Série 6

Exercice 6.1 : RÉPONSE A UNE EXCITATION SINUSOÏDALE (BASIQUE)

Cet exercice est fondamental pour deux raisons. Tout d'abord, les techniques à mettre en oeuvre sont classiques et importantes. De plus, on démontre un résultat général crucial : la sortie d'un système LIT à une entrée sinusoïdale est elle-même une sinusoïde (éventuellement d'amplitude et de phase distincte). On remarquera en outre que la transformée de Fourier est un outil particulièrement adapté pour obtenir ce résultat.

Soit un système à réponse impulsionnelle $h(t)$ réelle. On notera $x(t)$ l'entrée et $y(t)$ la sortie de ce système.

1) Soit $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, où A, ω_0 et φ sont des paramètres réels.
Calculer la transformée de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$. À partir de l'expression de $X(\omega)$, que peut-on prédire sur la sortie y ?
Indication : voir p. 2-48 du cours.

2) On note $H(\omega)$ la TF de $h(t)$. Exprimer $Y(\omega)$ la TF de $y(t)$ en fonction de $H(\omega_0)$.

3) En déduire l'expression de la sortie $y(t)$, en s'assurant qu'elle est bien réelle.
Indication : Utiliser la symétrie hermitienne, p. 4-14 du cours.

4) Soient $h_1(t) = \mathrm{rect}(t)$ et $h_2(t) = \mathrm{rect}(2t)$ les réponses impulsionnelles de deux systèmes soumis successivement aux entrées $x_1(t) = \sin(4\pi t)$ et $x_2(t) = 3\cos(\pi t)$. Pour chacun des deux systèmes, calculer les sorties $y_{1,h_i}(t)$ et $y_{2,h_i}(t)$ ($i = 1$ ou 2).

Exercice 6.2 : ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE (BASIQUE)

On revisite ici un problème classique d'analyse de système décrit par une équation différentielle. Alors que l'on utilisait jusque là l'algèbre d'opérateurs et les tables de convolution, on peut désormais également se servir de la transformée de Fourier pour résoudre ce genre d'exercice.

On considère l'équation différentielle $\mathrm{D}y(t) + \sqrt{2}y(t) = x(t)$.

1) Par la méthode vue au chapitre 2, déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système correspondant, avec $x(t)$ en entrée et $y(t)$ en sortie. À l'aide des tables, donner la transformée de Fourier de $h(t)$.

2) Rappeler la transformée de Fourier de $\mathrm{D}y(t)$ en fonction de $Y(\omega)$.

3) En utilisant la question précédente, calculer la transformée de Fourier du membre de gauche de l'équation.

4) Rappeler la transformée de Fourier de la distribution $\delta(t)$.

5) Déduire des questions précédentes la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle du système. Vérifier la cohérence du résultat par rapport à la première question.

Exercice 6.3 : CALCUL DE TRANSFORMÉES DE FOURIER (BASIQUE)

Dans cet exercice très classique, on cherche à se familiariser avec la transformée de Fourier. On rappelle que le but n'est jamais de calculer des intégrales. Le bon angle d'attaque pour ce genre de problème est de se référer aux tables contenant les transformées de Fourier de signaux donnés, ainsi qu'aux propriétés de la transformée de Fourier. Il s'agit en outre d'un bon exercice pour se rappeler des propriétés des nombres complexes.

Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes.

1) $f_1(t) = \left(\frac{1}{\mathrm{j}\cdot+3} * \mathrm{rect}(6\cdot)\right)(t)$.

2) $f_2(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{sinc}^2\left(\frac{2t-k}{2\pi}\right)$.
Indication : faire apparaître une convolution avec un train de Dirac.

3) $f_3(t) = \mathrm{sign}(3t) - \frac{3j}{t}$.

4) $f_4(t) = \mathrm{D}\{\cos^2(t)\}$.

Exercice 6.4 : INTERCORRÉLATION ET TRANSFORMÉE DE FOURIER (AVANCÉ)

Le but de cet exercice est de faire le lien entre le concept d'intercorrélation introduit plus tôt dans le cours et la transformée de Fourier. On voit notamment que la transformée de Fourier, puisqu'elle est un outil de calcul pour la convolution, permet aussi le calcul des intercorrélations.

On se donne deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$.

1) Écrire l'intercorrélation $c_{fg}(\tau)$ sous la forme d'une convolution.

2) Calculer la transformée de Fourier de $c_{fg}(\tau)$, notée $\mathcal{F}\{c_{fg}\}(\omega) = C_{fg}(\omega)$.

3) Dans le cas particulier où $f(t) = g(t)$, comment appelle-t-on la fonction $c_{ff}(\tau)$ et que vaut sa transformée de Fourier ?

4) En utilisant le résultat obtenu en **2)**, calculer l'intercorrélation $c_{fg}(\tau)$ entre $f(t) = \mathrm{sinc}(t)$ et $g(t) = \mathrm{sinc}(2t)$.

On donne désormais $F(\omega)$ et $G(\omega)$, les transformées de Fourier de f et g, respectivement.

5) Écrire l'intercorrélation $c_{FG}(\nu)$ sous la forme d'une convolution entre $F(\omega)$ et $G(\omega)$.

6) Calculer la transformée de Fourier inverse de $c_{FG}(\nu)$, notée $\mathcal{F}^{-1}\{c_{FG}\}(t) = C_{FG}(t)$.

7) Dans le cas particulier où $F(\omega) = G(\omega)$, calculer $c_{FF}(\nu)$ et sa transformée de Fourier inverse $C_{FF}(t)$.