

Série 11

Exercice 11.1 : TRANSFORMÉES DE FOURIER

Voici une nouvelle fournée de calculs de transformée de Fourier pour s'entraîner. Comme d'habitude, on cherche à s'en sortir à partir des tables et sans calcul de l'intégrale.

Calculer la réponse fréquentielle associée à chacune des réponses impulsionnelles suivantes.

1) $h_1(t) = \text{sign}(5t - 1)e^{-j2\pi t}$;

2) $h_2(t) = t^2 e^{-t} \text{rect}(t - 1/2)$;

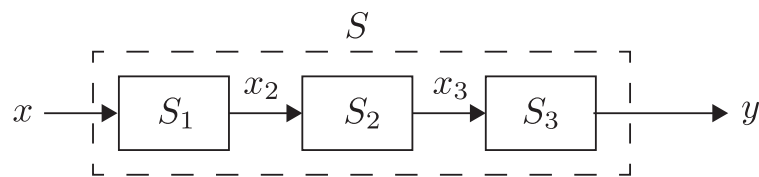
3) $h_3(t) = -\frac{1}{t^2 - 4jt - 4}$;

4) $h_4(t) = te^{-3|t|}$.

Exercice 11.2 : ANALYSE DE SYSTÈME

Cet exercice typique d'analyse de système vous permet de revoir les différentes manières de décrire un système et vous entraîne à jongler entre les notations sous forme d'opérateurs, de réponse impulsionnelle et de réponse fréquentielle. Il permet aussi de réviser les concepts de stabilité et causalité, ainsi que les différents types de filtres.

On définit le système S à l'aide du schéma bloc suivant.



Les sous-systèmes sont définis par

$$S_1 : (D + 10I)\{x\}(t) = x_2(t)$$

$$S_2 : h_2(t) = u(t)e^{-2t} \cos(t)$$

$$S_3 : H_3(\omega) = \frac{1}{j\omega + 2}$$

1) Analyse de S_1 .

- (a) Donner l'équation différentielle reliant $x(t)$ à $x_2(t)$.
- (b) Calculer la réponse en fréquence $H_1(\omega)$ de S_1 .
- (c) Le système S_1 est-il causal ? Justifier.

2) Analyse de S_2 .

- (a) Calculer la réponse en fréquence $H_2(\omega)$ de S_2 .
- (b) Ce filtre est-il BIBO-stable ? Justifier.

3) Analyse de S_3 .

- (a) Calculer la réponse impulsionnelle $h_3(t)$ de S_3 .
- (b) Donner l'équation différentielle reliant $x_3(t)$ à $y(t)$.
- (c) Ce filtre est-il causal ? BIBO-stable ? Justifier les réponses.
- (d) Calculer la réponse de S_3 aux entrées suivantes.

- i. $x_3(t) = \delta'(t) + 2\delta(t)$
- ii. $x_3(t) = u(t)$
- iii. $x_3(t) = 3\cos(2t)$

4) Analyse du système complet S.

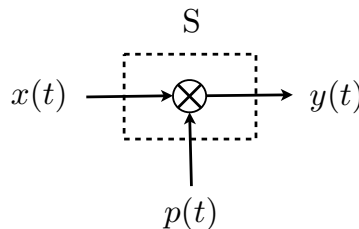
- (a) Dédurre des questions précédentes la réponse fréquentielle $H(\omega)$ de S.
- (b) Le système S est-il LIT ? BIBO-stable ? Justifier les réponses.
- (c) Quel type de filtre (passe-haut, passe-bas...) est implémenté par S ? Justifier.
- (d) Donner la réponse de S aux entrées suivantes.
 - i. $x(t) = \delta(t)$
 - ii. $x(t) = e^{jt}(\delta'(t) + 2\delta(t))$

Exercice 11.3 : ÉCHANTILLONAGE ET RECONSTRUCTION

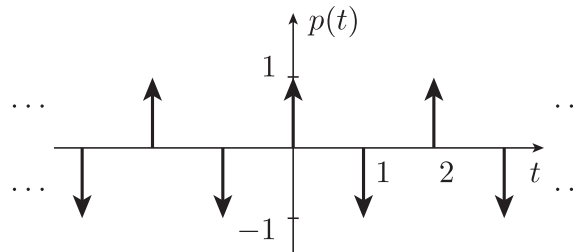
On revoit dans cet exercice les concepts relatifs à l'échantillonnage et à la reconstruction d'un signal. Même si elle n'est pas explicitement mentionnée ici, il s'agit aussi de réviser la théorie liée au théorème de Shannon, ainsi que ses implications.

On considère le système échantillonneur S représenté ci-dessous, avec

$$S : y(t) = p(t) \cdot x(t).$$



Le signal $p(t)$ est un train d'impulsions de diracs alternées représenté ci-dessous.

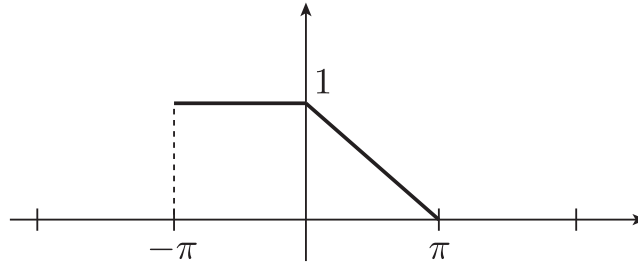


- 1) Calculer la réponse de S aux entrées suivantes.
 - (a) $x_1(t) = \cos(2\pi t)$
 - (b) $x_2(t) = \cos(2\pi t - \pi)$
- 2) En se basant sur la question précédente, que peut-on déduire concernant l'invariance par translation de S ?

- 3) Calculer la transformée de Fourier de $p(t)$

Indication : écrire $p(t)$ comme une différence de deux trains de diracs décalés.

- 4) Exprimer la transformée de Fourier $Y(\omega)$ de la sortie $y(t)$ en fonction de celle de l'entrée $x(t)$, pour $x(t)$ quelconque.
- 5) Tracer l'allure de $Y(\omega)$ lorsque l'on a en entrée une fonction dont la transformée de Fourier $X(\omega)$ est donnée par le dessin ci-dessous.



- 6) Comment peut-on reconstruire $x(t)$ à partir de $y(t)$ lorsque $x(t)$ est à bande limitée dans $[-\pi, \pi]$?

Exercice 11.4 : APPROXIMATION DE FONCTIONS

Toute la théorie liée à l'approximation de fonctions, incluant les concepts de produit scalaire, d'orthonormalité et, plus largement, des séries de Fourier, est un des sujets clés du cours. Cet exercice propose de tester la compréhension de certaines de ces notions au travers d'un exemple.

Dans tout l'exercice, on considère le produit scalaire usuel de $L_2(\mathbb{R})$:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)^* dt$$

On définit la famille de fonctions $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par la formule :

$$\phi_n(t) = \text{rect}(2t - n) + \text{rect}(2t + n)$$

- 1) Dessiner $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, $\phi_n(t)$.
- 2) Calculer les produits scalaires $\langle \phi_n, \phi_m \rangle$. Que peut-on en déduire sur la famille ϕ_n ?
- 3) Calculer $\Phi_n(\omega)$ la transformée de Fourier de $\phi_n(t)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que la famille $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}\left(\frac{t}{4\pi}\right) \cos\left(\frac{nt}{2}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est orthonormale.
- 4) Soit $f(t)$ la fonction dont la transformée de Fourier est $F(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$. Calculer $f(t)$.
- 5) Calculer les produits scalaires $\langle f, \phi_n \rangle$.
- 6) En déduire la meilleure approximation de $f(t)$ par la famille $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Que vaut l'erreur d'approximation ?