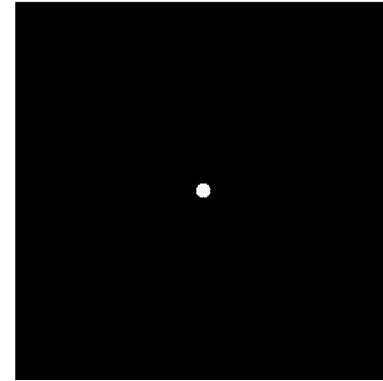
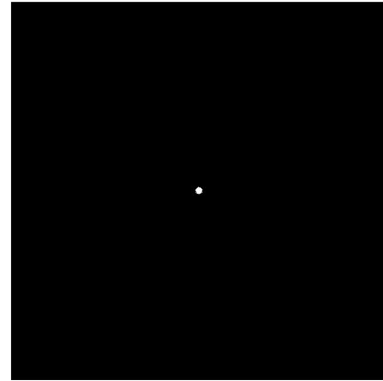
Plan de Fourier



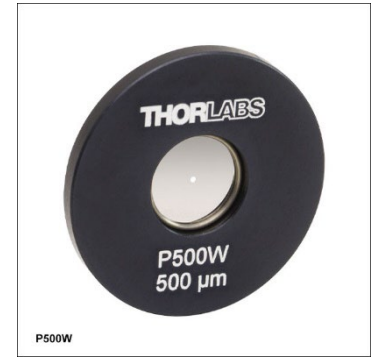
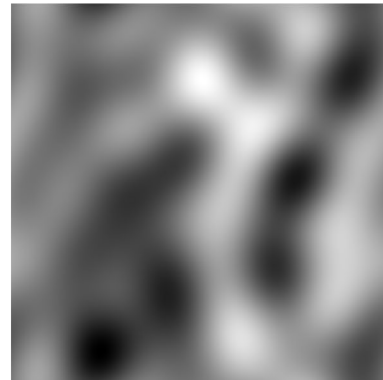
- Différentes ouvertures dans le plan de Fourier:

(c)

Filtre



Image



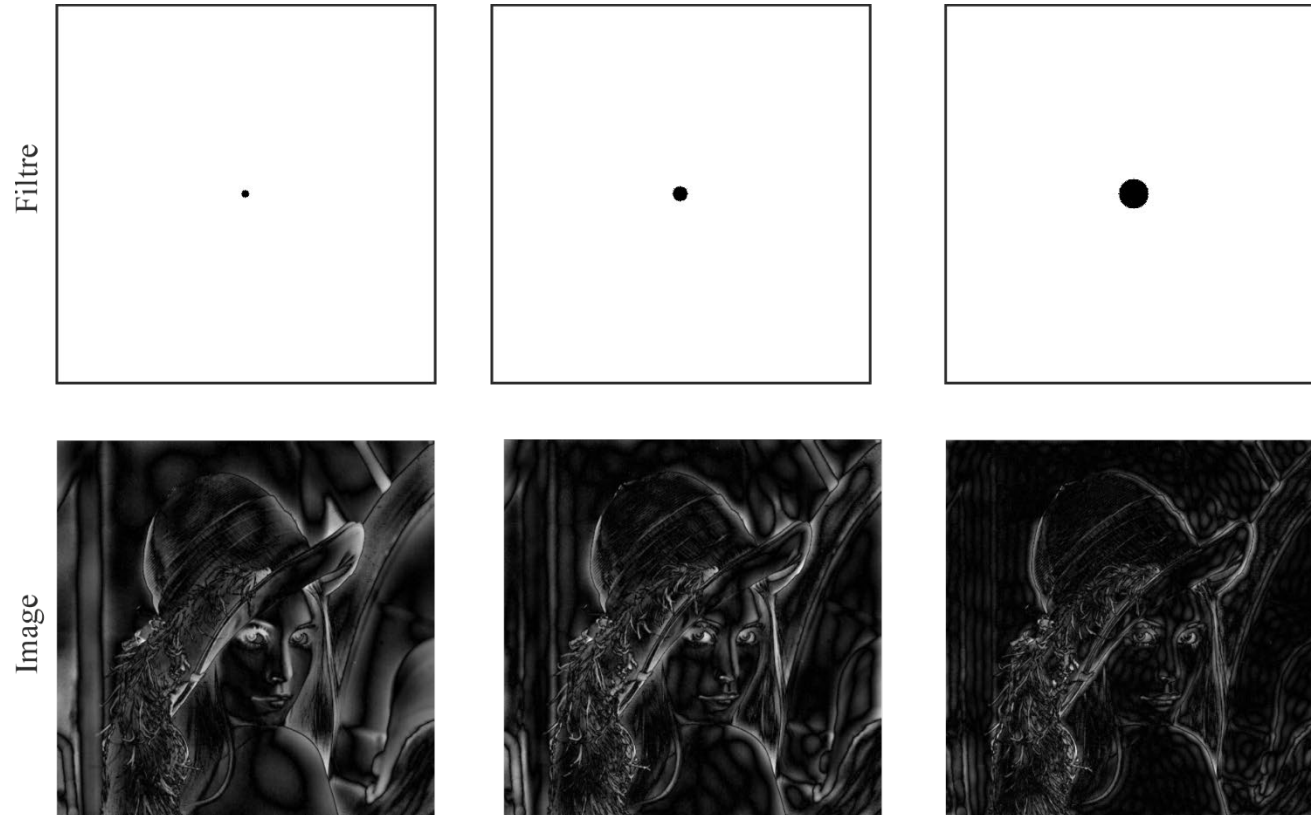
Filtrage dans le plan de Fourier avec un système $4f$

(a)

Image originale

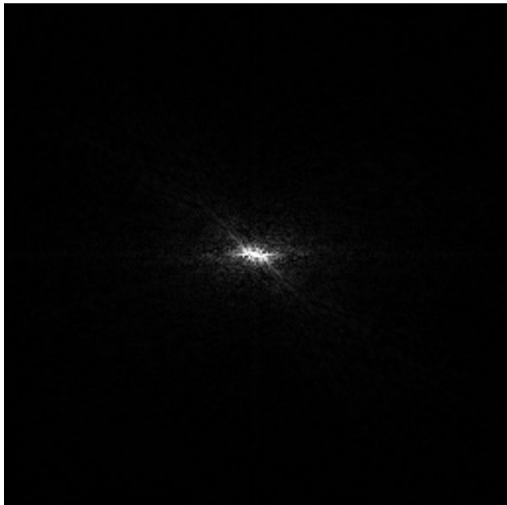


- Différents obstacles au centre du plan de Fourier:



(b)

Plan de Fourier



Ingénierie optique

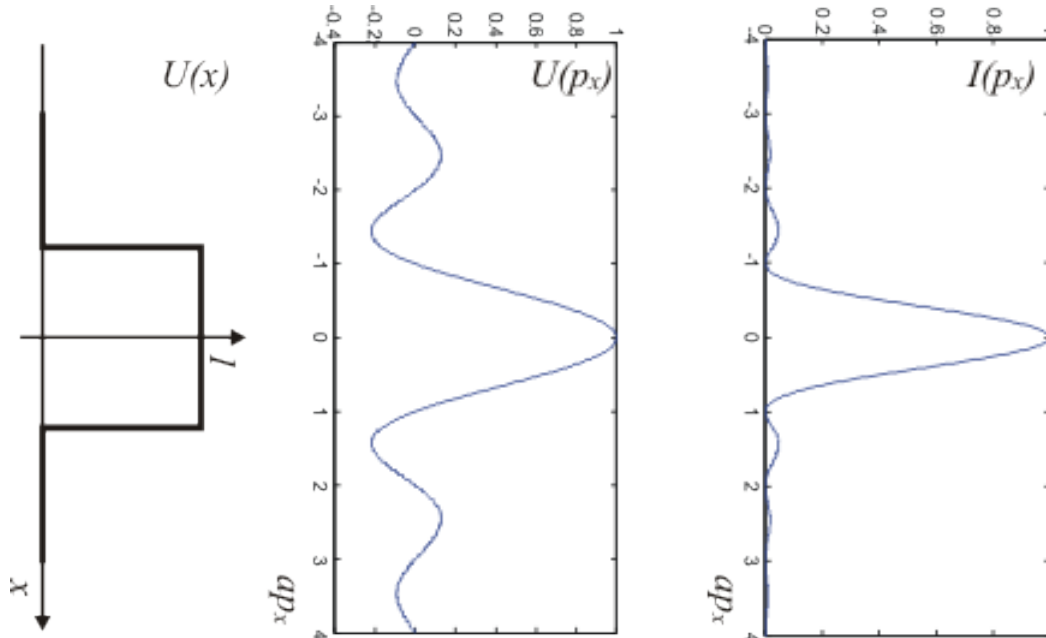
Semaine 5 – partie 3

Olivier J.F. Martin
Laboratoire de Nanophotonique et Métrologie



Diffraction par une fente

- Amplitude dans la fente $U(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a/2 \\ 0 & |x| > a/2 \end{cases} = \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right)$
- Transformée de Fourier: $U(p_x) = a \text{sinc}(a\pi p_x) = a \frac{\sin(a\pi p_x)}{a\pi p_x}$
- Intensité: $I(p_x) = \frac{a^2}{\lambda^2 R^2} \frac{\sin^2(a\pi p_x)}{(a\pi p_x)^2}$



- Premier minimum:

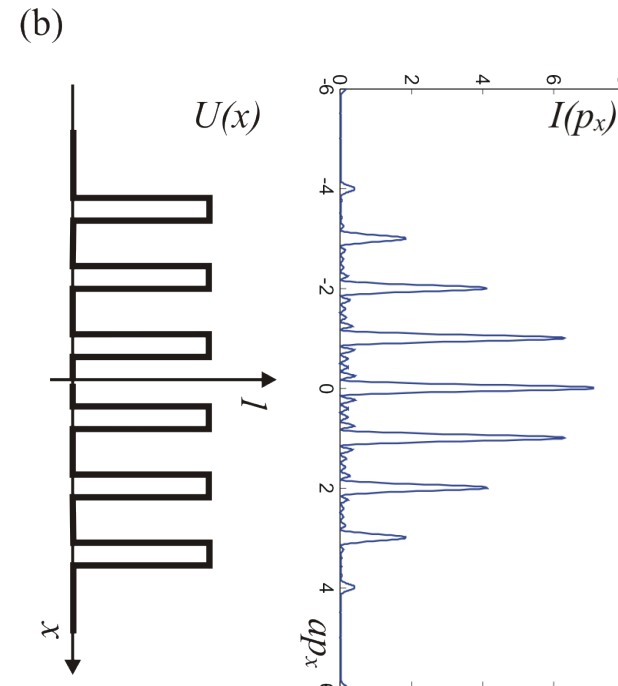
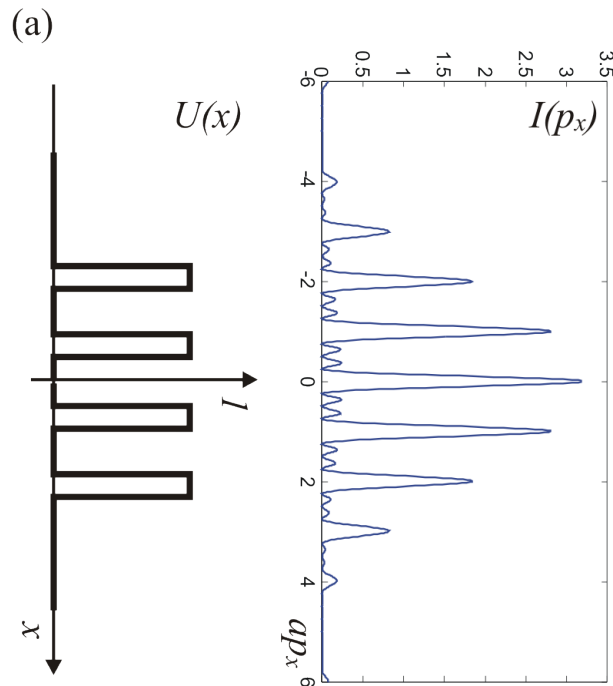
$$p_x = 1/a$$

$$\sin \theta_x = \frac{\lambda}{a}$$

Diffraction par un réseau de fentes

- Amplitude incidente
$$U(x) = \sum_{q=-(N-1)/2}^{+(N-1)/2} \text{rect}\left(\frac{x + qb}{a}\right)$$
- Transformée de Fourier:
$$U(p_x) = a \text{sinc}(a\pi p_x) \text{sinc}(bN\pi p_x) e^{-j\pi b p_x / 2}$$

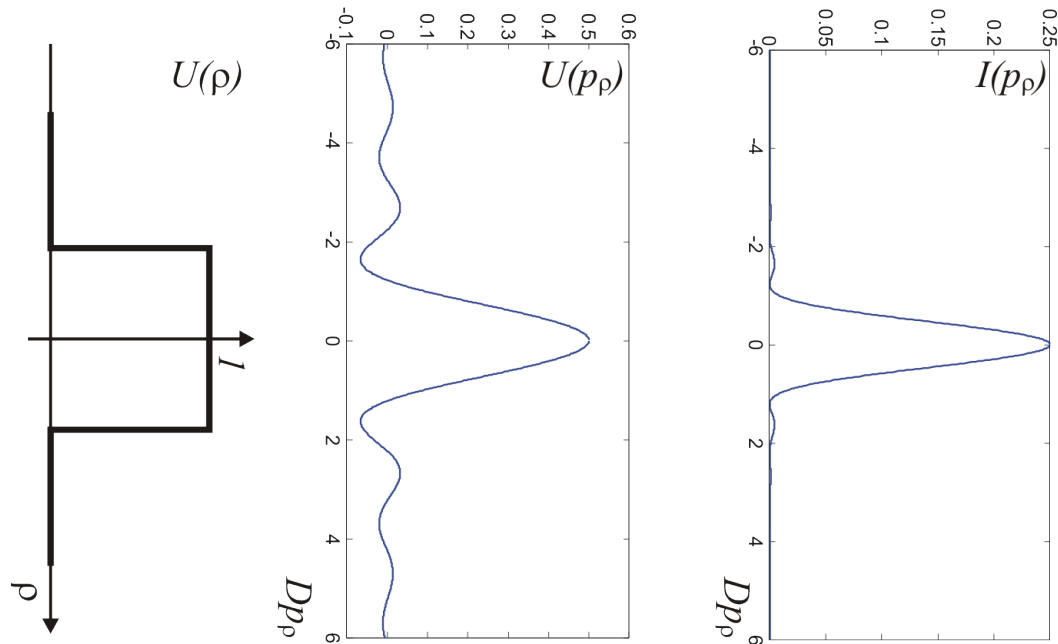
- Intensité:
$$I(p_x) = \frac{a^2}{\lambda^2 R^2} \frac{\sin^2(a\pi p_x)}{(a\pi p_x)^2} \frac{\sin^2(bN\pi p_x)}{\sin^2(b\pi p_x)}$$



- $N - 2$ pics secondaires

Diffraction par une ouverture circulaire

- Amplitude incidente $U(\rho) = \begin{cases} 1 & \rho \leq D/2 \\ 0 & \rho > D/2 \end{cases}$
- Transformée de Fourier: $U(p_\rho) = \frac{\pi D^2}{2} \frac{J_1(\pi D p_\rho)}{\pi D p_\rho}$
- Intensité: $I(p_\rho) = \left(\frac{\pi D^2}{4\lambda R} \right)^2 \left(\frac{2J_1(\pi D p_\rho)}{\pi D p_\rho} \right)^2$



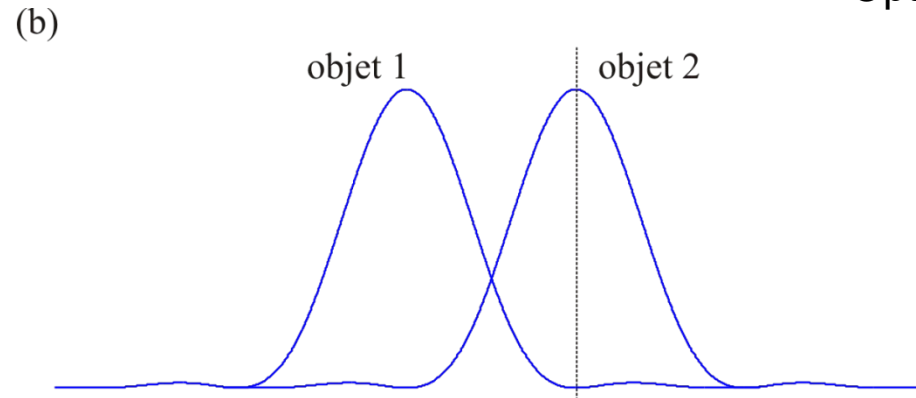
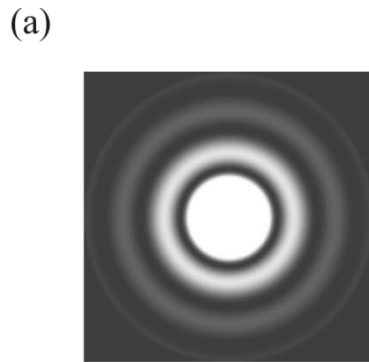
- Disque d'Airy:



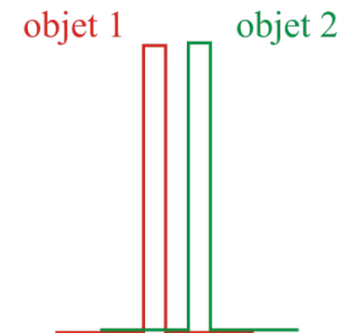
Critère de résolution

$$I(p_\rho) = \left(\frac{\pi D^2}{4\lambda R} \right)^2 \left(\frac{2J_1(\pi D p_\rho)}{\pi D p_\rho} \right)^2$$

- Position du premier minima: $\pi D p_\rho = 3.83$
- D'où le critère: $\sin \theta_\rho = \frac{3.83}{\pi} \frac{\lambda}{D} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$
- On peut résoudre deux objets si le minima de la tache d'Airy du second coïncide avec le maxima de la tache d'Airy du premier (critère de Rayleigh)



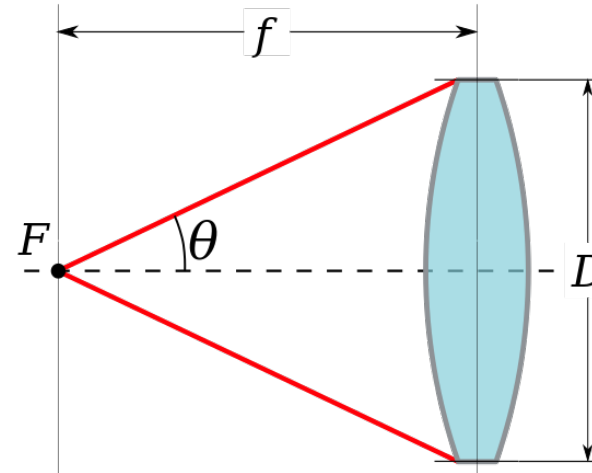
Optique géométrique:



Exercice 3 aujourd'hui

- Ouverture numérique d'un objectif:
 - Dépend de l'angle maximal du cône de lumière qui peut pénétrer dans l'objectif

$$NA = n \sin \theta$$



- Influence fortement la résolution ρ :

$$\rho = 1.22 \frac{\lambda f}{D} = 0.61 \frac{\lambda}{NA}$$

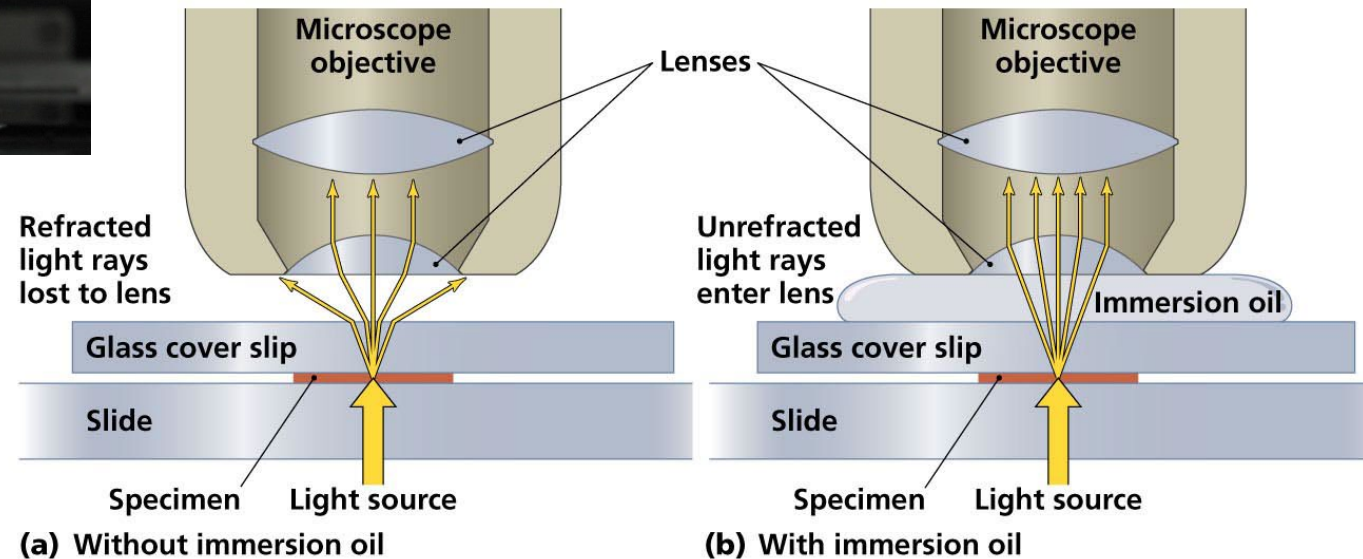
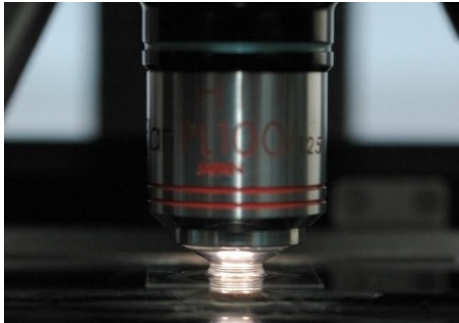
$$\lambda_1 = 633 \text{ nm}$$

$$\lambda_2 = 450 \text{ nm}$$

	NA=0.2	NA=0.8	NA=1.4
λ_1	$1.9 \mu\text{m}$	483 nm	276 nm
λ_2	$1.4 \mu\text{m}$	343 nm	196 nm

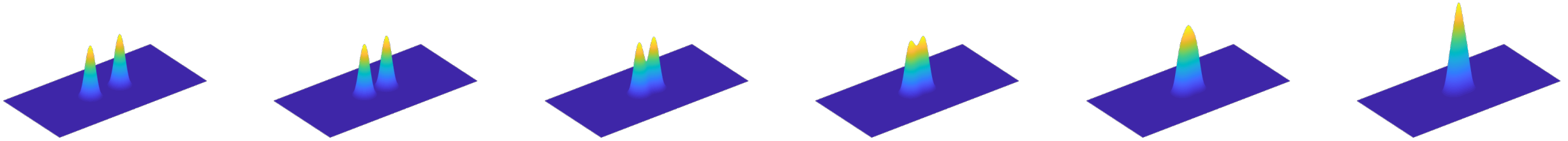
Exercice 3 aujourd'hui

- En utilisant de l'huile, on augmente l'ouverture numérique (*oil immersion objective*):
$$NA = n \sin \theta$$
- Malheureusement, un objectif à forte ouverture numérique a une très petite distance de travail



Copyright © 2006 Pearson Education, Inc., publishing as Benjamin Cummings.

Critère de résolution



- Attention, si l'illumination est cohérente, on peut avoir des interférences et la resolution est moins bonne!

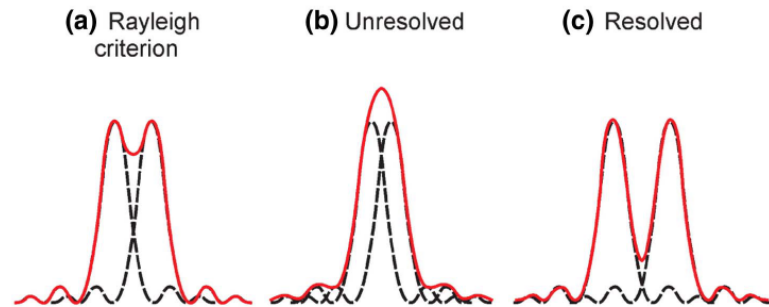
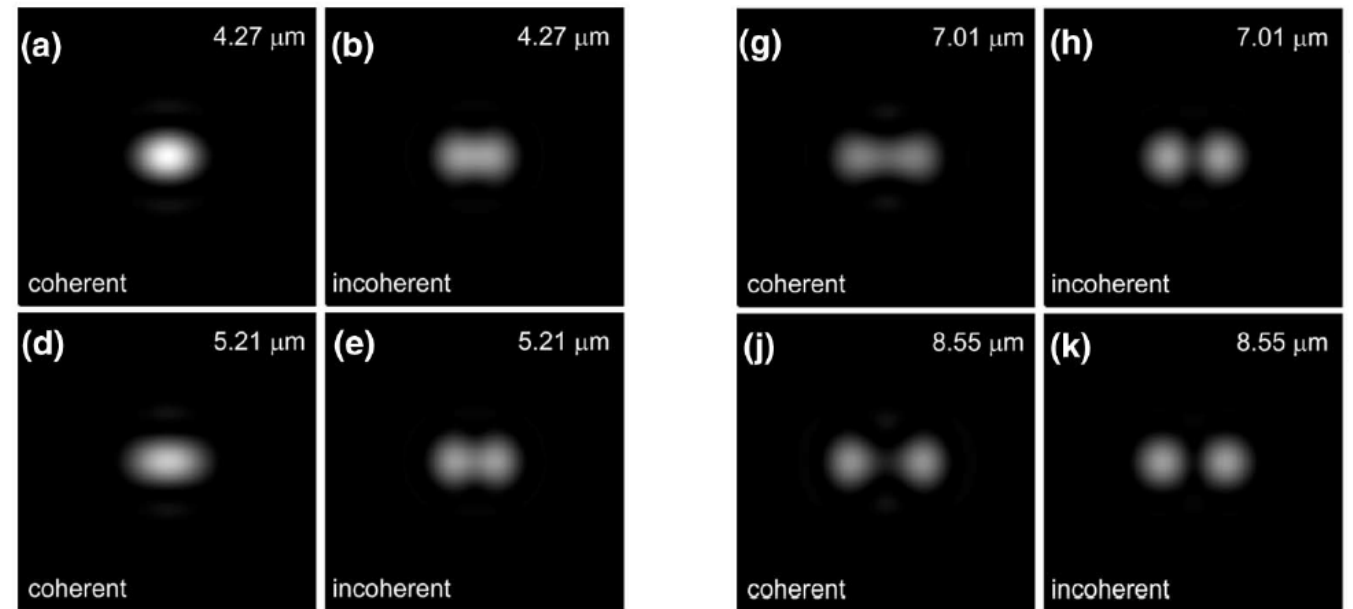


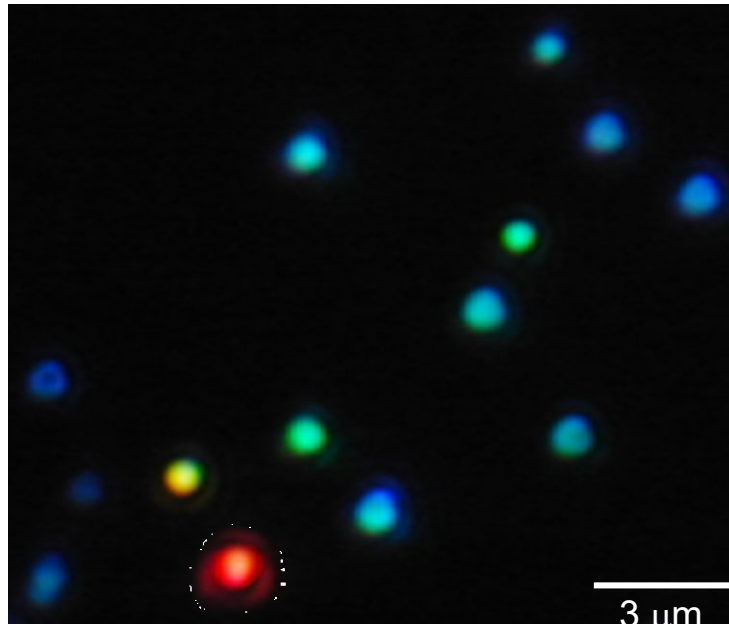
Fig. 1. Images of two point-sources and the resolution criteria. (a) Images of two point-sources are resolved according to the Rayleigh criterion. (b) Images of two point-sources not resolved. (c) Images of two point-sources resolved.



$\lambda=532$ nm, 25 mm aperture, 0.2 m distance

Critère de résolution

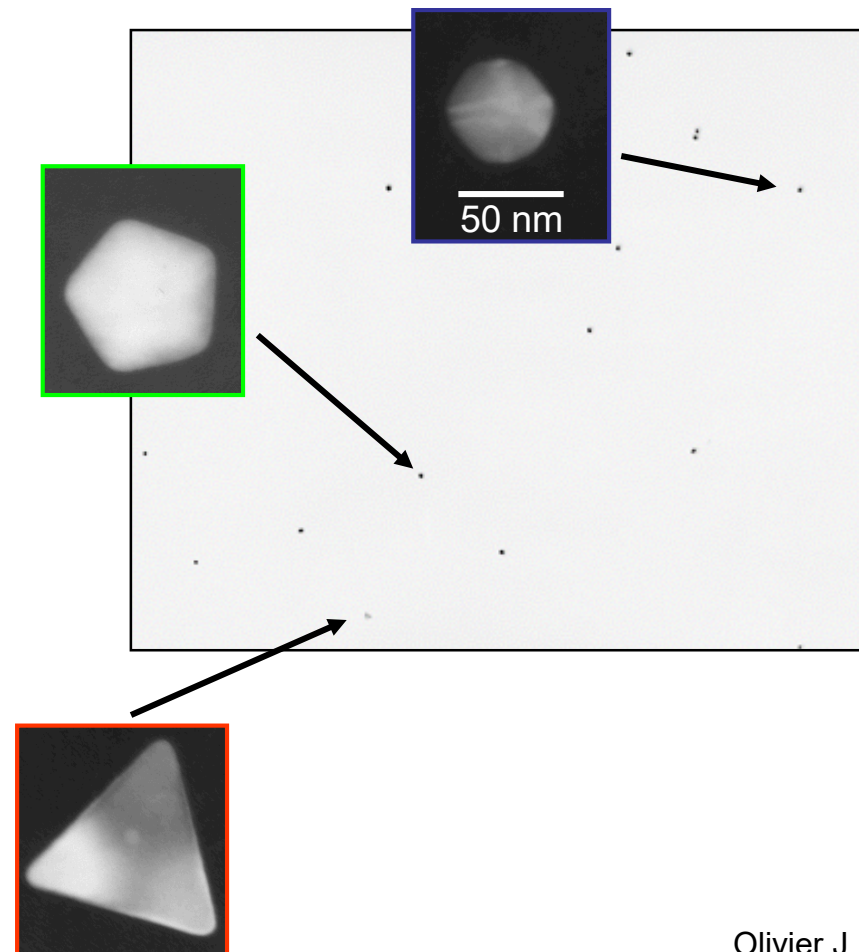
- La diffraction diminue la résolution, i.e. la distance minimum qui peut être résolue entre deux objets
- Cela ne veut pas dire que l'on ne peut pas voir des objets plus petits, pour autant qu'ils soient bien séparés les uns des autres!



50 nm silver colloidal nanoparticles

J. Mock, Duke University

J. Chem. Phys. **116**, 6755 (2002)



Ingénierie optique

Semaine 5 – partie 4

Olivier J.F. Martin
Laboratoire de Nanophotonique et Métrologie



Réseau de diffraction

- Le principe est le même: la corrugation périodique de période Λ de la surface transmet une certaine quantité de mouvement à l'onde incidente qui est défléchie
- L'angle de déflexion dépend de la longueur d'onde, donc les différentes composantes spectrales partent dans différentes directions
- Les ordres de diffraction $\pm q$ sont symétriques par rapport à la direction de l'onde incidente

Equation de Bragg:

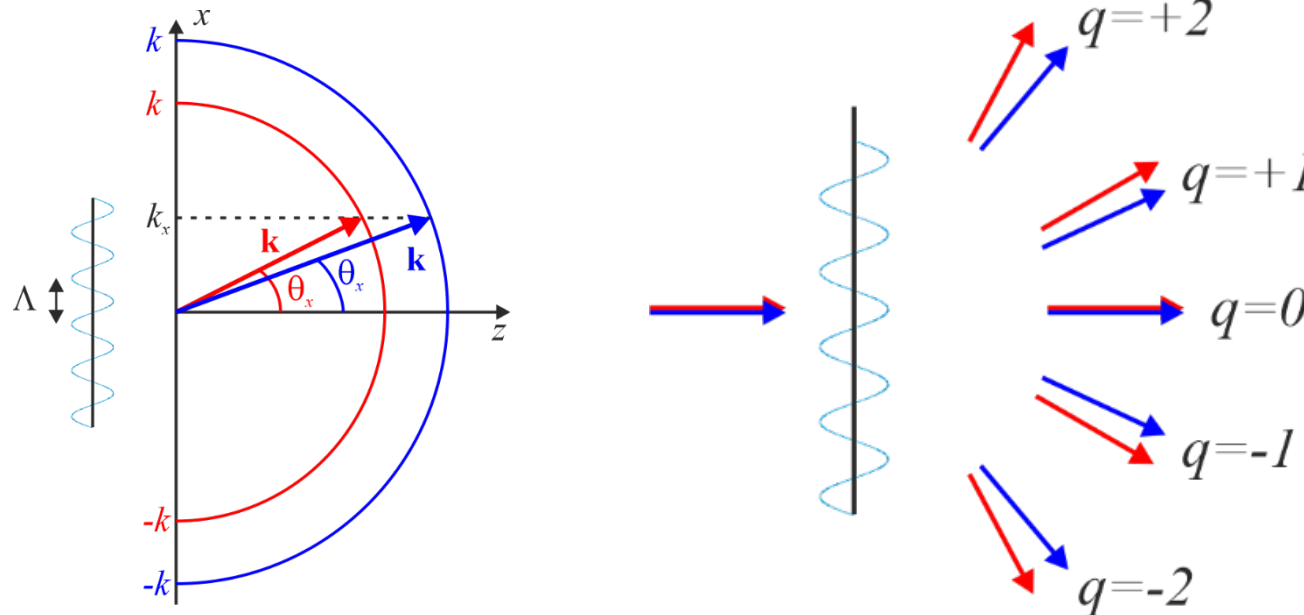
$$\sin \theta_q = \sin \theta_i + q \frac{\lambda}{\Lambda} \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\sin \theta_q = q \frac{\lambda}{\Lambda} \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Incidence normale

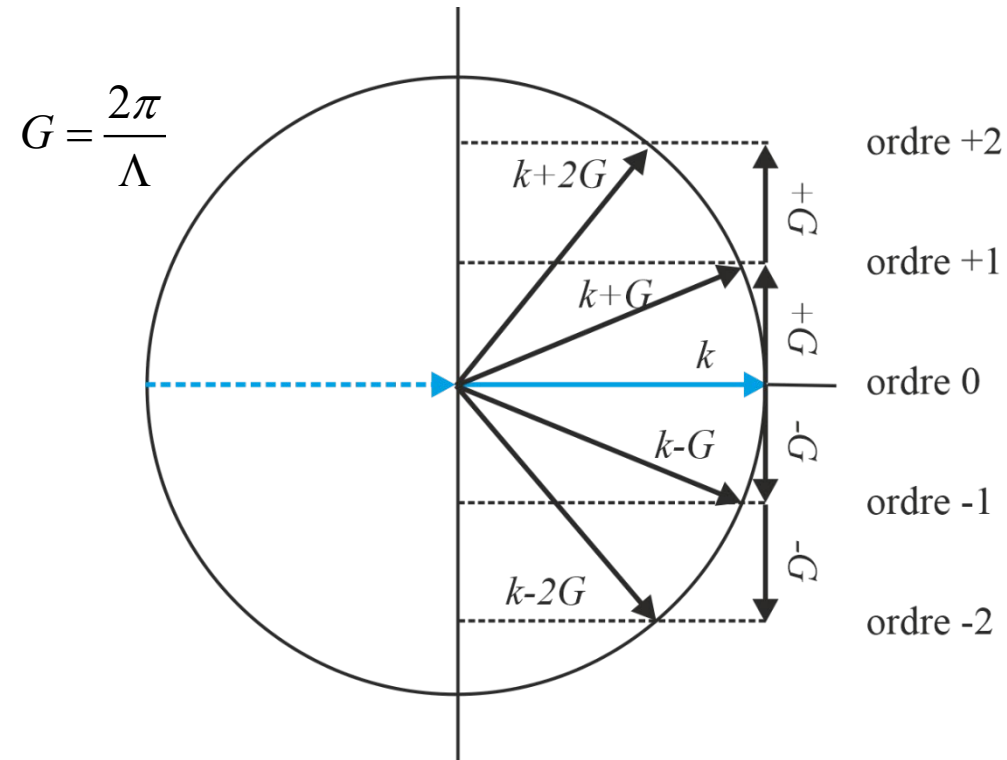
Pour les petits angles ($\sin \theta \simeq \theta$):

$$\theta_q = \theta_i + q \frac{\lambda}{\Lambda}, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



Réseau de diffraction

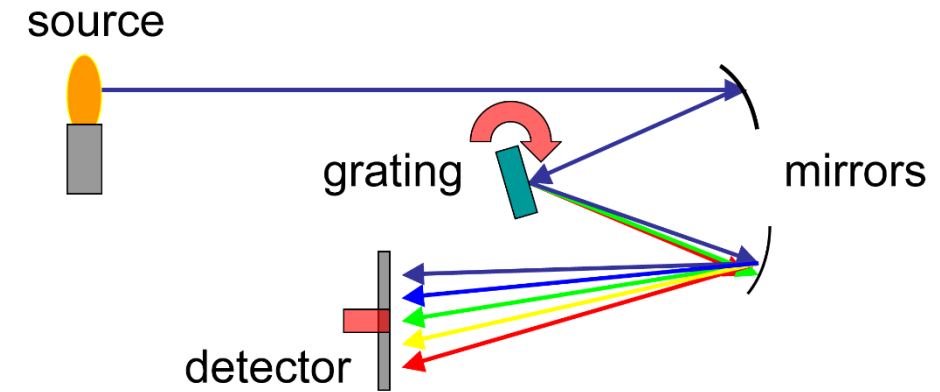
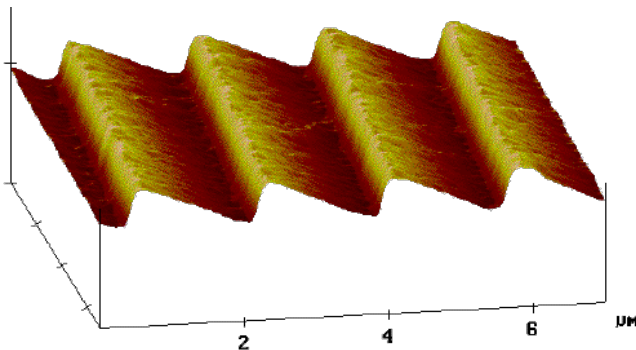
- On peut comprendre les différents ordres de diffraction comme étant l'ajout ou la soustraction du vecteur G associé au réseau périodique, parallèlement à la surface du réseau



- Différents types de réseaux de diffraction existent: profile sinusoïdal, carré ou triangulaire sur une surface de verre ou métallique, réseau de fente, etc...

Spectromètre, monochromateur

- Un réseau de diffraction (grating en anglais) permet de séparer les composantes spectrales de la lumière en utilisant une surface périodique
- Différents types de réseaux de diffraction existent: profile sinusoïdal, carré ou triangulaire



Spectromètre, monochromateur

- La spectroscopie joue un rôle important dans beaucoup de disciplines scientifiques

ASTRONOMY & ASTROPHYSICS

OCTOBER II 1996, PAGE 373

SUPPLEMENT SERIES

Astron. Astrophys. Suppl. Ser. **119**, 373-390 (1996)

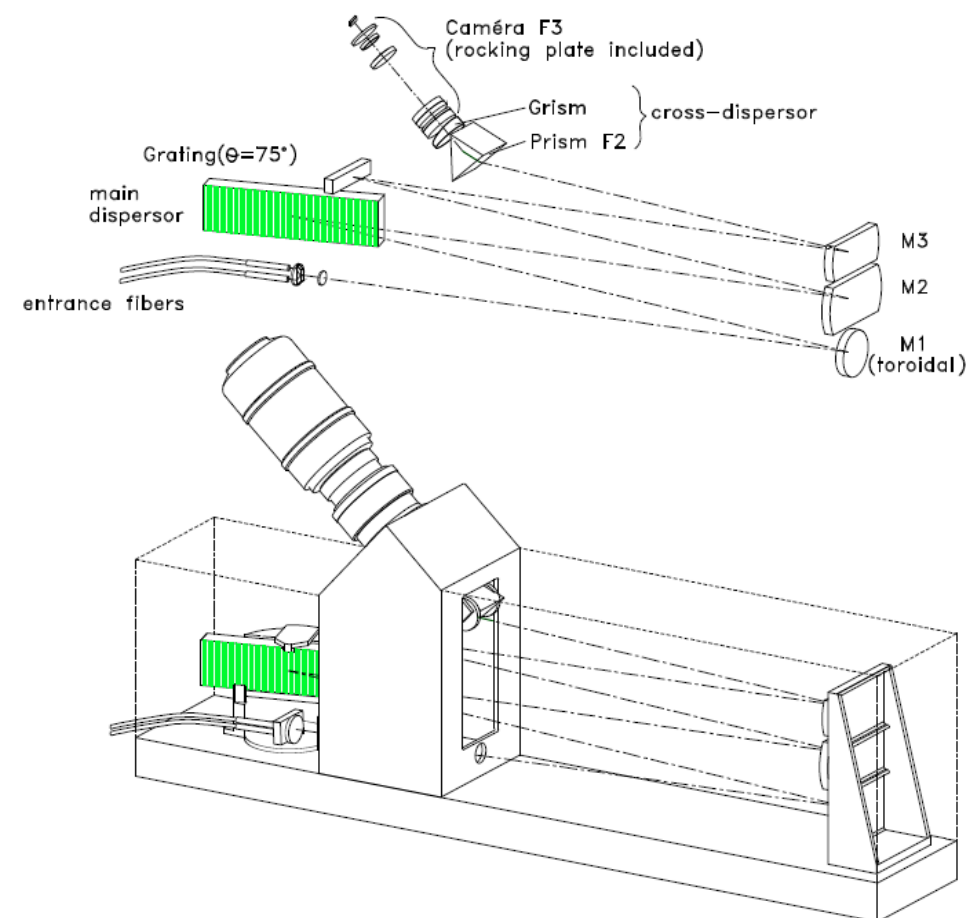
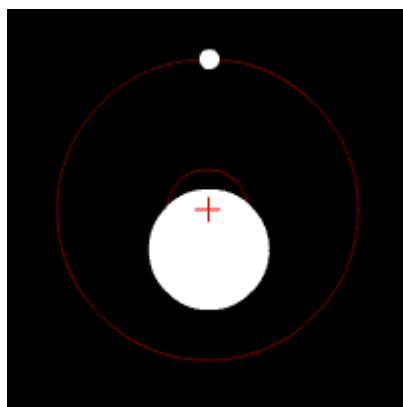
ELODIE: A spectrograph for accurate radial velocity measurements

A. Baranne¹, D. Queloz², M. Mayor², G. Adrianzyk³, G. Knispel³, D. Kohler³, D. Lacroix³, J.-P. Meunier³, G. Rimbaud³ and A. Vin³

¹ Observatoire de Marseille, 2 Place Le Verrier, F-13248 Marseille, France

² Observatoire de Genève, CH-1290 Sauverny, Switzerland

³ Observatoire de Haute-Provence, F-04870 Saint Michel l'Observatoire, France



Olivier J.F. Martin

Ingénierie optique

Semaine 5 – partie 5

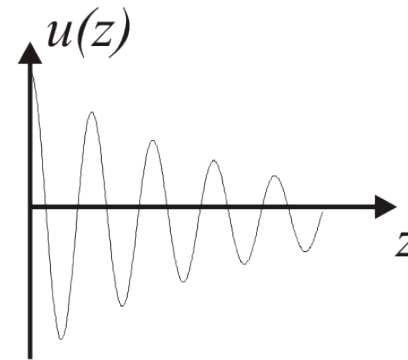
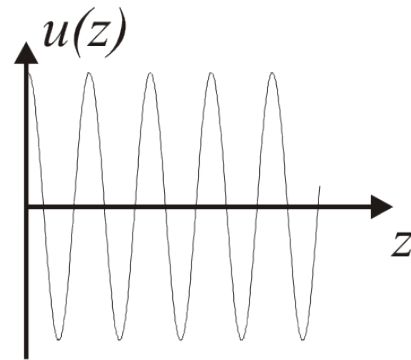
Olivier J.F. Martin
Laboratoire de Nanophotonique et Métrologie



Onde évanescente causée par une grande composante du vecteur d'onde

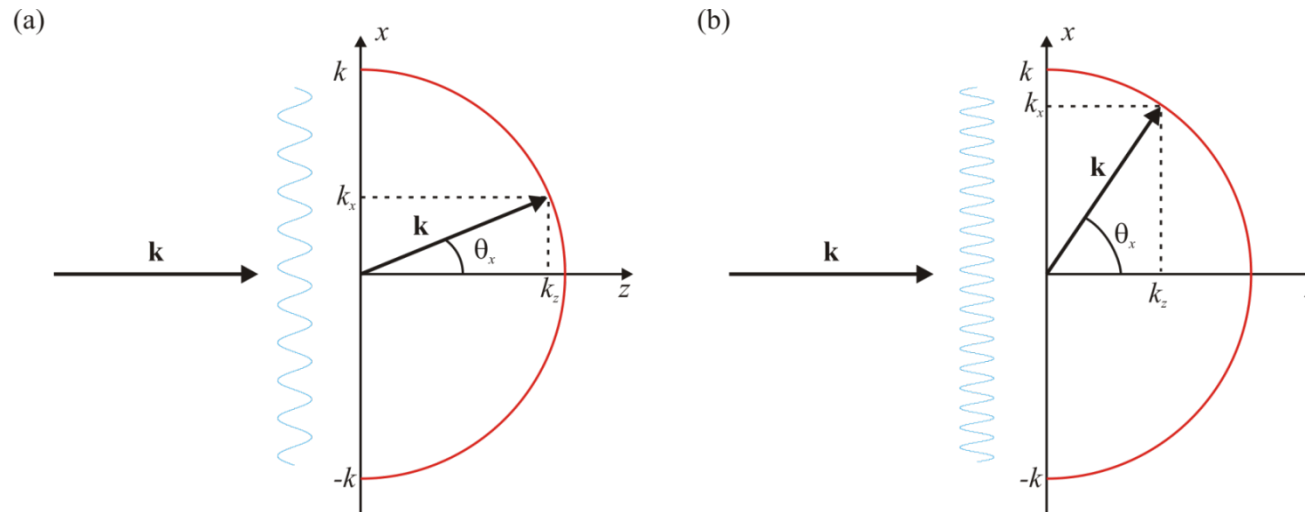
- On considère $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) = (k_x, 0, k_z)$
- Or, on doit satisfaire l'équation d'Helmholtz $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$
 - Lorsque $k_x^2 \leq \frac{\omega^2}{c^2}$, k_z est réel et l'onde se propage dans la direction z
 - Lorsque $k_x^2 > \frac{\omega^2}{c^2}$, k_z est imaginaire et l'onde est évanescente dans la direction z

$$k_z = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2}$$

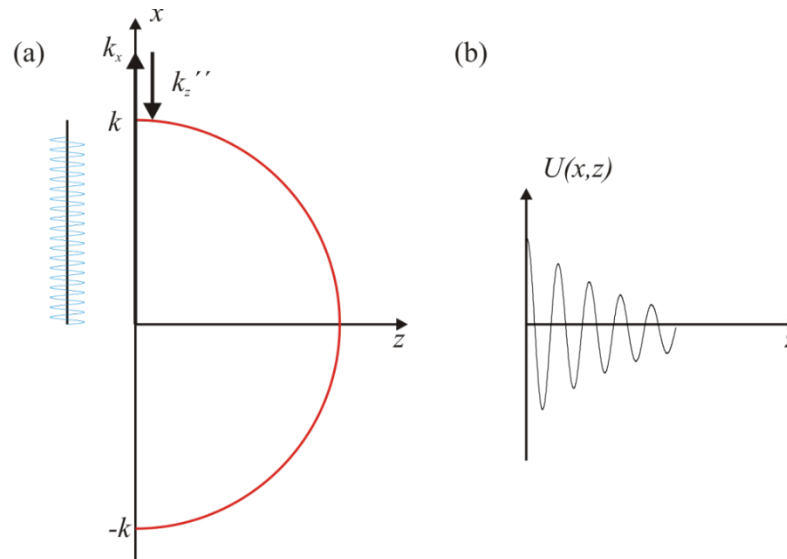


Surface avec un profil particulièrement séré

- Plus la période spatiale est importante, plus l'onde est déviée...

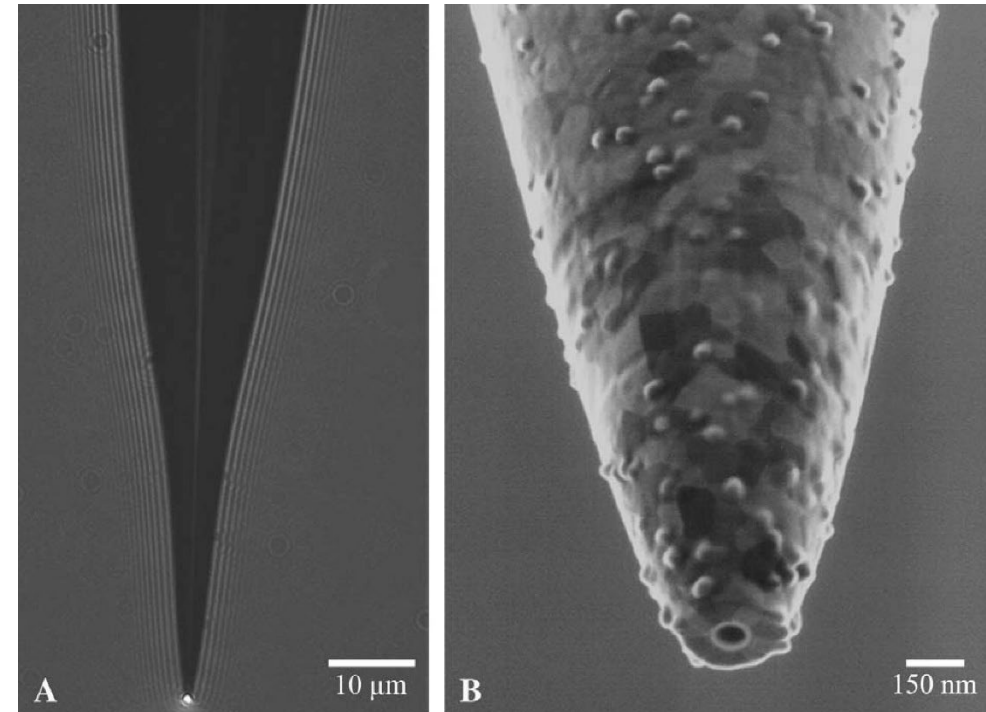
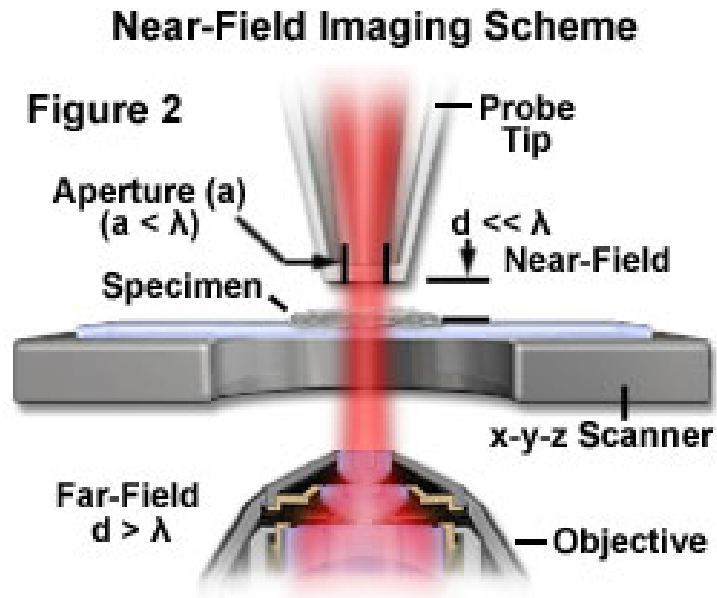


- ... lorsque le profil est trop rapide, il arrive un moment où "on sort du cercle" et l'onde devient évanescente:



Comment retrouver les hautes fréquences spatiales?

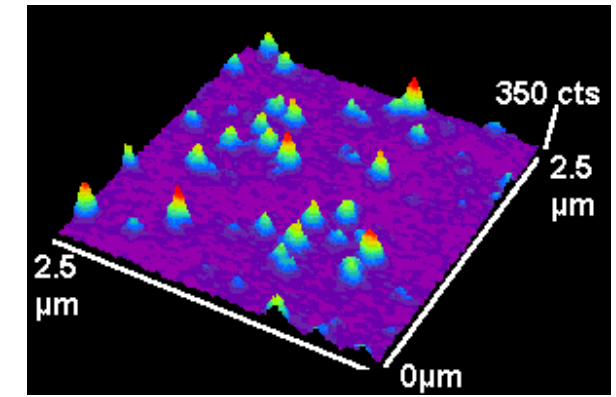
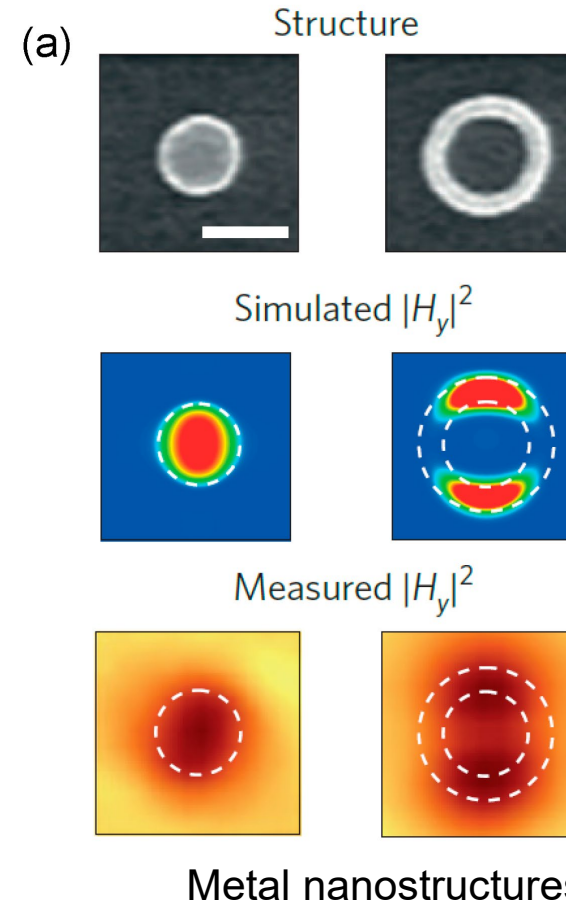
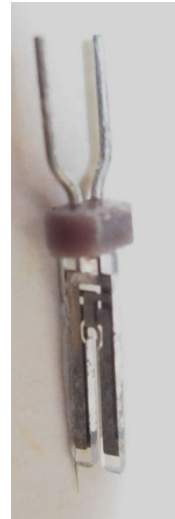
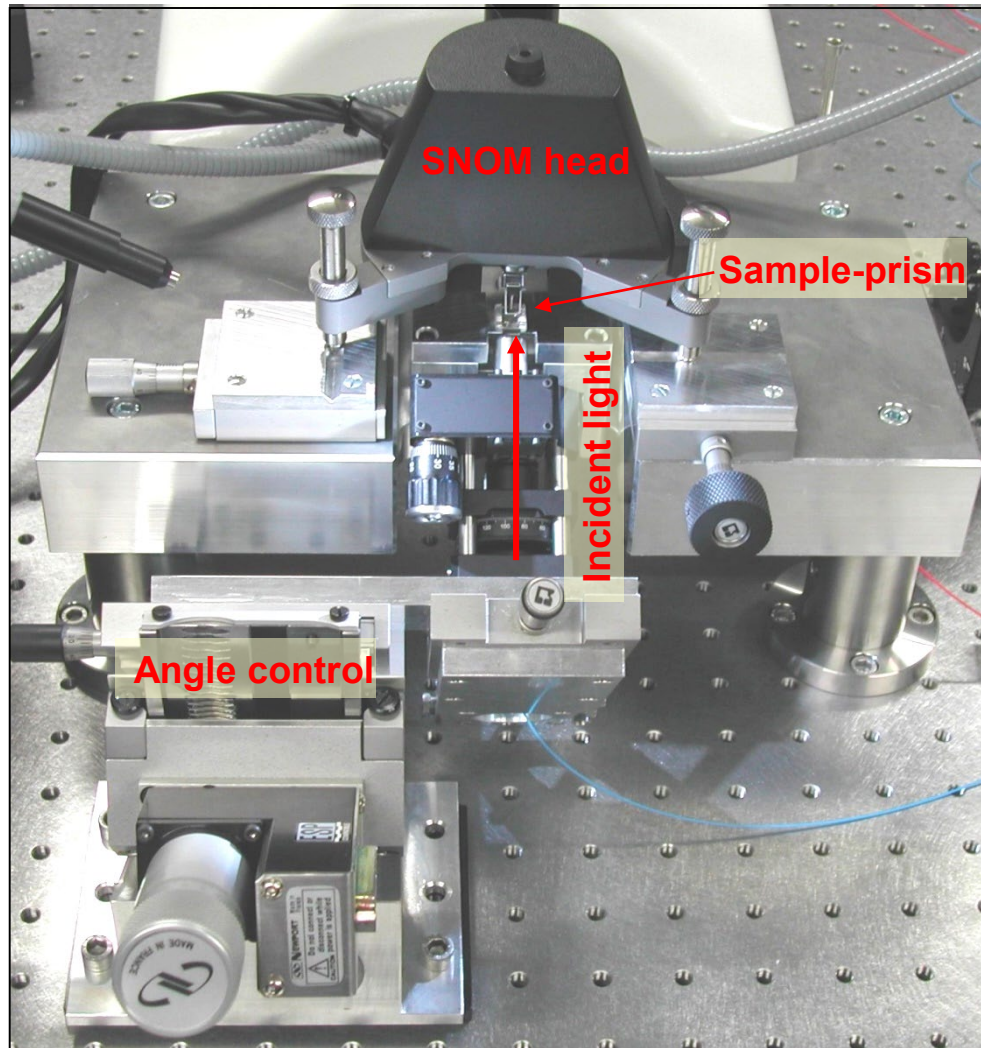
- En évitant de se propager trop loin → microscope optique de champ proche (scanning near-field optical microscope, SNOM)
- Microscope à force atomique (AFM) utilisant une fibre optique comme sonde



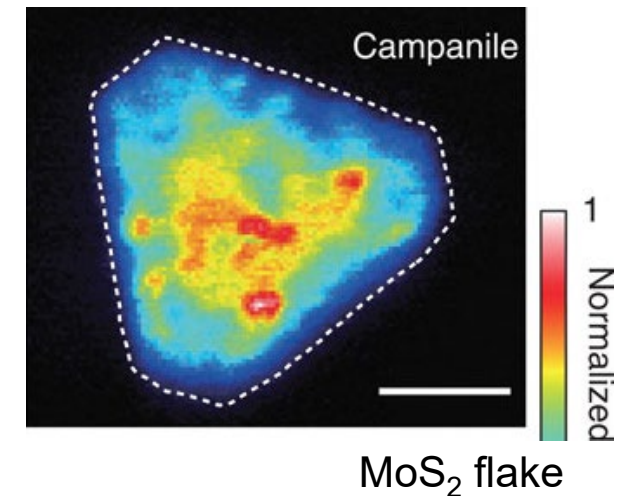
O.L. Mooren, Journal of the Association for Laboratory Automation vol. 11, p. 268 (2006)

Scanning near-field optical microscope

- On peut obtenir une résolution de l'ordre de $\lambda/10$... ou mieux...



Single molecules

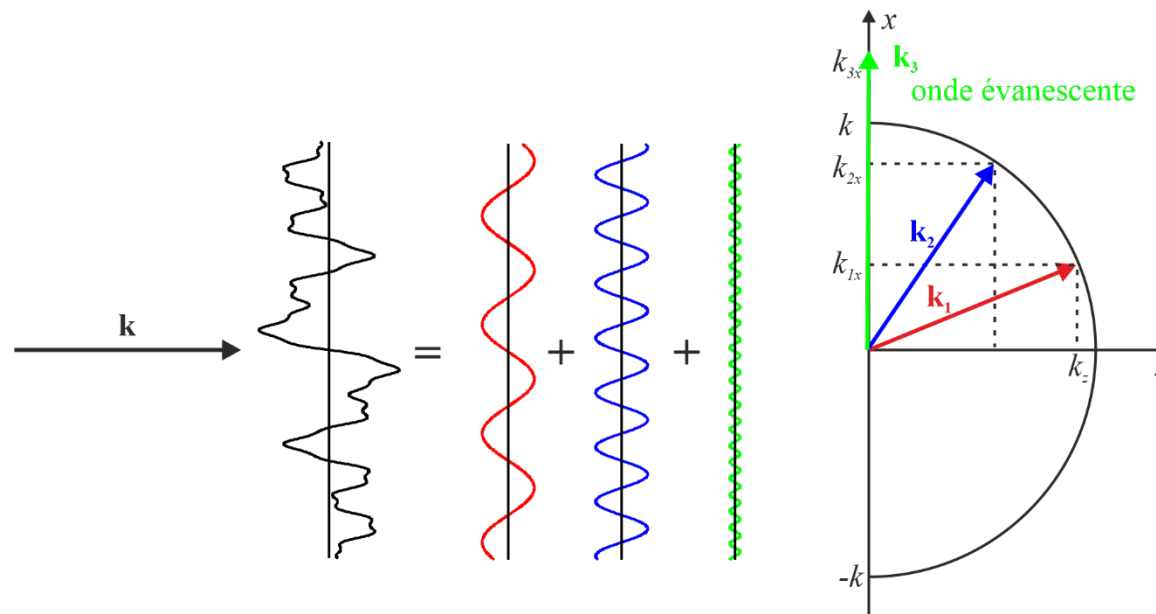


MoS₂ flake

P. Bazylewski, Applied Science vol. 7, p. 973 (2017)

En résumé

- Pour une image arbitraire, on obtient dans le champ lointain la transformée de Fourier, qui correspond aux différentes fréquences spatiales
- Les fréquences spatiales trop rapides sont évanescentes et disparaissent après propagation sur quelques longueurs d'onde, dans le champ lointain



En résumé

- Pour une image arbitraire, on obtient dans le champ lointain la transformée de Fourier, qui correspond aux différentes fréquences spatiales
- Les fréquences spatiales trop rapides sont évanescentes et disparaissent après propagation sur quelques longueurs d'onde, dans le champ lointain

