Série 2

Exercice 2.1 : (BASIQUE) IMPULSION DE DIRAC

On cherche ici à se familiariser avec les propriétés élémentaires de la convolution, en particulier ses relations avec l'impulsion de Dirac. Les manipulations de cet exercice doivent devenir naturelles.

Simplifier les expressions suivantes en faisant disparaitre l'impulsion de Dirac, puis les représenter graphiquement :

1) $\delta(t) * \mathrm{rect}(t)$.

2) $\delta(t) * \mathrm{rect}(t-1)$.

3) $\delta(t-1) * \mathrm{rect}(t)$.

4) $\delta(t-1) * \mathrm{rect}(t-1)$.

Simplifier les expressions suivantes puis les représenter graphiquement :

5) $[\delta(t-1) - \delta(t-2)] * [\delta(t-1) + \delta(t-2)]$.

6) $[\delta(t+2) - \mathrm{e}^{-1}\delta(t+1)] * [\mathrm{e}^{-t}u(t)]$.

7) $[\delta(t+2) - \mathrm{e}^{-1}\delta(t+1)] \cdot [\mathrm{e}^{-t}u(t)]$. (Comparer avec le graphe précedent.)

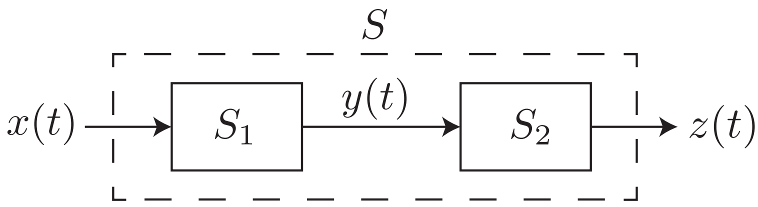
8) $\mathrm{D}\{\delta(t-2)\} * [\mathrm{e}^{-t}u(t)]$.

Exercice 2.2 : (BASIQUE) ANALYSE DE SYSTÈME

Cet exercice vise à tester vos connaissances sur les différents moyens de décrire un système. Il s'agit d'un problème très typique dans lequel sont regroupées plusieurs notions vues en cours. Plusieurs approches sont en général correctes afin de répondre aux questions, mais certaines sont plus efficaces que d'autres.

On considère le système S composé de la mise en série des sous-systèmes S_1 (on appelle $y(t)$ la sortie de ce premier système) et S_2 comme représenté par le schéma-bloc ci-dessous, avec

$$\begin{aligned} S_1 &: \quad y'(t) + 5y(t) = x(t) \\ S_2 &: \quad h_2(t) = 2\delta'(t) + 3\delta(t). \end{aligned}$$



1) Exprimer le système S_1 à l'aide d'opérateurs.

2) Donner $h_1(t)$, la réponse impulsionnelle du système S_1.

3) Le système S_1 est-il causal ? RIF ? BIBO-stable ? Justifier.

4) Donner l'équation différentielle correspondant au système S_2.

5) Calculer $h(t)$, la réponse impulsionnelle du système complet S.

6) Le système S est-il causal ? RIF ? Justifier.

7) Exprimer les réponses $z_i(t)$ du système S aux entrées $x_i(t)$ suivantes :

(a) $x_1(t) = \delta(t)$.
(b) $x_2(t) = u\left(\frac{t}{3}\right)$.
(c) $x_3(t) = u(t)\mathrm{e}^{-2t}$.

Exercice 2.3 : (BASIQUE) OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

Voici votre premier exercice sur des systèmes différentiels. L'objectif est de bien maîtriser les concepts de réponse impulsionnelle et de fonction de Green des opérateurs différentiels. On gagnera à se référer aux slides 2-31 à 2-40 du cours.

1) Quelle est la réponse impulsionnelle de l'opérateur $2\mathrm{D}-\mathrm{I}$? Quelle est sa fonction de Green causale ?

2) De quel opérateur la fonction $\frac{1}{2}u(t)\mathrm{e}^{-t}$ est-elle la fonction de Green ? De quel opérateur est-elle la réponse impulsionnelle (on formulera une équation différentielle le caractérisant) ?

3) Soit le système dont l'entrée x et la sortie y sont reliées par l'équation differentielle $4y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = x(t)$. Ecrire le polynôme en D et I correspondant à cette équation. En déduire la réponse impulsionnelle causale de ce système. De quel opérateur cette dernière est-elle la fonction de Green ?

4) Déduire de la question précédente la réponse impulsionnelle causale du système donné par $4y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = x'(t)$ (x entrée, y sortie).

5) On reprend le système de la question **3)** défini par $4y''(t)+4y'(t)+5y(t) = x(t)$. Donner la réponse de ce système aux entrées suivantes : $x_1(t) = \delta(t)$, $x_2(t) = 4\delta''(t) + 4\delta'(t) + 5\delta(t)$ et $x_3(t) = \mathrm{e}^{-t/3}$.

Exercice 2.4 : (BASIQUE) RÉPONSES IMPULSIONNELLES

On s'entraîne ici à déterminer la réponse impulsionnelle d'un système défini par une équation différentielle.

Pour chacune des équations différentielles suivantes, exprimer le système défini par $x(t) \mapsto y(t)$ en utilisant les opérateurs D et I, trouver sa réponse impulsionnelle causale et la tracer. Indiquer enfin pour chaque système, en justifiant, s'il est causal-stable BIBO.

Indication : Trouver l'opérateur T *tel que* $\mathrm{T}\{x\}(t) = y(t)$. *Utiliser la table A-5 sur les opérateurs de convolution du cours.*

1) $y'(t) - y(t) = x(t)$.

2) $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = x(t)$.

3) $y''(t) - 5y'(t) - 14y(t) = x(t)$.

4) $2y''(t) + 4y(t) = x'(t) - x(t)$.
Pour cette dernière question, on ne cherchera pas à tracer la réponse impulsionnelle.