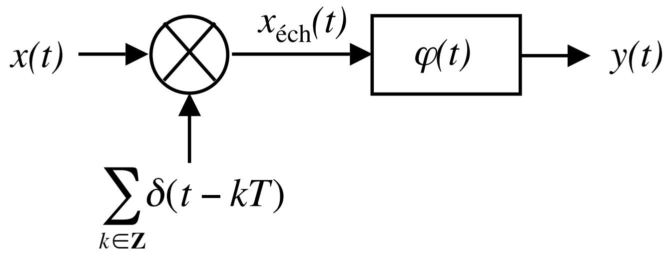
Série 8

Exercice 8.1 : RECONSTRUCTION PAR FILTRAGE IDÉAL (BASIQUE)

Voici un nouvel exercice sur l'échantillonnage et la reconstruction. On étudie ici un filtrage dit idéal de part son effet - qu'il s'agira de comprendre - sur la transformée de Fourier du signal. Cet exercice est à rapprocher du théorème de Shannon.

Soit S le système tel que $S\{x\}(t) = y(t)$, représenté ci-dessous, avec un pas d'échantillonnage T inconnu et $\varphi(t) = \mathrm{sinc}(t)$.



1) Donner l'expression de $X_{\text{éch}}(\omega)$ pour une entrée $x(t)$ quelconque.

2) Le filtre de réponse impulsionnelle $\varphi(t)$ est-il passe-haut, passe-bas ou passe-bande ? Justifier.

Pour les deux questions suivantes, on donne en entrée un signal dont la transformée de Fourier est $X(\omega) = \delta(\omega - \frac{\pi}{2}) + \delta(\omega + \frac{\pi}{2})$.

3) Calculer $Y(\omega)$ et en déduire $y(t)$ pour $T = 1$, puis $T = 3$.

4) Donner une condition sur le pas d'échantillonnage T telle que la sortie soit égale à l'entrée, soit $y(t) = x(t)$ (i.e. reconstruction parfaite).

On revient maintenant au cas général où $x(t)$ est une entrée quelconque dont la transformée de Fourier est notée $X(\omega)$.

5) Pour T et x quelconques, donner une condition sur les échantillons $x(kT)$, $k \in \mathbb{Z}$ de $x(t)$, pour que $y(t) = 0$.

6) En déduire un signal d'entrée $x(t)$ non-nul et à bande limitée tel que $y(t) = 0$.

Exercice 8.2 : ÉCHANTILLONNAGE ET RECONSTRUCTION (BASIQUE)

Il s'agit ici d'un exercice important qui illustre avec des signaux sinusoïdaux le problème de reconstruction et permet ainsi de comprendre le théorème de Shannon. Il rappelle aussi les équivalences entre échantillonage et périodisation dans les domaines temporels et fréquentiels, et introduit le concept important de repliement spectral.

Soient les signaux sinusoïdaux

$$x(t) = \cos(2\pi t/3 + \pi/2) \qquad \text{et} \qquad y(t) = \sin(\pi t/3).$$

Ces signaux sont échantillonnés avec un pas $T = 2$ et l'instant $t = 0$ est un instant d'échantillonnage.

1) Représenter $x(t)$ et $y(t)$ sur des graphiques séparés. Ajouter sur chacun d'eux les signaux échantillonnés $x_e(t)$ et respectivement $y_e(t)$.

2) Écrire $x_{\mathrm{e}}(t)$ et $y_{\mathrm{e}}(t)$ en fonction de $x(t)$ et $y(t)$, respectivement. Donner et comparer les valeurs des suites d'échantillons $x(kT)$ et $y(kT)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Que peut-on observer ?

3) Calculer et représenter les transformées de Fourier de $x(t)$ et $y(t)$, notées $X(\omega)$ et $Y(\omega)$. Ces signaux sont-ils à bande limitée ? Si oui, quelles sont leurs fréquences maximales ?

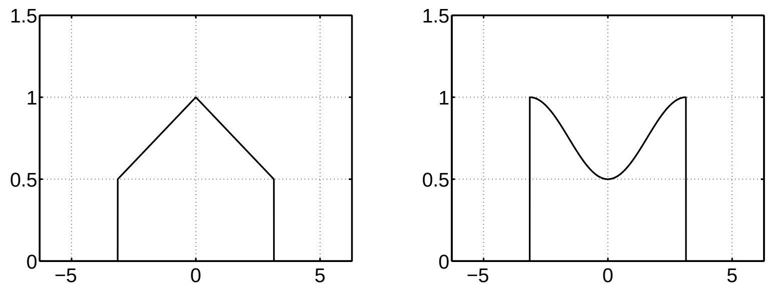
4) Exprimer $X_{\mathrm{e}}(\omega)$ et $Y_{\mathrm{e}}(\omega)$ en fonction de $X(\omega)$ et $Y(\omega)$, respectivement. Représenter graphiquement $X_{\mathrm{e}}(\omega)$ et $Y_{\mathrm{e}}(\omega)$. Que peut-on observer ?

5) On souhaite désormais reconstruire les signaux d'origine x et y à l'aide de la formule de Shannon et des signaux échantillonés $x_{\mathrm{e}}(t)$ et $y_{\mathrm{e}}(t)$. Est-ce possible ? Le cas échéant, vérifier que la reconstruction est exacte en utilisant la transformée de Fourier.

Exercice 8.3 : MULTIPLEXAGE EN FRÉQUENCE (INTERMÉDIAIRE)

Cet exercice porte sur le concept nouvellement introduit de modulation qui doit être maîtrisé. On y démontre de plus qu'on peut émettre deux signaux à bande limitée dans le même canal de transmission, ce qu'on appelle le multiplexage. Ce principe est notamment utilisé en téléphonie, pour les lignes fixes et les téléphones mobiles.

On considère des signaux $x(t)$ et $y(t)$ représentés sur la figure 1, dont les transformées de Fourier sont à support dans $[-\pi, \pi]$. On souhaite envoyer simultanément ces deux signaux dans le même canal de communication.



(a) $|X(\omega)|$ (b) $|Y(\omega)|$

FIGURE 1 – Exemples de signaux à support fréquentiel dans $[-\pi, \pi]$.

Dans un premier temps, on applique à ces signaux une modulation en amplitude aux fréquences respectives ω_1 et ω_2 telles que $\pi \ll \omega_1 < \omega_2$, c'est-à-dire que l'on les multiplie par des porteuses sinusoïdales $p_1(t) = \cos(w_1 t)$ et $p_2(t) = \cos(w_2 t)$. La somme des deux signaux obtenus, notée $s(t) = p_1(t)x(t) + p_2(t)y(t)$, est envoyée dans le canal.

1) Expliciter $s(t)$, en fonction de $x(t)$ et $y(t)$.

2) Représenter l'allure du module de $S(\omega)$ pour les signaux de la figure 1.

3) Quelle est la valeur minimale théorique de $\omega_2 - \omega_1$ afin d'éviter tout recouvrement spectral ? Quelle est alors la largeur minimale de bande occupée ? Ce choix est-il réaliste ? Justifier.

Une méthode plus efficace consiste à choisir $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$, mais à prendre les porteuses déphasées de $\pi/2$, soit $p_1(t) = \cos(w_0 t)$ et $p_2(t) = \sin(w_0 t)$. On note alors $v(t)$ le signal envoyé. Le processus de reconstruction est alors plus complexe et est schématisé sur la Figure 2.

4) Expliciter $v(t)$, en fonction de $x(t)$ et $y(t)$.

5) À quelle condition sur ω_0 la reconstruction est-elle possible ? En pratique, cette condition est-elle réaliste ? Justifier.

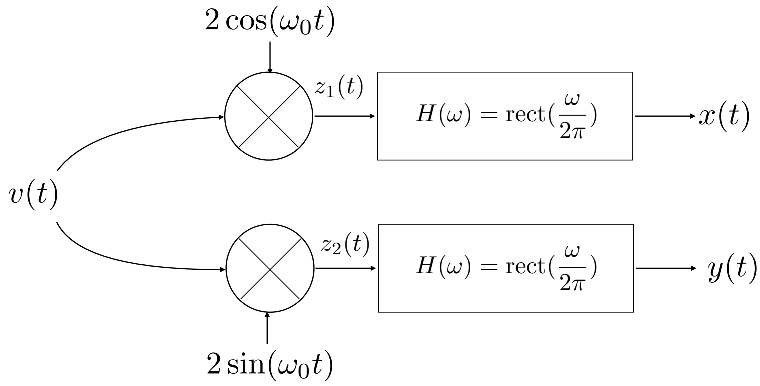


FIGURE 2 – Exercice **8.3.5** : Reconstruction des signaux

6) Quelle est la largeur de bande utilisée par cette méthode de transmission ?

Exercice 8.4 : SYSTÈME DÉRIVATEUR (INTERMÉDIAIRE)

Cet exercice porte sur l'étude du système dérivateur. Le but sera ici de comparer le résultat d'un calcul direct (vous saviez après tout dériver des fonctions avant de suivre le cours de Signaux et Systèmes) avec les techniques vues en cours, autour de la transformée de Fourier. On profitera notamment de cet exercice pour réviser les notions de périodisations et de réponse d'un système à une excitation sinusoïdale.

Soit le système dérivateur D tel que $\mathrm{D}\{x\}(t) = x'(t)$.

1) Donner les réponses impulsionnelle $h(t)$ et fréquentielle $H(\omega)$ de D. Tracer la réponse fréquentielle en amplitude et en phase de D.

2) On définit l'entrée $x_1(t) = 3\cos(3t + \pi/3)$. Calculer explicitement la sortie $y_1(t) = \mathrm{D}\{x_1\}(t)$ du système. Calculer également $y_1(t)$ en utilisant la formule de réponse à une excitation sinusoïdale réelle et comparer les résultats.
Indication : Se reporter à la slide 5-5 du cours.

3) Soit dorénavant $x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{tri}\,(2(t-k))$ l'entrée du système. Montrer que $x_2(t)$ est 1-périodique. Représenter la fonction sur l'intervalle $[-2, 2]$.

4) Calculer les coefficients de Fourier de $x_2(t)$. En déduire les coefficients de Fourier de $y_2(t)$ en utilisant la formule de réponse à une excitation périodique.
Indication : On se reportera à la slide 5-7 du cours pour calculer la réponse à une excitation périodique avec $T_0 = 1$.

5) Par un calcul direct, donner explicitement la valeur de $y_2(t)$. En déduire par cette nouvelle méthode les coefficients de Fourier de $y_2(t)$. Comparer les deux résultats. Tracer enfin la fonction $y_2(t)$ sur l'intervalle $[-2, 2]$.