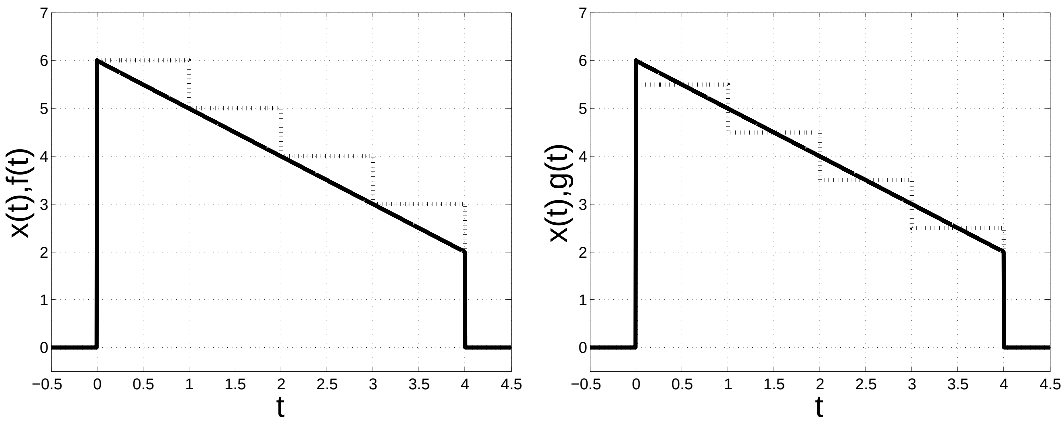
Série 3

Réponses à l'exercice 3.1 : APPROXIMATION DE SIGNAUX

1) On vérifie que $\langle \phi_n, \phi_k \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

2) $f = 6\,\phi_0 + 5\,\phi_1 + 4\,\phi_2 + 3\,\phi_3$.
$\|f - x\| = 2/\sqrt{3}$.

3) $g = 5.5\,\phi_0 + 4.5\,\phi_1 + 3.5\,\phi_2 + 2.5\,\phi_3$.
$\|g - x\| = 1/\sqrt{3}$.



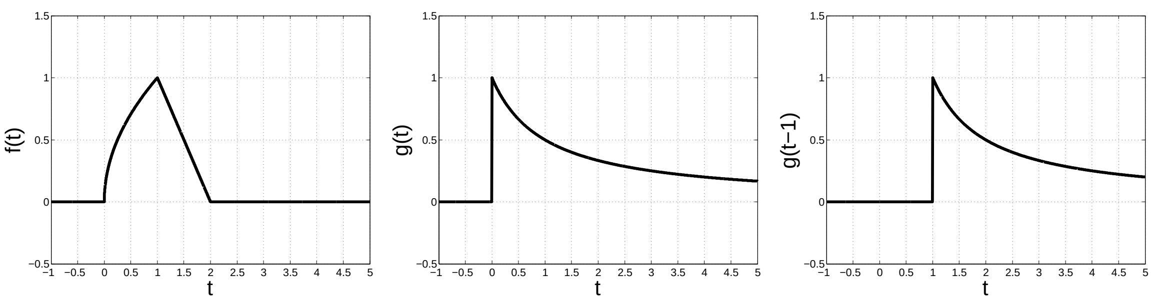
(a) Exercice **3.1.2** : $x(t)$ (trait plein), $f(t)$ (pointillé)

(b) Exercice **3.1.3** : $x(t)$ (trait plein), $g(t)$ (pointillé)

FIGURE 1 – Graphes des fonctions de l'exercice **3.1**

Réponses à l'exercice 3.2 : ÉNERGIE, DISTANCE, PRODUIT SCALAIRE

1) Les graphes sont représentés sur la Figure 2.



(a) $f(t)$

(b) $g(t)$

(c) $g(t-1)$

FIGURE 2 – Graphes des fonctions de l'exercice **3.2**

2) $\|f\|^2 = 5/6$ et $\|g\|^2 = \|g(\cdot - 1)\|^2 = 1$. Ces deux valeurs sont finies, donc les fonctions appartiennent bien à $L_2(\mathbb{R})$, l'espace des signaux à énergie finie.

3) $\langle g, g(\cdot - 1)\rangle = \ln(2)$. Comme $\|g\| = 1$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous assure que tout produit scalaire entre g et l'une de ses translatées est inférieur ou égal à 1 en valeur absolue.

4) $\|g(\cdot - 1) - g\| = (2 - 2\ln(2))^{1/2}$.

Réponses à l'exercice 3.3 : PRODUITS SCALAIRES ET APPROXIMATION

1) $c = \frac{3x_1y_1 + 2x_2y_2}{3y_1^2 + 2y_2^2}$

2) Les propriétés du produit scalaire sont bien vérifiées, et $\langle \mathbf{x} - c\mathbf{y}\, , \, \mathbf{x} - c\mathbf{y}\rangle = 3(x_1 - cy_1)^2 + 2(x_2 - cy_2)^2 = U(c)$.

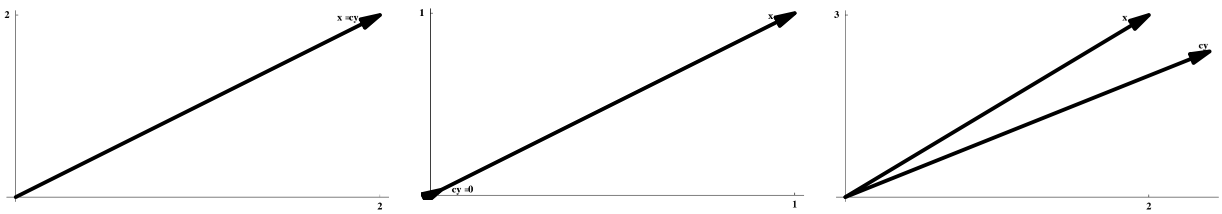
3) $c = \frac{\langle \mathbf{x}\, , \mathbf{y}\rangle_m}{\langle \mathbf{y}\, , \mathbf{y}\rangle_m} = \frac{3x_1y_1 + 2x_2y_2}{3y_1^2 + 2y_2^2}$. C'est donc la même valeur que pour le point **1)**.

4) (a) $c = 2/3, c\mathbf{y} = \mathbf{x} = (2, 2), U(2/3) = 0$,

(b) $c = 0, c\mathbf{y} = (0, 0), U(0) = 5$,

(c) $c = 12/5, c\mathbf{y} = (12/5, 12/5), U(12/5) = 6/5$.

Les réponses sont représentées sur la Figure 3. Les vecteurs du point (b) sont orthogonaux avec le produit scalaire m.



(a) $\mathbf{x} = (2, 2), \mathbf{y} = (3, 3)$ (b) $\mathbf{x} = (1, 1), c\mathbf{y} = (0, 0)$ (c) $\mathbf{x} = (2, 3), \mathbf{y} = (\frac{12}{5}, \frac{12}{5})$

FIGURE 3 – Réponses de l'exercice **3.3**

Réponses à l'exercice 3.4 : INTERCORRÉLATION ET DÉTECTION DE SIGNAUX

1) Utiliser la distributivité de la convolution et le fait que $f(t - t_0) = f(t) * \delta(t - t_0)$.

2) $c_{pu}(\tau) = \mathrm{tri}(\tau)$, avec $\mathrm{tri}(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau| & \text{si } |\tau| \leq 1; \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$

3) $c_{ps_1}(\tau) = \mathrm{tri}(\tau + 3) + \mathrm{tri}(\tau + 1) - \mathrm{tri}(\tau) - \mathrm{tri}(\tau - 3)$.

4) Voir Figure 4.

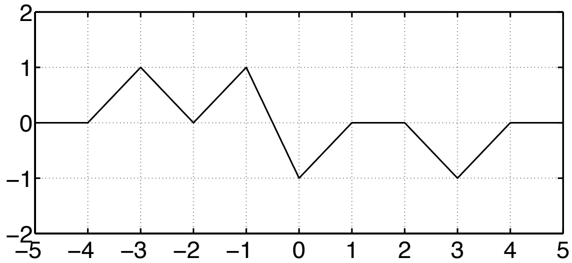


FIGURE 4 – La fonction d'intercorrélation $c_{p\,s_1}(\tau)$.