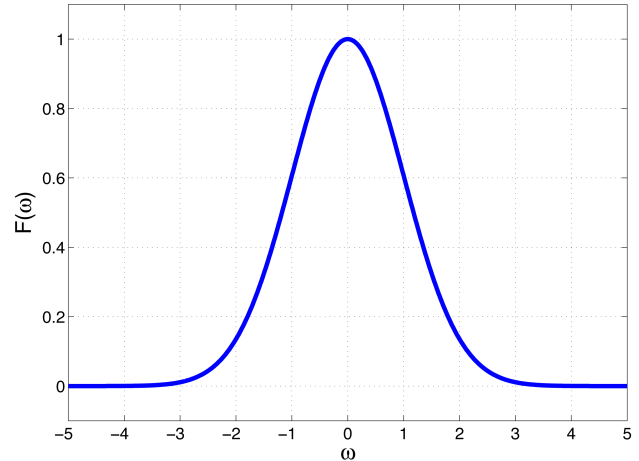
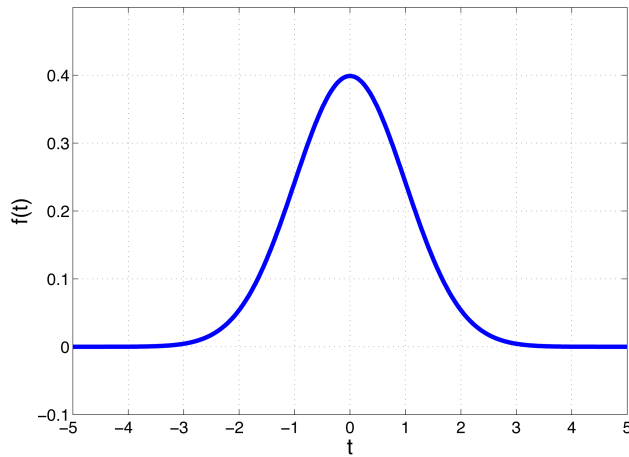


Série 7

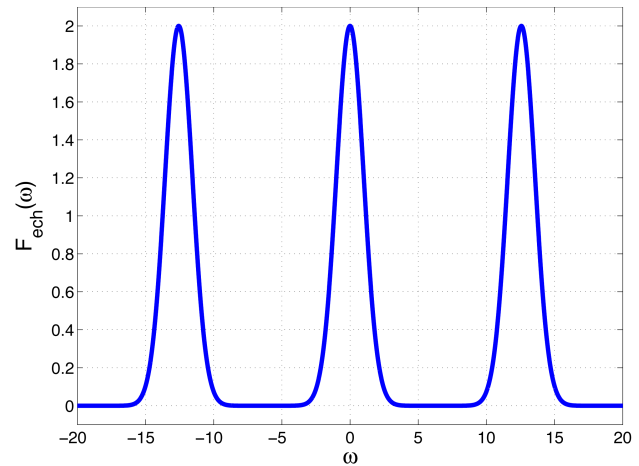
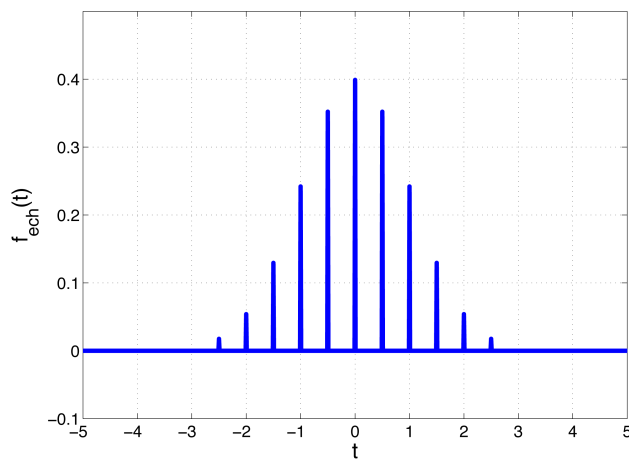
Réponses à l'exercice 7.1 : ÉCHANTILLONNAGE ET PÉRIODISATION

1) $F(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$. La transformée de Fourier d'une gaussienne est donc une gaussienne.



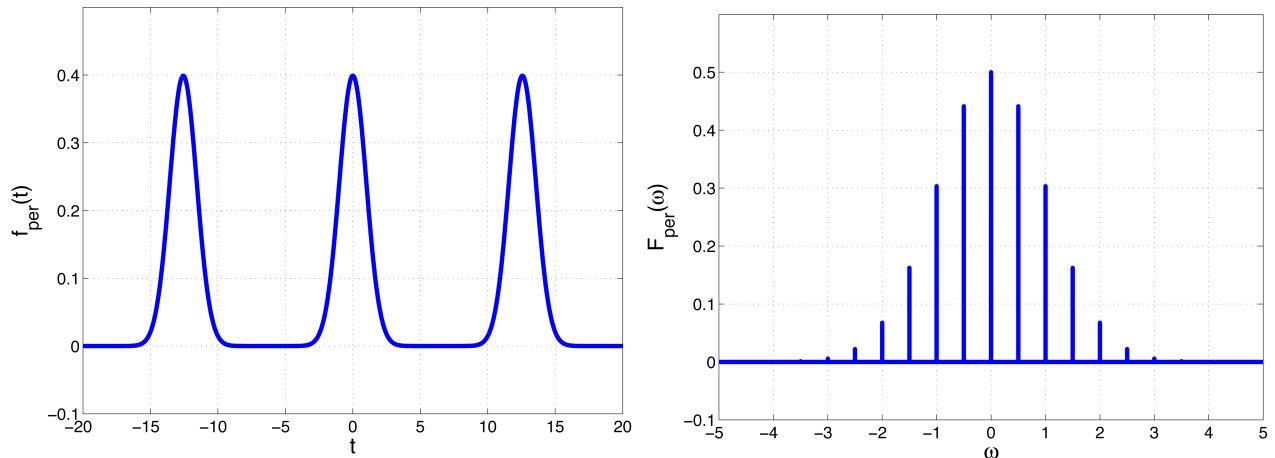
2) $f_{\text{éch}}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kT_0)\delta(t - kT_0)$.

3) $F_{\text{éch}}(\omega) = \frac{1}{T_0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(\omega - n\frac{2\pi}{T_0})$.



4) $f_{\text{per}}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t - kT_1)$.

5) $F_{\text{per}}(\omega) = \frac{2\pi}{T_1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(n\frac{2\pi}{T_1})\delta(\omega - n\frac{2\pi}{T_1})$.



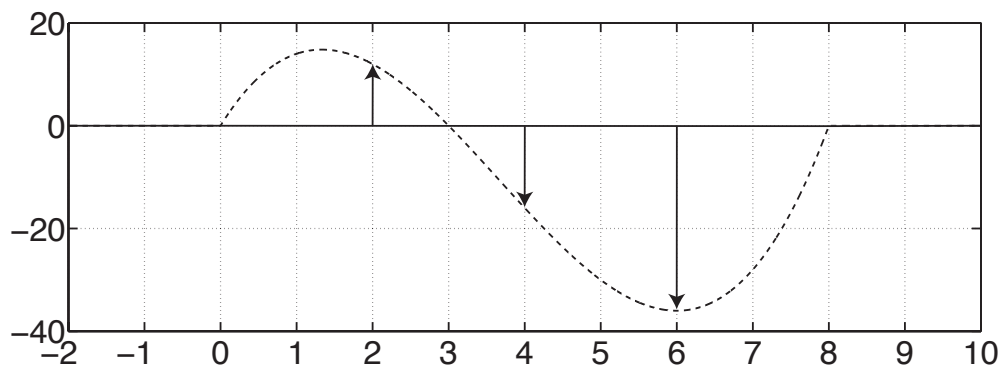
- 6) Une périodisation en temps correspond à un échantillonnage en fréquence, et un échantillonnage en temps correspond à une périodisation en fréquence.

Réponses à l'exercice 7.2 : INTERPOLATION

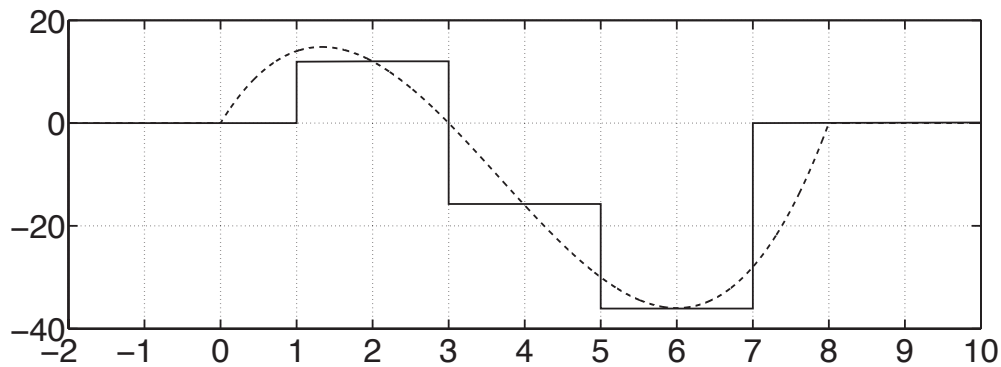
- 1) $x_{\text{éch}}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT) \delta(t - kT)$.
 $y(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT) \varphi(t - kT)$.
- 2) $X_{\text{éch}}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(\omega - \frac{2\pi n}{T})$. Donc $Y(\omega) = \Phi(\omega) X_{\text{éch}}(\omega) = \frac{1}{T} \Phi(\omega) \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(\omega - \frac{2\pi n}{T})$.
- 3) Le système est linéaire et n'est pas invariant par translation.
Le calcul des sorties suggéré en indication donne $y_1(t) = \text{tri}(\frac{t}{2})$ et $y_2(t) = 0$.
- 4) Le calcul donne :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 12\delta(t-2) - 16\delta(t-4) - 36\delta(t-6), \\ y_2(t) &= 12\text{rect}\left(\frac{t-2}{2}\right) - 16\text{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right) - 36\text{rect}\left(\frac{t-6}{2}\right), \\ y_3(t) &= 12\text{tri}\left(\frac{t-2}{2}\right) - 16\text{tri}\left(\frac{t-4}{2}\right) - 36\text{tri}\left(\frac{t-6}{2}\right). \end{aligned}$$

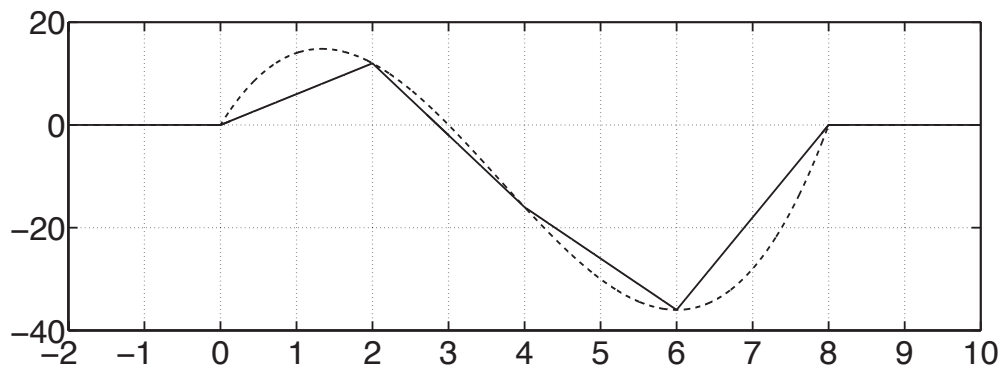
On obtient, pour S_1 :



Pour S_2 :



Enfin, pour S_3 :



- 5) $y_{\text{éch}}(t) - x_{\text{éch}}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (y(kT) - x(kT))\delta(t - kT) = 0 \Leftrightarrow x(kT) = y(kT) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.
 S_1 n'est pas interpolateur, tandis que S_2 et S_3 le sont.

Réponses à l'exercice 7.3 : CONVOLUTIONS ET PRODUITS SCALAIRES DANS LE DOMAINE DE FOURIER

- 1) $X(\omega) = \text{rect}(\frac{\omega}{2\pi}) \text{rect}(\frac{\omega}{2\pi}) = \text{rect}(\frac{\omega}{2\pi}) \Rightarrow x(t) = \text{sinc}(t)$.
- 2) $X(\omega) = \text{rect}(\frac{\omega}{2\pi}) 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(\omega - 2\pi k) = 2\pi \delta(\omega) \Rightarrow x(t) = 1$.
- 3) $X(\omega) = \text{rect}(\frac{\omega}{2\pi}) \times \frac{2\pi}{3} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(\omega - \frac{2\pi}{3}k) = \frac{2\pi}{3} [\delta(\omega - \frac{2\pi}{3}) + \delta(\omega) + \delta(\omega + \frac{2\pi}{3})] \Rightarrow x(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos(\frac{2\pi}{3}t)$.
- 4) $\langle \text{sinc}(t), \text{sinc}(t+5) \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi} \langle \text{rect}(\frac{\omega}{2\pi}), \text{rect}(\frac{\omega}{2\pi}) e^{j5\omega} \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \text{sinc}(-5) = 0$ (cours, p. 4-57).
- 5) $\langle \cos(3\pi t), \cos(3\pi t) \rangle_{L_2([0,2])} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k d_k^* = \frac{1}{2}$, où

$$c_k = d_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } k = \pm 3, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(cours, p. 4-56).

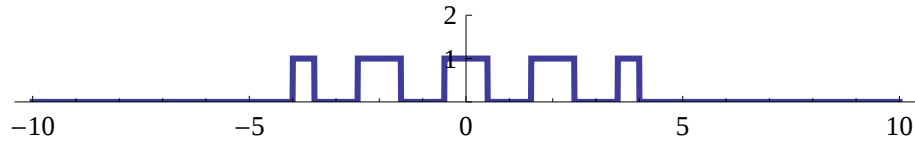
- 6) $\langle \sin(4\pi t), \sin(7\pi t) \rangle_{L_2([0,2])} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k d_k^* = 0$, où

$$c_k = \begin{cases} -\frac{j}{2} & \text{si } k = 4, \\ +\frac{j}{2} & \text{si } k = -4, \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases} \quad \text{et} \quad d_k = \begin{cases} -\frac{j}{2} & \text{si } k = 7, \\ +\frac{j}{2} & \text{si } k = -7, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Réponses à l'exercice 7.4 : ANALYSEUR SPECTRAL

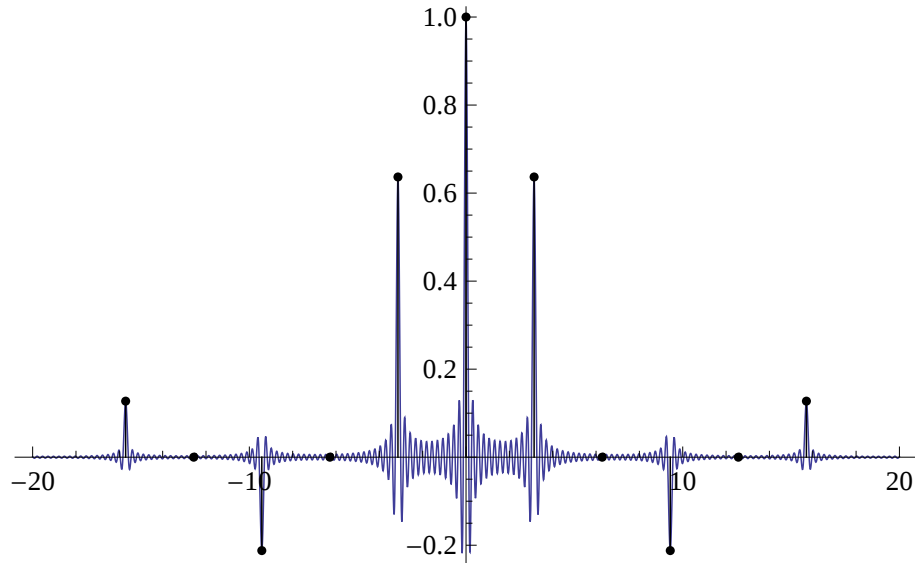
- 1) $X(\omega) = \pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \delta(\omega - \pi k)$.

2) (a) Représentons le signal $y(t)$:



(b)
$$Y(\omega) = \frac{T}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{T}{2\pi}(\omega - k\pi)\right).$$

(c) Fixons $T = 20$. Nous représentons $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \delta(\omega - \pi k)$ et $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{T}{2\pi}(\omega - k\pi)\right)$ sur le même graphe.

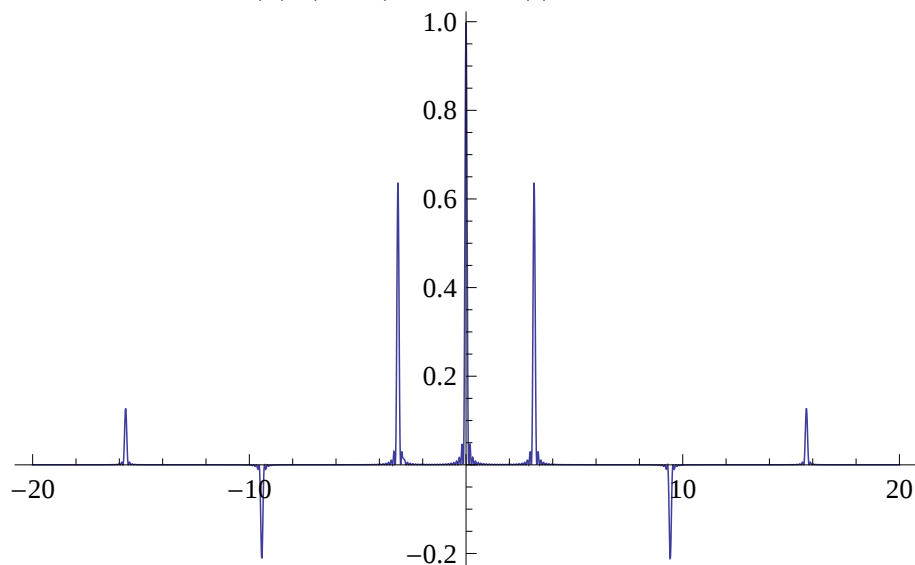


(d) Lorsque T augmente, les sinc deviennent de plus en plus localisés autour des supports des diracs composant $X(\omega)$ et $Y(\omega)$ ressemble de plus en plus à $X(\omega)$.

3) (a)
$$Y(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) W_T(\omega - k\pi).$$

(b)
$$W_{20}(\omega) = 20 \left(\text{sinc}\left(\frac{20\omega}{2\pi}\right) \right)^2 \text{ et } Y(\omega) = 10 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \left(\text{sinc}\left(\frac{10}{\pi}(\omega - \pi k)\right) \right)^2.$$

Nous représentons $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \left(\text{sinc}\left(\frac{10}{\pi}(\omega - \pi k)\right) \right)^2$.



(c) La nouvelle estimation de la réponse est beaucoup plus localisée autour des supports des diracs de la réponse fréquentielle idéale (celle de $x(t)$). Les "lobes" décroissent beaucoup plus rapidement.

- 4) Une stratégie générale est d'utiliser une fenêtre de pondération dont la transformée de Fourier a des "lobes" qui décroissent le plus rapidement possible. On a des exemples de telles fonctions à la page 4-73 du cours.