Série 4

Exercice 4.1 : (BASIQUE) SERIES DE FOURIER COMPLEXES

On veut trouver les coefficients de Fourier de fonctions périodiques. Méditer attentivement la définition donnée dans le cours de ces coefficients permet souvent – mais pas toujours – de répondre sans calcul à la question.

Dans cet exercice, les fonctions sont périodiques de période $T = 3$. Pour chacune des fonctions suivantes :

— la représenter graphiquement sur $[-9, 9]$ (et vérifier que la fonction est bien 3-périodique),

— déterminer les coefficients de sa série de Fourier complexe pour $T = 3$,

— représenter graphiquement le module de ses coefficients de Fourier.

1) $f_1(t) = \cos(2\pi t)$.

2) $f_2(t) = 2$.

3) $f_3(t) = \cos(4\pi t/3 + \phi)$ où $\phi \in [0, 2\pi)$ est une phase arbitraire.
Que valent notamment $f_3(t)$ et les coefficients de sa série de Fourier complexe pour les différentes valeurs $\phi = 0, \pi/2$ et $\pi/3$?

4) $f_4(t) = \cos^2(2\pi t/3)$.

5) $f_5(t) = \mathrm{rect}(t)$ pour $t \in [-1, 2]$ et périodisée de période 3 pour les autres valeurs de t.

Exercice 4.2 : (BASIQUE) CORRÉLATION ET CONVOLUTION

Le but de cet exercice est de vous faire manipuler convolution, corrélation et leur liens. Il faut ici s'habituer à manipuler les expressions de manière à se retrouver avec des calculs directement disponibles dans les tables.

Esquisser les signaux $x(t)$ et $y(t)$ ci-dessous. Calculer, sans faire l'intégrale, leur intercorrélation $c_{xy}(\tau)$ et la représenter graphiquement.

1) $x(t) = u(-t)e^{2t}$ et $y(t) = u(t)e^{-t}$

2) $x(t) = u(-t - 3)$ et $y(t) = u(t)\cos(\omega t)$
Indication : on prendra $\omega = 2\pi$ pour la représentation graphique.

3) $x(t) = u(-t)(t - 1)^2$ et $y(t) = t\,u(t)$.
Indication : développer $(t - 1)^2$ en puissances de t.

4) Cette dernière question est plus exigeante, on la considérera d'un niveau avancé.
$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-1, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $y(t) = \begin{cases} 2 - t & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Indication : utiliser l'interprétation "calcul d'aire" de la convolution.

Exercice 4.3 : (BASIQUE) FONCTIONS DE GREEN

Retour sur les fonctions de Green. Comme pour l'exercice précédent, il convient de s'assurer que les concepts utilisés dans cet exercice sont bien maîtrisés. On voit en outre par l'exemple que la fonction de Green associée à un opérateur n'est pas unique.

On considère l'opérateur $\mathrm{T} = (\mathrm{D} + 2\mathrm{I})$.

1) Si $g(t)$ est une fonction de Green de T, quelle équation doit-elle vérifier ?

2) Soit $g_1(t) = -\frac{1}{3}u(-t)\mathrm{e}^{-2t} + \frac{2}{3}u(t)\mathrm{e}^{-2t}$.
Tracer $g_1(t)$ et vérifier qu'elle est une fonction de Green de T. Est-elle causale ?
Indication : on rappelle que $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = \delta(t)$.

3) Quelle est la fonction $f(t)$ satisfaisant l'équation homogène $\mathrm{T}\{f\}(t) = 0$ et telle que $f(0) = 1/3$?

4) Vérifier que $g_0(t) = g_1(t) + f(t)$ est une fonction de Green de T. Est-elle causale ?

Exercice 4.4 : (BASIQUE) CORRÉLATION ET CONVOLUTION

Cet exercice ne présente pas de concept fraîchement nouveau si ce n'est l'utilisation de la fonction tri. *Il vous permet de faire le point sur votre aisance à utiliser les concepts de convolution et de corrélation.*

1) Calculer le produit de convolution $\mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t)$ et le représenter graphiquement.
Indication : on notera la fonction résultante $\mathrm{tri}(t)$.

2) Soit le signal $w(t) = \sum_{k=-2}^{2} \delta(t - 4k)$. Calculer la fonction $f = (w * \mathrm{rect})$ et la représenter graphiquement.

3) Calculer l'intercorrélation entre $\mathrm{rect}(t)$ et $f(t)$ et la représenter graphiquement.

4) Soit un système à réponse impulsionnelle finie $h(t)$ dont le support est $[0, L]$. A l'entrée, on impose $w(t)$. Quelle est la longueur du support du signal de sortie, en fonction de L ?