Série 9

Réponses à l'exercice 9.1 : CALCUL DANS LE DOMAINE DE FOURIER

De manière générale, on cherche à calculer les transformées de Fourier, simplifier l'expression dans le domaine fréquentiel, puis retourner dans le domaine temporel.

1) $2\,\mathrm{sinc}(t/3)$

2) $c_{gg}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-t^2/2}$

3) 1

4) $\frac{1}{10}\,\delta(t+10) - \frac{1}{5}\,\delta(t) + \frac{1}{10}\,\delta(t-10)$

Réponses à l'exercice 9.2 : LARGEUR DE BANDE ESSENTIELLE

1) $\frac{1}{2\pi}|X(\omega)|^2 = \frac{1}{2\pi(\omega^2+1)}$. La fonction est représentée sur la figure 1.

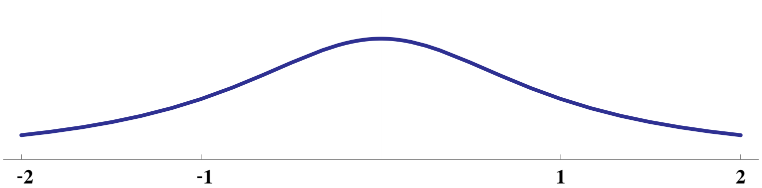

FIGURE 1 – Exercice **9.2.1** :densité spectrale d'énergie $\frac{1}{2\pi}\,|X(\omega)|^2$

2) $E_{\mathrm{tot}} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2t}dt = \frac{1}{2}$.
L'énergie de $X(\omega)$ se calcule comme $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2+1}d\omega = \pi$.
On vérifie qu'avec la formule de Parseval, on obtient bien $\frac{1}{2\pi}\pi = \frac{1}{2}$.

3) L'aire correspondant à $E_{[\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}]}$ est représentée en figure 2.
$E_{[\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}]} = 2\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\omega^2+1}d\omega = \frac{1}{6}$.
Il s'agit de $33,33\%$ de l'énergie totale.

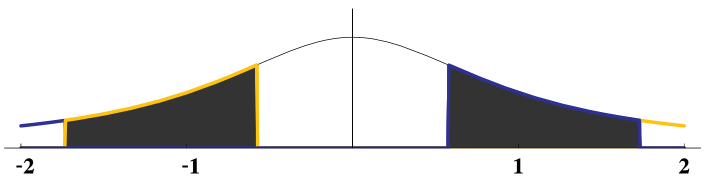

FIGURE 2 – Exercice **9.2.3** : Aire correspondant à $E_{[1/\sqrt{3},\sqrt{3}]}$

Réponses à l'exercice 9.3 : MOMENTS ET LOCALISATION

1) Le graphe de $f(t)$ est représenté sur la figure 3. La fonction f est une gaussienne de moyenne m et de variance σ^2.

2) La transformée de Fourier de f est $F(\omega) = e^{-(\sigma^2\omega^2/2+jm\omega)}$.

3) $\mu_f^{(0)} = 1,\ \mu_f^{(1)} = m,\ \mu_f^{(2)} = \sigma^2 + m^2$

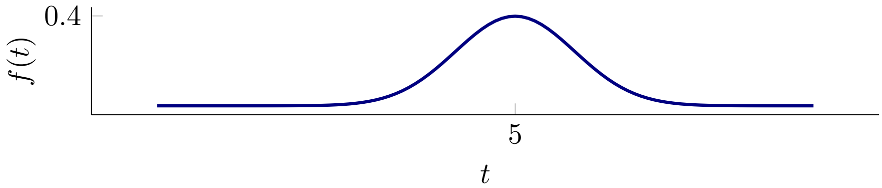

FIGURE 3 – Exercice **9.3.1** : La fonction $f(t)$.

4) Le moment d'ordre 1 $\mu_f^{(1)}$ correspond à la valeur moyenne de $f(t)$ (m étant par définition la moyenne de la gaussienne $f(t)$).
Le moment d'ordre 2 $\mu_f^{(2)}$ correspond à la somme de la variance de $f(t)$ et de sa moyenne au carré.

5) On commence par distribuer le produit dans l'intégrale, puis on identifie les différents moments de $f(t)$ présents pour obtenir le résultat désiré.

Réponses à l'exercice 9.4 : B-SPLINES POLYNOMIALES

1) $\beta_+^0(t) = \mathrm{rect}(t - 1/2) = u(t) - u(t-1)$,
$\beta_+^1(t) = \beta_+^0(t) * \beta_+^0(t)$,
$\beta_+^2(t) = \beta_+^0(t) * \beta_+^0(t) * \beta_+^0(t) = \beta_+^1(t) * \beta_+^0(t)$.
L'opération simple permettant de passer de $\beta_+^0(t)$ à $\beta_+^1(t)$ et de $\beta_+^1(t)$ à $\beta_+^2(t)$ est une convolution avec $\beta_+^0(t)$.

2) Les fonctions sont représentées sur la figure 4.

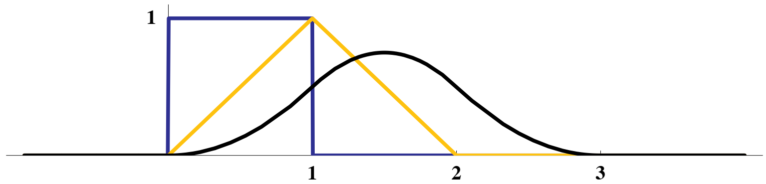

FIGURE 4 – Exercices **9.4.2** et **9.4.3** : les fonctions $\beta_+^0(t)$, $\beta_+^1(t)$ et $\beta_+^2(t)$.

3) Dans le domaine de Fourier, on vérifie que

$$\mathrm{j}\omega \left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}{\mathrm{j}\omega}\right)^3 = (1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}) \left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}{\mathrm{j}\omega}\right)^2 .$$

Sur chaque intervalle $[k, k+1]$, $\beta_+^1(t)$ est polynôme de degré 1. $\beta_+^2(t)$ est donc un polynôme de degré 2.

4) $\beta_+^2(0) = 0, \beta_+^2(1) = \beta_+^2(2) = \frac{1}{2}$.
$\beta_+^2(t)|_{t\in[0,1]} = \frac{t^2}{2}$,
$\beta_+^2(t)|_{t\in[1,2]} = -t^2 + 3t - \frac{3}{2}$,
$\beta_+^2(t)|_{t\in[2,3]} = \frac{t^2}{2} - 3t + \frac{9}{2}$.

5) $\mathrm{j}\omega \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}{\mathrm{j}\omega}\right)^{n+1} = (1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}) \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}{\mathrm{j}\omega}\right)^n$.
On a donc $\frac{d}{dt}\beta_+^{n+1}(t) = \beta_+^n(t) - \beta_+^n(t-1)$.