

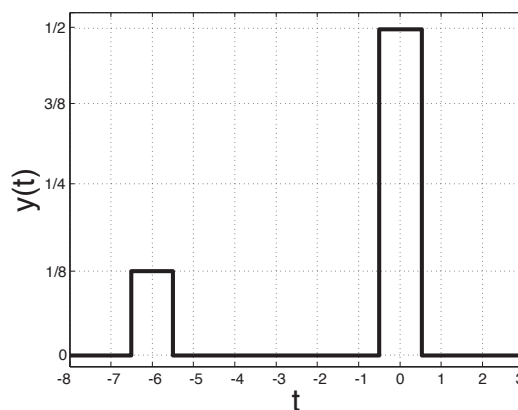
Série 5

Réponses à l'exercice 5.1 : CONVOLUTION

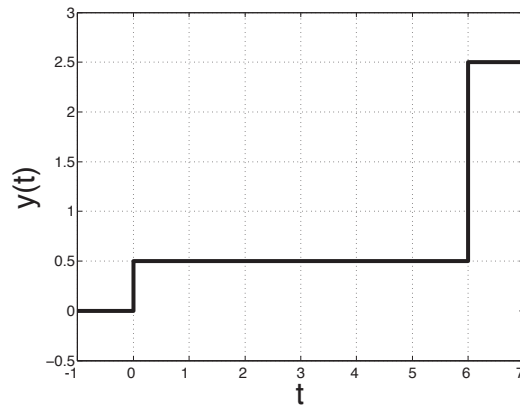
- 1) $F(\omega) = \frac{1}{j\omega - s}$.
- 2) $F_1(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$.
 $F_2(\omega) = \frac{1}{j\omega + 2}$.
 $F_3(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1} - \frac{1}{j\omega + 2}$.
- 3) $f_3(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$.
- 4) Propriété de convolution : $F_3(\omega) = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) \Rightarrow f_3(t) = (f_1 * f_2)(t)$.
 D'après les tables de convolution (A-4), on a bien $(f_1 * f_2)(t) = u(t) \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{-1 - (-2)} = f_3(t)$.

Réponses à l'exercice 5.2 : ANALYSE DE SYSTÈME

- 1) (a) $h_{11}(t) = \frac{1}{3}u(t)e^{-\frac{2}{3}t}$.
 (b) $H_{12}(\omega) = 2e^{-6j\omega}$.
 (c) $H_1(\omega) = \frac{2}{3} \frac{e^{-6j\omega}}{j\omega + \frac{2}{3}}$.
- 2) (a) $h_2(t) = \frac{1}{6}u(t)e^{-\frac{2}{3}t}$.
 (b) $H_a(\omega) = \frac{1}{6} \frac{4e^{-6j\omega} + 1}{j\omega + \frac{2}{3}}$.
- 3) (a) $h_b(t) = 3\delta'(t) + 2\delta(t)$.
 (b) $H(\omega) = \frac{1}{2}(4e^{-6j\omega} + 1)$.
 $4x(t - 6) + x(t) = 2y(t)$.
 (c) Le système est causal et BIBO-stable.
 (d) Voir graphes ci-dessous.
 - i. $y(t) = \frac{1}{2}\text{rect}(t) + \frac{1}{8}\text{rect}(t + 6)$.

FIGURE 1 – La fonction $y(t) = \frac{1}{2}\text{rect}(t) + \frac{1}{8}\text{rect}(t + 6)$.

- ii. $y(t) = 2u(t - 6) + \frac{1}{2}u(t)$.

FIGURE 2 – La fonction $y(t) = 2u(t-6) + \frac{1}{2}u(t)$.**Réponses à l'exercice 5.3 : DUALITÉ**

- 1) $f(t) = \frac{1}{jt+1} - \frac{1}{jt-1}$.
- 2) $S_1(\omega) = \frac{1}{j\omega+1}$.
 $S_2(\omega) = -\frac{1}{j\omega-1}$.
- 3) Dualité : $f(t) = S_1(t) + S_2(t) \Rightarrow F(\omega) = 2\pi (s_1(-\omega) + s_2(-\omega)) = 2\pi e^{-|\omega|}$.
- 4) Dualité : $g(t) = \frac{1}{2\pi}F(t) \Rightarrow G(\omega) = f(-\omega) = \frac{2}{\omega^2+1}$.

Réponses à l'exercice 5.4 : DÉCALAGE ET DILATATION

- 1) $X(\omega) = \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}$.
- 2) Propriété de décalage $\Rightarrow Y(\omega) = e^{-j\omega/2}X(\omega) + e^{j\omega/2}X(\omega) = 2 \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}} = 2 \frac{\sin \omega}{\omega}$.
- 3) $y(t) = x(t/2)$.
- 4) Propriété de dilatation $\Rightarrow Y(\omega) = 2X(2\omega)$. On vérifie que l'on retrouve le résultat du 2).