Série 9

Exercice 9.1 : CALCUL DANS LE DOMAINE DE FOURIER (BASIQUE)

Cet exercice est destiné à montrer que les calculs peuvent être grandement facilités par un passage dans le domaine de Fourier. On utilisera la définition de la transformée de Fourier, ses propriétés et la transformée de Fourier des signaux usuels.

Simplifier les calculs suivants en effectuant les calculs dans le domaine de Fourier :

1) $\mathrm{sinc}(t/3) * \mathrm{sinc}(t/2)$,

2) $c_{gg}(t)$, avec $g(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$,

3) $\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n)\right) * \mathrm{rect}(t-\pi)$,

4) $\mathrm{D}^2 \{\mathrm{tri}(t/10)\}$
Indication : appliquer la formule d'Euler dans le domaine de Fourier.

Exercice 9.2 : LARGEUR DE BANDE ESSENTIELLE (BASIQUE)

On cherche désormais à s'entrainer à manipuler les notions d'énergie dans le domaine fréquentiel, de densité spectrale d'énergie, d'énergie dans une bande de fréquence et d'énergie totale d'un signal. On travaillera également l'utilisation de la relation de Parseval. Les pages 4-61 et 4-62 du polycopié contiennent la théorie nécessaire à la résolution de ce problème.

Soit le signal $x(t) = \mathrm{e}^{-t}u(t)$.

1) Calculer et tracer l'allure de la densité spectrale d'énergie $\frac{1}{2\pi}|X(\omega)|^2$.

2) Calculer l'énergie E_{tot} de $x(t)$. Calculer aussi explicitement l'énergie du signal $X(\omega)$. Comparer les résultats avec ceux obtenus par la formule de Parseval.
Indication : On rappelle que $\arctan'(x) = 1/(1+x^2)$.

3) L'énergie totale de $x(t)$ correspond à l'aire sous le graphe de $\frac{1}{2\pi}|X(\omega)|^2$. On considère maintenant la bande fréquentielle $[\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}]$. Dessiner l'aire qui correspond à l'énergie $E_{[\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}]}$ dans cette bande. Calculer la valeur de $E_{[\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}]}$. Quel pourcentage de l'énergie totale est contenu dans cette bande de fréquence ?

Exercice 9.3 : MOMENTS ET LOCALISATION (BASIQUE)

On a ici un exercice typique de calcul des moments de fonctions. On rappelle que les moments d'ordre 1 *et* 2 *sont à voir comme des "mesures de dispersion". Il est aussi suggéré de revoir dans le cours le lien entre la transformée de Fourier et le calcul des moments d'une fonction.*

Soit la fonction $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$ pour $m > 0$ et $\sigma > 0$.

1) Représenter graphiquement $f(t)$ pour $m = 5$ et $\sigma = 1$. À quoi correspondent les quantités m et σ de la fonction $f(t)$?

2) Calculer la transformée de Fourier de $f(t)$ en utilisant les tables.

3) Calculer les moments $\mu_f^{(0)}, \mu_f^{(1)}$ et $\mu_f^{(2)}$ à l'aide de la transformée de Fourier de $f(t)$.

4) Que peut-on conclure sur l'interprétation des moments d'ordre 1 et 2 ?

5) Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mu_f^{(1)})^2 f(t)\, dt = \sigma^2$. Qu'en conclut-on ?

Exercice 9.4 : B-SPLINES POLYNOMIALES (AVANCÉ)

Il s'agit ici d'un exercice de synthèse qui permet la manipulation de différentes propriétés liées à la transformée de Fourier et à la convolution. Il s'agit également d'une occasion de survoler le concept de spline. Ces fonctions polynomiales par morceaux sont utilisées pour approximer des contours complexes dans de multiples domaines, par exemple dans les logiciels de dessin (Photoshop, GIMP, etc.).

Dans le domaine de Fourier, on définit une B-spline causale d'ordre n par

$$B_+^n(\omega) = \left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}{\mathrm{j}\omega}\right)^{n+1}.$$

1) En utilisant la formule d'Euler, donner la transformée de Fourier inverse de $B_+^0(\omega)$, que l'on note $\beta_+^0(t)$. Montrer que les fonctions $\beta_+^1(t)$ et $\beta_+^2(t)$ sont des convolutions de la fonction $\beta_+^0(t)$. En déduire également quelle opération simple permet de passer de $\beta_+^0(t)$ à $\beta_+^1(t)$ et de $\beta_+^1(t)$ à $\beta_+^2(t)$.

2) Représenter sur le même graphique $\beta_+^0(t)$ et $\beta_+^1(t)$.

3) En utilisant les propriétés de décalage et de dérivation de la transformée de Fourier, vérifier que $\frac{d}{dt}\beta_+^2(t) = \beta_+^1(t) - \beta_+^1(t-1)$. En déduire que sur tout intervalle entier de la forme $[k, k+1]$, $k \in \mathbb{Z}$, $\beta_+^2(t)$ est une fonction polynomiale du second degré.

4) En s'aidant de l'expression de $\beta_+^2(t)$ obtenue en **1)**, donner les valeurs de cette fonction en $t = 0, 1, 2$. En déduire les polynômes définissant $\beta_+^2(t)$ pour chaque intervalle entier. Représenter $\beta_+^2(t)$ sur le même graphique qu'en **1)**.

5) En s'inspirant de la question **3)**, exprimer la dérivée de $\beta_+^{n+1}(t)$ en fonction de versions translatées de $\beta_+^n(t)$ en 0 et en 1.