ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Signaux et Systèmes II

Annexe: La décomposition en fractions simples

Mars 2008

Fractions rationnelles et fractions simples

Une ***fraction rationnelle*** $F(X)$ est le rapport de deux polynômes en la variable X

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{p_0 + p_1 X + p_2 X^2 + \cdots + p_N X^N}{q_0 + q_1 X + q_2 X^2 + \cdots + q_M X^M}$$

numérateur

dénominateur

Dans cette représentation, les polynômes P et Q sont ***premiers entre eux***: on ne peut pas avoir *à la fois* $P(X_0) = 0$ *et* $Q(X_0) = 0$.

Une ***fraction simple*** est une fraction rationnelle dont le numérateur est $P(X) = 1$ et le dénominateur ne contient qu'une seule racine, souvent complexe, $Q(X) = (X - X_0)^m$ de multiplicité (entière) $m \geq 1$

$$F(X) = \frac{1}{(X - X_0)^m}$$

Théorème de décomposition

Toute fraction rationnelle peut se décomposer, de manière unique, comme une somme de fractions simples à coefficients complexes et d'un polynôme:

$$
\begin{aligned}
F(X) = \frac{a_{1,1}}{X - X_1} + \frac{a_{1,2}}{(X - X_1)^2} + \cdots + \frac{a_{1,m_1}}{(X - X_1)^{m_1}} &+ \\
\frac{a_{2,1}}{X - X_2} + \frac{a_{2,2}}{(X - X_2)^2} + \cdots + \frac{a_{2,m_2}}{(X - X_2)^{m_2}} &+ \\
\ddots \qquad\qquad\qquad\qquad \ddots & \\
\frac{a_{k,1}}{X - X_k} + \frac{a_{k,2}}{(X - X_k)^2} + \cdots + \frac{a_{k,m_k}}{(X - X_k)^{m_k}} &+ \quad R(X)
\end{aligned}
$$

où l'on a défini (rappel: $N =$ degré du numérateur, $M =$ degré du dénominateur)

- $X_1, X_2, \cdots X_k$ sont les k *racines distinctes* du dénominateur $Q(X)$
- $m_1, m_2, \cdots m_k$ sont les *multiplicités* de chaque racine $X_1, X_2, \cdots X_k$
- $R(X)$ est un polynôme de degré $N - M$ si $N \geq M$, et sinon $R(X) = 0$

Note: on a donc $Q(X) = q_M \cdot (X - X_1)^{m_1} (X - X_2)^{m_2} \cdots (X - X_k)^{m_k}$
ainsi que $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = M$

1. Détermination du polynôme $R(X)$

$R(X)$ est le ***quotient*** de la ***division Euclidienne*** de $P(X)$ par $Q(X)$:

$$P(X) = Q(X) \cdot R(X) + \underbrace{S(X)}_{\deg(S) \le \deg(Q)-1}$$

où $S(X)$ est le ***reste*** de la division. Par conséquent:

$$F(X) = R(X) + \frac{S(X)}{Q(X)}$$

Algorithme de division Euclidienne pour $P(X) = X^2 - X + 1$ et $Q(X) = X + 1$:

$$\begin{array}{rr|l}
 & X^2 - X + 1 & X + 1 \\ \cline{3-3}
- & X^2 + X + 0 & X - 2 \longleftarrow R(X) \\ \cline{2-2}
 & -2X + 1 & \\
- & -2X - 2 & \\ \cline{2-2}
S(X) \longrightarrow & 3 &
\end{array}$$

2. Décomposition de $S(X)/Q(X)$

En multipliant la décomposition en éléments simples de $F(X)$ par $Q(X)$ on obtient:

$$
\begin{aligned}
S(X) = a_{1,1}\frac{Q(X)}{X-X_1} + a_{1,2}\frac{Q(X)}{(X-X_1)^2} + \cdots + a_{1,m_1}\frac{Q(X)}{(X-X_1)^{m_1}} &+ \\
a_{2,1}\frac{Q(X)}{X-X_2} + a_{2,2}\frac{Q(X)}{(X-X_2)^2} + \cdots + a_{2,m_2}\frac{Q(X)}{(X-X_2)^{m_2}} &+ \\
\ddots \qquad\qquad\qquad \ddots & \\
a_{k,1}\frac{Q(X)}{X-X_k} + a_{k,2}\frac{Q(X)}{(X-X_k)^2} + \cdots + a_{k,m_k}\frac{Q(X)}{(X-X_k)^{m_k}} &
\end{aligned}
$$

Il faut trouver les $M = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ coefficients $a_{l,m}$.

Méthode générale:

- écrire l'égalité ci-dessus pour M *valeurs différentes* de $X = x_1, x_2, \cdots, x_M$
- résoudre le système linéaire comportant M *équations* pour M *inconnues*.

Remarque: certaines valeurs de X sont plus intéressantes que d'autres car elles simplifient les expressions (moins de termes). Par exemple, les racines de $Q(X)$: $X_1, X_2, \cdots, X_k$.

Exemple

Décomposition en éléments simples de

$$F(X) = \frac{X^3 + 1}{(X-1)^2(X+2)}$$

1. Division Euclidienne de $X^3 + 1$ par $(X-1)^2(X+2)$:

$$\underbrace{X^3 + 1}_{P(X)} = \underbrace{(X-1)^2(X+2)}_{Q(X)} \cdot \underbrace{1}_{R(X)} + \underbrace{3X - 1}_{S(X)}$$

2. Décomposition en fractions simples de $S(X)/Q(X)$:

$$\underbrace{3X-1}_{S(X)} = a_{1,1}\underbrace{(X-1)(X+2)}_{\frac{Q(X)}{X-1}} + a_{1,2}\underbrace{(X+2)}_{\frac{Q(X)}{(X-1)^2}} + a_{2,1}\underbrace{(X-1)^2}_{\frac{Q(X)}{X+2}}$$

Il faut écrire *trois équations* puisqu'il y a *trois inconnues*. On peut prendre par exemple $X = -2, 0$ et 1, d'où:

$$\begin{cases} 3\times(-2)-1 = a_{1,1}\times(-2-1)\times(-2+2) + a_{1,2}\times((-2)+2) + a_{2,1}\times(-2-1)^2 \\ 3\times 0-1 = a_{1,1}\times(0-1)\times(0+2) + a_{1,2}\times(0+2) + a_{2,1}\times(0-1)^2 \\ 3\times 1-1 = a_{1,1}\times(1-1)\times(1+2) + a_{1,2}\times(1+2) + a_{2,1}\times(1-1)^2 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} -7 = 9 \cdot a_{2,1} \\ -1 = -2 \cdot a_{1,1} + 2 \cdot a_{1,2} + a_{2,1} \\ \;\; 2 = 3 \cdot a_{1,2} \end{cases}$$

d'où finalement $a_{1,1} = 7/9$, $a_{1,2} = 2/3$ et $a_{2,1} = -7/9$. On a donc:

$$\frac{X^3+1}{(X-1)^2(X+2)} = \frac{7/9}{X-1} + \frac{2/3}{(X-1)^2} - \frac{7/9}{X+2} + 1$$

Vérification (toujours le faire!) avec une autre valeur de X, par exemple $X = -1$:

$$\underbrace{\frac{(-1)^3+1}{(-1-1)^2(-1+2)}}_{0} = \frac{7/9}{\underbrace{-1-1}_{-7/18}} + \frac{2/3}{\underbrace{(-1-1)^2}_{1/6}} - \frac{7/9}{\underbrace{-1+2}_{7/9}} + 1$$

$$= \frac{-7+3-14+18}{18} = 0$$

Application aux S&S analogiques

En signaux et systèmes analogiques, les éléments simples sont de la forme (cf. tables de transformées de Fourier)

$$\frac{1}{(j\omega - s)^n}$$

où ω est la variable fréquentielle et s un paramètre.

Un des problèmes typiques consiste à trouver la *réponse impulsionnelle* d'un filtre analogique donné par sa *réponse fréquentielle* $H(\omega)$ sous forme de fraction rationnelle en ω.

Solution

- 1. poser $X = j\omega$ et exprimer $F(X) = H(X/j)$
- 2. décomposer $F(X)$ en éléments simples $1/(X - X_k)^n$
- 3. remplacer X par $j\omega$ ce qui donne une décomposition de $H(\omega)$ en éléments simples $1/(j\omega - X_k)^n$, dont les TF inverses sont données dans les tables.

Exemple: Soit à trouver la réponse impulsionnelle $h(t)$ dont la TF est

$$H(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 2j\omega + 2}$$

Solution

- 1. On pose $F(X) = H(\omega)$ où $\omega = X/j$ ce qui donne

$$F(X) = \frac{1}{X^2 + 2X + 2}$$

dont les deux pôles sont $-1-j$ et $-1+j$.

- 2. En utilisant une des techniques données pour la décomposition en éléments simples, on obtient pour

$$F(X) = \frac{A}{X+1+j} + \frac{B}{X+1-j}$$

les valeurs $A = j/2$ et $B = -j/2$ (vérification en faisant $X = 0$).

- 3. On a donc, en revenant à ω par $X = j\omega$:

$$H(\omega) = \frac{j/2}{j\omega+1+j} + \frac{-j/2}{j\omega+1-j}$$

et en utilisant les tables qui donnent $u(t)\cdot e^{st} \xleftrightarrow{\text{Fourier}} 1/(j\omega - s)$, on déduit

$$h(t) = \frac{j}{2}u(t)\cdot e^{-(1+j)t} - \frac{j}{2}u(t)\cdot e^{-(1-j)t}$$

Application aux S&S numériques

En signaux et systèmes discrets, les éléments simples sont de la forme

$$\frac{1}{(1-az^{-1})^n}$$

où z est la variable de la transformée en z et a un paramètre.

Un des problèmes typiques consiste à trouver la *réponse impulsionnelle causale* d'un filtre analogique donné par sa *fonction de transfert* $H(z)$ sous forme de fraction rationnelle en z.

Solution

- 1. poser $X = z^{-1}$ et exprimer $F(X) = H(X^{-1})$
- 2. décomposer $F(X)$ en éléments simples $1/(X - X_k)^n$
- 3. remplacer X par z^{-1} ce qui donne une décomposition de $H(z)$ en éléments simples $1/(z^{-1} - X_k)^n = (-a_k)^n / (1 - a_k z^{-1})^n$ en posant $a_k = 1/X_k$. Les TZ inverses de ces éléments sont données dans les tables.

Exemple: Soit à trouver la réponse impulsionnelle $h[n]$ dont la transformée en z est

$$H(z) = \frac{z}{z^2 + 2z + 2}$$

Solution

- 1. On pose $F(X) = H(z)$ où $z = X^{-1}$, ce qui donne

$$F(X) = \frac{X^{-1}}{X^{-2} + 2X^{-1} + 2} = \frac{X}{1 + 2X + 2X^2}$$

dont les deux pôles sont $(-1-j)/2$ et $(-1+j)/2$.

- 2. En utilisant une des techniques données pour la décomposition en éléments simples, on obtient pour

$$F(X) = \frac{A}{X + (1+j)/2} + \frac{B}{X + (1-j)/2}$$

les valeurs $A = (1-j)/4$ et $B = (1+j)/4$ (vérification en faisant $X = 0$).

- 3. On a donc, en revenant à z par $X = z^{-1}$:

$$H(z) = \frac{(1-j)/4}{z^{-1} + (1+j)/2} + \frac{(1+j)/4}{z^{-1} + (1-j)/2}$$

Afin d'utiliser les tables qui donnent $a_+[n] = u[n] \cdot a^n \xleftrightarrow{\text{Transf. en } z} 1/(1 - az^{-1})$, on réécrit $H(z)$ sous la forme

$$H(z) = \frac{-j/2}{1 - (j-1)z^{-1}} + \frac{j/2}{1 - (-j-1)z^{-1}}$$

(car $((1+j)/2)^{-1} = 1 - j$ et $((1-j)/2)^{-1} = 1 + j$) d'où finalement

$$h[n] = -j/2 \cdot (j-1)_+[n] + j/2 \cdot (-j-1)_+[n]$$