

Solution 1 : Moment sur le bâti d'un réducteur

Les deux arbres tournent dans le même sens, donc les couples d'entrée et de sortie se soustraient : $M_{\text{bati}} = M_2 - M_1$ (le sens de M_2 est choisi comme sens positif pour les moments).

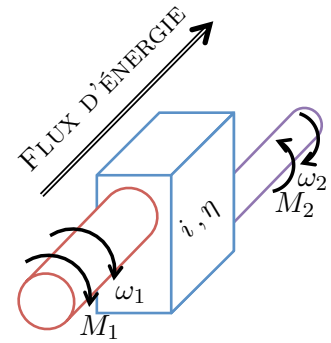
Calcul de M_2 : pour le sens du flux d'énergie de la figure, nous avons $M_2 = M_1 \cdot i \cdot \eta$.

Calcul de i : $i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{500}{100} = 5$.

Donc $M_2 = 0,1 \cdot 5 \cdot 0,95 = 0,475 \text{ N m}$

Et $M_{\text{bati}} = 0,475 - 0,1 = \boxed{0,375 \text{ N m}}$

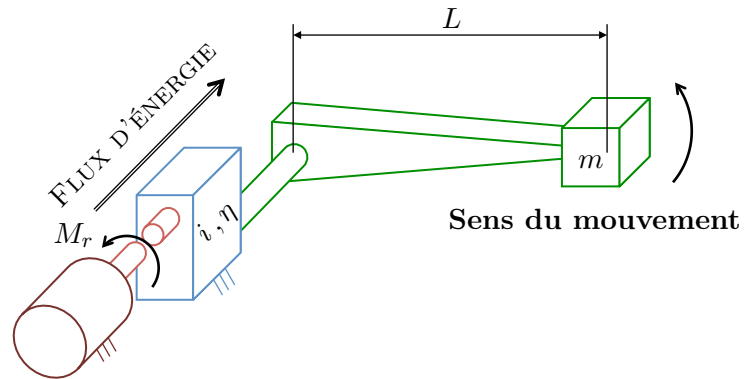
Si les arbres tournent en sens opposés, alors les couples d'entrée et de sortie s'additionnent : $M_{\text{bati}} = M_2 + M_1 = 0,475 + 0,1 = \boxed{0,575 \text{ N m}}$

**Solution 2 : Moment réduit d'un bras oscillant**

La masse m produit un couple $M = m \cdot g \cdot L$ sur l'arbre de sortie du réducteur (couple résistant).

Le couple réduit M_r est le couple que doit produire le moteur pour vaincre le couple résistant M : $M_r = \frac{M}{i \cdot \eta}$.

Ainsi, $\boxed{M_r = \frac{m \cdot g \cdot L}{i \cdot \eta}}$

**Solution 3 : Moment réduit via vis-à-billes**

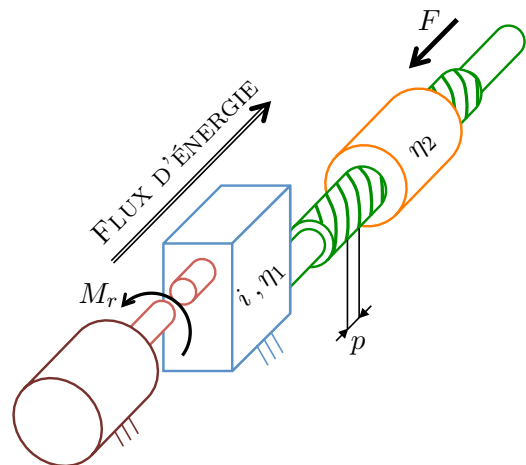
Le travail mécanique que doit fournir la vis pour effectuer un tour est égal au travail de la force F sur un pas en prenant en compte les pertes liées au rendement :

$$M_{\text{vis}} \cdot 2 \cdot \pi = \frac{F \cdot p}{\eta_2}$$

$$\text{Donc } M_{\text{vis}} = \frac{F \cdot p}{2 \cdot \pi \cdot \eta_2}$$

Le couple réduit est le couple que doit fournir le moteur pour vaincre M_{vis} :

$$\boxed{M_r = \frac{M_{\text{vis}}}{i \cdot \eta_1} = \frac{F \cdot p}{2 \cdot \pi \cdot i \cdot \eta_1 \cdot \eta_2}}$$



Solution 4 : Accélération d'un chariot avec vis à billes**1. Couple réduit**

$$M_{\text{vis}} \cdot 2\pi = \frac{F \cdot p}{\eta_2}$$

$$\text{Donc } M_{\text{vis}} = \frac{F \cdot p}{2 \cdot \pi \cdot \eta_2}$$

Le couple réduit est le couple que doit fournir le moteur pour vaincre M_{vis} :

$$M_r = \frac{M_{\text{vis}}}{i \cdot \eta_1} = \frac{F \cdot p}{2 \cdot \pi \cdot i \cdot \eta_1 \cdot \eta_2}$$

2. Inertie réduite

a. Energie cinétique : $E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \frac{m_1 \cdot r^2}{2} \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v^2$

b. Energie injectée : $E_{\text{inj}} = \frac{1}{2 \cdot \eta_1} \frac{m_1 \cdot r^2}{2} \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2} \cdot m_2 \cdot v^2$

c. Relation des vitesses :

- $\omega_1 = \frac{\omega}{i}$
- $\frac{\omega_1}{2 \cdot \pi} = \frac{v}{p}$: "temps pour faire 1 tour = temps pour faire un pas"
- $v = \frac{\omega_1 \cdot p}{2 \cdot \pi} = \frac{\omega \cdot p}{2 \cdot \pi \cdot i}$

d. Inertie réduite :

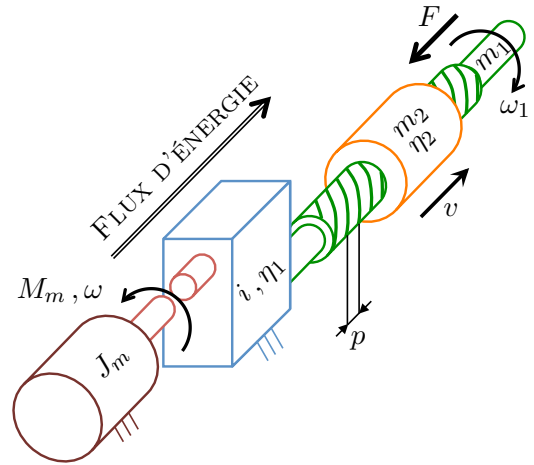
$$\frac{1}{2} \cdot J_r \cdot \omega^2 = \frac{1}{2 \cdot \eta_1} \frac{m_1 \cdot r^2}{2} \cdot \frac{\omega^2}{i^2} + \frac{1}{2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2} \cdot m_2 \cdot \frac{\omega^2 \cdot p^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot i^2}$$

$$J_r = \frac{m_1 \cdot r^2}{2 \cdot \eta_1 \cdot i^2} + \frac{m_2 \cdot p^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot i^2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2}$$

3. Accélération

$M_m - M_r = (J_m + J_r) \cdot \dot{\omega}$ donc l'accélération de l'arbre moteur vaut : $\dot{\omega} = \frac{M_m - M_r}{J_m + J_r}$ or $v = \frac{\omega \cdot p}{2 \cdot \pi \cdot i}$ d'où

$\dot{v} = \frac{\dot{\omega} \cdot p}{2 \cdot \pi \cdot i}$ soit l'accélération du chariot : $\dot{v} = \frac{M_m - M_r}{J_m + J_r} \cdot \frac{p}{2 \cdot \pi \cdot i}$



Solution 5 : Accélération d'un bras oscillant**1. Couple réduit**

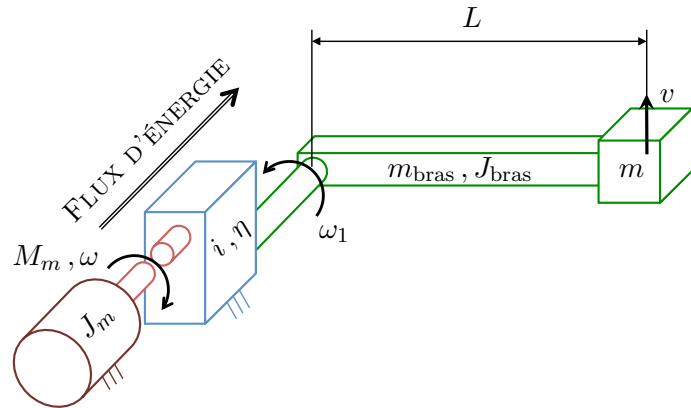
Couple à la sortie du réducteur :

$$M = m \cdot g \cdot L + m_{\text{bras}} \cdot g \cdot \frac{L}{2}$$

Couple réduit sur l'axe moteur :

$$M_r = \frac{M}{i \cdot \eta} \text{ donc } M_r = \frac{g \cdot L}{i \cdot \eta} \left(m + \frac{m_{\text{bras}}}{2} \right)$$

Application numérique : $M_r = 0,26 \text{ N m}$

**2. Inertie réduite**

Inertie à la sortie du réducteur :

$$J = \frac{1}{3} \cdot m_{\text{bras}} \cdot L^2 + m \cdot L^2$$

Inertie réduite sur l'axe moteur :

$$\text{Par définition } \frac{1}{2} \cdot J_r \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega_1^2 \cdot \frac{1}{\eta};$$

or les vitesses sont cinématiquement couplées : $\omega_1 = \frac{\omega}{i}$;

$$\text{Nous obtenons } \frac{1}{2} \cdot J_r \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \frac{\omega^2}{i^2} \cdot \frac{1}{\eta}, \text{ d'où } J_r = \frac{J}{\eta \cdot i^2}$$

Application numérique : $J_r = 4,52 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$

3. Accélération

Selon Newton, l'accélération de l'arbre moteur est : $\dot{\omega} = \frac{M_m - M_r}{J_m + J_r}$, d'où $M_m - M_r = (J_m + J_r) \cdot \dot{\omega}$.

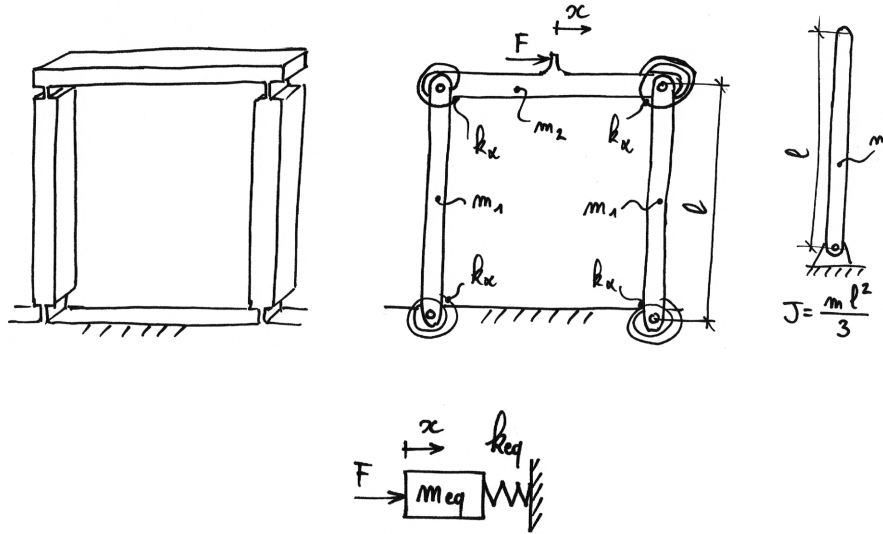
Les accélérations étant couplées cinématiquement (tout comme les vitesses et les angles) :

$$\dot{v} = \dot{\omega}_1 \cdot L = \frac{\dot{\omega}}{i} \cdot L \text{ donc } \dot{\omega} = \frac{\dot{v} \cdot i}{L},$$

$$\text{nous obtenons } M_m - M_r = (J_m + J_r) \cdot \frac{\dot{v} \cdot i}{L} \text{ d'où l'on tire } M_m = (J_m + J_r) \cdot \frac{i}{L} \cdot \dot{v} + M_r$$

Application numérique : $M_m = 0,75 \text{ N m}$

Solution 6 : Oscillateur élémentaire

1. Calcul de la masse réduite équivalente m_{eq}

Lorsque la barre m_2 se translate à la vitesse v , les deux barres m_1 tournent à la vitesse ω . L'énergie cinétique dans le système est alors $E_{cin} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$.

Les vitesses sont reliées par la relation suivante : $v = \omega \cdot l$, d'où $\omega = \frac{v}{l}$.

Par définition la masse réduite est telle que : $\frac{1}{2} \cdot m_{eq} \cdot v^2 = E_{cin}$.

Ceci nous donne : $\frac{1}{2} \cdot m_{eq} \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 \cdot l^2}{3} \cdot \frac{v^2}{l^2}$, d'où $m_{eq} = m_2 + 2 \cdot \frac{m_1}{3}$

2. Calcul de la rigidité équivalente k_{eq}

Par définition, l'énergie élastique à fournir au système équivalent pour le déformer d'une flèche x est égale à l'énergie élastique à fournir au mécanisme d'origine pour déplacer la barre m_2 de la même flèche x . Il se trouve que le déplacement x résulte en une rotation identique des quatre pivots flexibles d'un angle α . Nous avons donc :

$$\frac{1}{2} \cdot k_{eq} \cdot x^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot k_{\alpha} \cdot \alpha^2,$$

x et α étant cinématiquement couplés : $x \simeq \alpha \cdot l$ soit $\alpha \simeq \frac{x}{l}$.

Nous obtenons : $\frac{1}{2} \cdot k_{eq} \cdot x^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot k_{\alpha} \cdot \frac{x^2}{l^2}$,

d'où : $k_{eq} = \frac{4 \cdot k_{\alpha}}{l^2}$

3. Calcul de la fréquence propre

La fréquence propre du mécanisme est :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4 \cdot k_{\alpha}}{l^2 \left(m_2 + \frac{2 \cdot m_1}{3} \right)}}$$

Solution 7 : Rapport de transmission optimal

Calculer i_{opt} qui maximise l'accélération de la charge J pour un couple moteur M_m et une inertie du moteur J_m donnés.

Méthode : Réduire le système sur l'arbre mené B

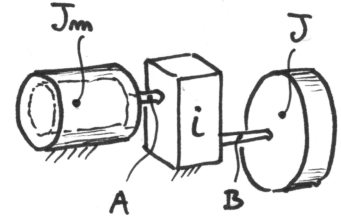
Inertie équivalente réduite sur l'arbre B : $J_{\text{eq}} = J + J_m \cdot i^2$

Moment moteur réduit sur l'arbre B : $M_{\text{eq}} = M_m \cdot i$

Accélération de l'arbre B selon Newton : $a = \frac{M_{\text{eq}}}{J_{\text{eq}}} = \frac{M_m \cdot i}{J + J_m \cdot i^2}$

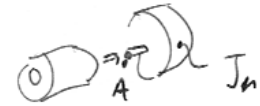
Recherche du maximum de l'accélération en fonction de i par recherche du zéro de la dérivée :

- Dérivée : $\frac{da}{di} = a' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$
- Dans notre cas : $a' = \frac{J + J_m \cdot i^2 - 2 \cdot i \cdot J_m \cdot i}{(J + J_m \cdot i^2)^2} = \frac{J - J_m \cdot i^2}{J^2 + 2J \cdot J_m \cdot i^2 + J_m^2 \cdot i^4}$
- $a' = 0$ lorsque $J_m \cdot i^2 = J$, d'où l'on tire : $i_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{J}{J_m}}$



Remarque : Si l'on réduit le système optimisé avec $i = i_{\text{opt}}$ sur l'arbre moteur A, alors on obtient :

$$J_r = \frac{J}{i_{\text{opt}}^2} = \frac{J}{\left(\frac{J}{J_m}\right)^2} = J_m.$$



En d'autres termes :

Le rapport de réduction qui maximise l'accélération de la charge est celui qui résulte en une inertie de la charge réduite sur l'arbre moteur égale à l'inertie propre du moteur.

Solution 8 : Accélération d'un cycliste

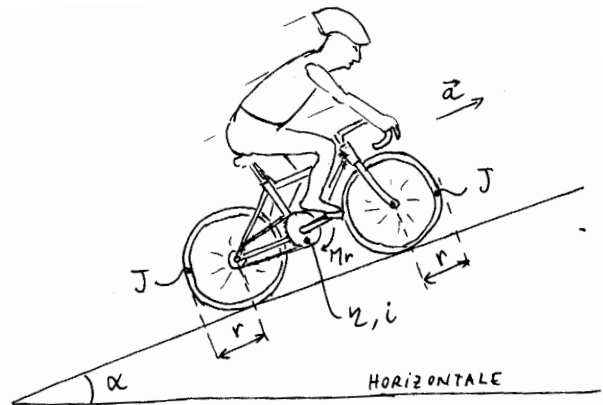
1. Calcul de M_r

Le travail effectué sur un tour de pédale est égal au travail effectué pour avancer sur le chemin $\frac{2\pi}{i} \cdot r$ en luttant contre le poids projeté sur le chemin $mg \sin(\alpha)$, tout en prenant en compte le rendement η . Ceci s'écrit :

$$M_r \cdot 2\pi = \frac{1}{\eta} (m \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{2\pi}{i} \cdot r),$$

$$\text{d'où } M_r = \frac{m \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot r}{i \cdot \eta}.$$

$$\text{Application numérique : } M_r = 40,37 \text{ N m}$$



2. Calcul de l'inertie réduite J_r

Energie cinétique du système à la vitesse v : $E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega_{\text{roue}}^2$

Energie injectée dans le système pour lui faire atteindre la vitesse v : $E_{\text{inj}} = \frac{1}{\eta} \cdot E_{\text{cin}}$

Relation des vitesses : $\omega_{\text{roue}} = \frac{\omega}{i}$ et $v = \omega_{\text{roue}} \cdot r = \frac{\omega \cdot r}{i}$

Inertie réduite : $\frac{1}{2} \cdot J_r \omega^2 = \frac{1}{\eta} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m \frac{\omega^2 \cdot r^2}{i^2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot J \cdot \frac{\omega^2}{i^2} \right)$, d'où $J_r = \frac{1}{\eta \cdot i^2} \cdot (m \cdot r^2 + 2 \cdot J)$

$$\text{Application numérique : } J_r = 23,93 \text{ kg m}^2$$

3. Calcul de l'accélération linéaire a

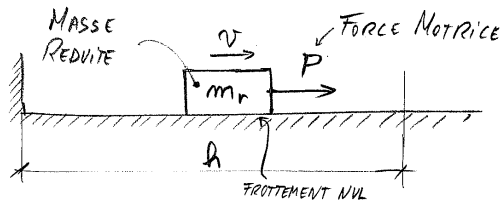
Selon la loi de Newton, $\dot{\omega} = \frac{M_m - M_r}{J_r}$, d'où $a = \dot{v} = \frac{\dot{\omega} \cdot r}{i} = \frac{(M_m - M_r) \cdot r}{J_r \cdot i}$

$$\text{Application numérique : } a = \dot{v} = 0,201 \text{ m s}^{-1}$$

Solution 9 : Yo-Yo – Concept de la "masse réduite"

1. Accélération du Yo-Yo retenu par son fil

Méthode : Nous ramenons le système à une "masse réduite" m_r qui requiert la même énergie que le Yo-Yo pour atteindre la vitesse v .



Système à une seule masse en translation équivalent au Yo-Yo retenu par son fil.

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \cdot m_r \cdot v^2 = \frac{1}{\eta} \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2 \right)$$

$$\text{où } \omega = \frac{v}{r}$$

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \cdot m_r \cdot v^2 = \frac{1}{\eta} \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \frac{v^2}{r^2} \right)$$

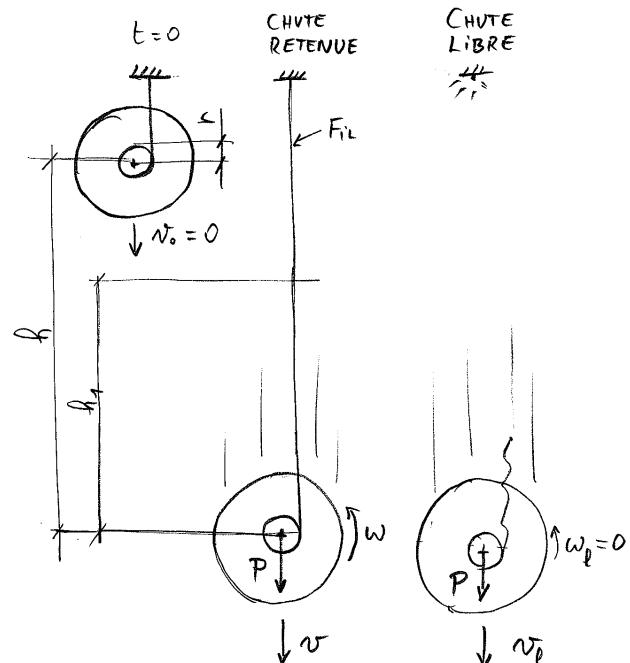
$$m_r = \frac{1}{\eta} \cdot \left(m + \frac{J}{r^2} \right)$$

Application numérique : $m_r = 3,667 \text{ kg}$

La force motrice qui accélère le Yo-Yo est son poids $P = m \cdot g$

Selon Newton, cette même force accélère la masse réduite, ainsi : $a = \frac{P}{m_r}$ d'où $a = \frac{m \cdot g \cdot \eta}{m + \frac{J}{r^2}}$

Application numérique : $a = 0,4013 \text{ m s}^{-2}$



2. Comparaison de la durée de la chute Yo-Yo retenu avec celle du Yo-Yo en chute libre

Mouvement de la chute retenue Mouvement de la chute libre

Accélération :

$$a(t) = a$$

$$a(t) = g$$

Vitesse :

$$v(t) = a \cdot t$$

$$v(t) = g \cdot t$$

Position :

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$v(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Durée de la chute :

$$t_h = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{a}}$$

$$t_{hl} = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$$

Numériquement :

$$t_h = 2,232 \text{ s}$$

$$t_{hl} = 0,452 \text{ s}$$

Comparaison numérique : la chute retenue dure $\frac{t_h}{t_{hl}} = \sqrt{\frac{g}{a}} = 5$ fois plus longtemps que la chute libre.

3. Calcul de la hauteur h_1

L'énergie injectée dans le système à la descente est égale à l'énergie potentielle : $E_{\text{inj}} = m \cdot g \cdot h$ (travail du poids jouant ici le rôle de force motrice). En raison des pertes, seule une partie de cette énergie est convertie en énergie cinétique (combinée entre translation et rotation) : $E_{\text{cin}} = m \cdot g \cdot h \cdot \eta$.

Si l'on fait l'hypothèse que le rendement à la montée (conversion de l'énergie cinétique en énergie potentielle) est égal au rendement à la descente (conversion de l'énergie potentielle en énergie cinétique), alors l'énergie cinétique accumulée à la descente pourra effectuer, à la montée, le travail suivant :

$$E_{\text{cin}} \cdot \eta = m \cdot g \cdot h_1, \text{ d'où } h_1 = \frac{E_{\text{cin}} \cdot \eta}{m \cdot g} = \frac{m \cdot g \cdot h \cdot \eta^2}{m \cdot g} = h \cdot \eta^2$$

Ainsi, le Yo-Yo, initialement lâché d'une hauteur h , remonte à une hauteur $h_1 = h \cdot \eta^2$ à la première alternance, puis $h_i = h \cdot \eta^{2i}$ à la $i^{\text{ème}}$ alternance.

Solution 10 : Courroie plate

1. Calcul de la force tangentielle transmissible

- $F_A = T_2 \cdot (e^{\mu\alpha_A} - 1)$
- $F_{A\min} = T_2 \cdot (e^{0,4 \frac{210 \cdot \pi}{180}} - 1) = \boxed{66,6 \text{ N}}$
- $F_{A\max} = T_2 \cdot (e^{0,6 \frac{210 \cdot \pi}{180}} - 1) = \boxed{160,3 \text{ N}}$
- $F_B = T_2 \cdot (e^{\mu\alpha_B} - 1)$
- $F_{B\min} = T_2 \cdot (e^{0,4 \frac{180 \cdot \pi}{180}} - 1) = \boxed{50,3 \text{ N}}$
- $F_{B\max} = T_2 \cdot (e^{0,6 \frac{180 \cdot \pi}{180}} - 1) = \boxed{111,7 \text{ N}}$

2. La valeur minimale de la force tangentielle apparaît sur la petite poulie (angle d'enroulement plus faible) pour $\mu_{\min} = 0,4$: $F_{\min} = F_{B\min} = 50,3 \text{ N}$. Le couple moteur correspondant est donc :

- $M_{\min} = M_{B\min} = F_{B\min} \cdot R_B = 50,3 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = \boxed{1 \text{ N m}}$

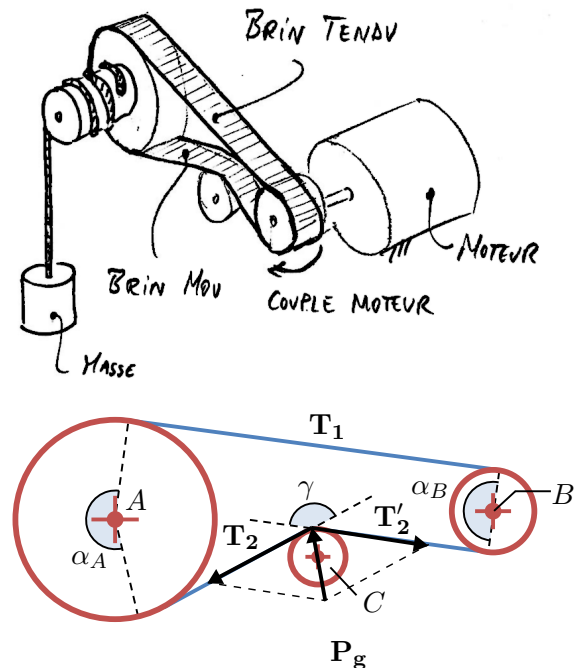
3. Si la prétension T_2 est appliquée sur le brin tendu, on a :

- $F_A = T_2 \cdot \left(\frac{e^{\mu\alpha_A} - 1}{e^{\mu\alpha_A}} \right)$
- $F_{A\min} = \boxed{15,4 \text{ N}}$
- $F_{A\max} = \boxed{17,7 \text{ N}}$

et

- $F_B = T_2 \cdot \left(\frac{e^{\mu\alpha_B} - 1}{e^{\mu\alpha_B}} \right)$
- $F_{B\min} = \boxed{14,3 \text{ N}}$
- $F_{B\max} = \boxed{17,0 \text{ N}}$

Les forces tangentielles transmissibles sont inférieures au cas 1 mais les valeurs de glissement sont beaucoup moins sensibles au coefficient de frottement. Par conséquent cet arrangement permet de faire un limiteur de couple très précis.



Solution 11 : Embrayage à ressort n°1

1. Calcul du diamètre moyen du ressort

- $C = \frac{D^2 - D_i^2}{D \cdot D_i^2} \cdot E \cdot I \frac{e^{\mu\alpha} - 1}{e^{\mu\alpha}}$
- $C \cdot D \cdot D_i^2 = (D^2 - D_i^2) \cdot E \cdot I$ avec $\frac{e^{\mu\alpha} - 1}{e^{\mu\alpha}} \approx 1$
- $D_i^2 (C \cdot D + E \cdot I) = D^2 \cdot E \cdot I$
- $D_i = \sqrt{\frac{D^2 \cdot E \cdot I}{C \cdot D + E \cdot I}}$
- $\boxed{D_i = 18,94 \text{ mm}}$ (diamètre non-monté) avec $C = 100 \cdot 10^{-3} \text{ N m}$, $b = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $h = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $I = b \cdot h^3 / 12 = 83,3 \cdot 10^{-15} \text{ m}^4$, $E = 210 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ et $D = 20 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

2. Calcul du nombre de spires

- Pour $\mu = 0,4$ $\frac{e^{\mu\alpha} - 1}{e^{\mu\alpha}} \approx 1$
- Pour $\mu = 0,2$ nous voulons $\frac{e^{\mu\alpha} - 1}{e^{\mu\alpha}} \geq 0,999$
- $e^{\mu\alpha} - 1 \geq 0,999 e^{\mu\alpha}$
- $(1 - 0,999) e^{\mu\alpha} \geq 1$
- $0,001 e^{\mu\alpha} \geq 1$
- $e^{\mu\alpha} \geq \frac{1}{0,001}$
- $e^{\mu\alpha} \geq 1000$
- $\mu\alpha \geq \ln 1000$
- $\boxed{\alpha \geq \frac{\ln 1000}{\mu}}$
- Pour $\mu = 0,2$ on a $\alpha \geq 34,5 \text{ rad}$ (5.5 tours)
- Pour $\mu = 0,3$ on a $\alpha \geq 23,2 \text{ rad}$ (3.7 tours)

3. Calcul de la contrainte maximale

- $\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{6 \cdot M}{b \cdot h^2}$ avec $W = \frac{I}{a/2} = \frac{b \cdot h^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{b \cdot h^2}{6}$
- $M = 2 \cdot \frac{D - D_i}{D \cdot D_i} \cdot E \cdot I = 97 \text{ mN m}$
- $\boxed{\sigma_{\max} = 583,7 \text{ MPa}}$.

Solution 12 : Embrayage à ressort n°2

1. Pour la détermination du couple en embrayage, il y a deux limites à considérer :

a. la limite donnée par le frottement

b. la limite fixé par le dépassement de la contrainte admissible dans le fil.

a. Limite donnée par le frottement :

- $C_{\text{frott}} = \frac{D^2 - D_i^2}{D \cdot D_i^2} \cdot E \cdot I \cdot (e^{\mu\alpha} - 1) = \frac{(15^2 - 14,8^2) \cdot 10^{-6}}{(15 \cdot 14,8^2) \cdot 10^{-6}} \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 0,083 \cdot 10^{-12} \cdot (e^{0,2 \cdot 12 \cdot \pi} - 1) = 59,46 \text{ N m}$
- Avec $I = \frac{a^4}{12} = \frac{(1 \cdot 10^{-3})^4}{12} = 0,083 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4$
- Et $\alpha = n \cdot 2 \cdot \pi = 12 \cdot \pi \text{ rad}$

b. Limite donnée par la résistance du fil :

- $\sigma_{\text{adm}} = 400 \text{ N mm}^{-2}$ soit $F_{\text{adm}} = 400 \text{ N}$ car la section du fil vaut $1 \times 1 \text{ mm}^2$
- $C_{\text{adm}} = F \cdot \frac{D}{2} = 400 \cdot \frac{15}{2} \cdot 10^{-3} = 3 \text{ N m}$

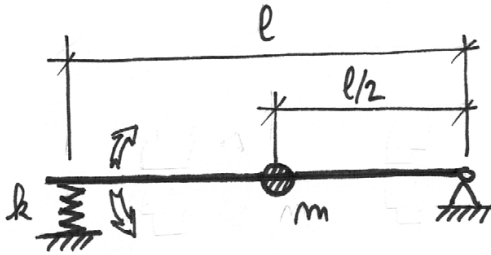
 $\boxed{\text{La limite est } 3 \text{ N m}}$.

2. Limiteur de couple :

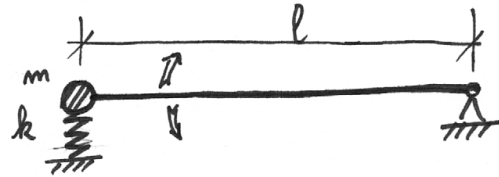
- $C = \frac{D^2 - D_i^2}{D \cdot D_i^2} \cdot E \cdot I \cdot \frac{(e^{\mu\alpha} - 1)}{e^{\mu\alpha}} = \frac{(15^2 - 14,8^2) \cdot 10^{-6}}{(15 \cdot 14,8^2) \cdot 10^{-6}} \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 0,083 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{(e^{0,2 \cdot 12 \cdot \pi} - 1)}{e^{0,2 \cdot 12 \cdot \pi}} = \boxed{31,6 \text{ N mm}}$
- Pour information : $\sigma_{\max}$ pour la flexion du fil vaut $\sigma_{\max} = \frac{D - D_i}{D \cdot D_i} \cdot E \cdot a = 189 \cdot 10^6 \text{ N m}^{-2}$

Le rayon de courbure est donc acceptable pour cette courroie.

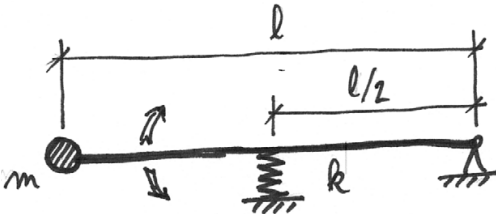
Solution 13 : Poutres oscillantes



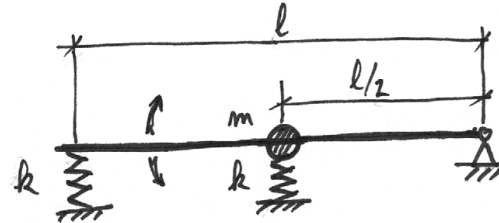
(a) $J_0 = m \frac{l^2}{4}$; $k_{\alpha 0} = kl^2$;
 $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{\alpha 0}}{J_0}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 2 \text{ Hz}$



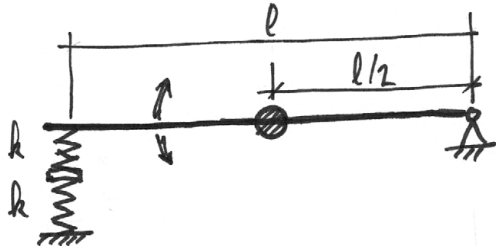
(b) $J = ml^2 = 4J_0$; $k_{\alpha} = k_{\alpha 0}$;
 $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{\alpha 0}}{4J_0}} = \frac{f_0}{2} = 1 \text{ Hz}$



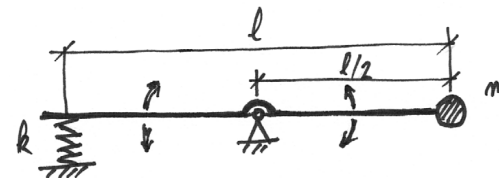
(c) $J = ml^2 = 4J_0$; $k_{\alpha} = k \frac{l^2}{4} = \frac{k_{\alpha 0}}{4}$;
 $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{\alpha 0}}{16J_0}} = \frac{f_0}{4} = 0,5 \text{ Hz}$



(d) $J = J_0$; $k_{\alpha} = k_{\alpha 0} + \frac{k_{\alpha 0}}{4} = \frac{5k_{\alpha 0}}{4}$;
 $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{5k_{\alpha 0}}{4J_0}} = \frac{\sqrt{5}}{2} f_0 = 2,23 \text{ Hz}$



(e) $J = J_0$; $k_{\alpha} = \frac{k_{\alpha 0}}{2}$;
 $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{\alpha 0}}{2J_0}} = \frac{f_0}{\sqrt{2}} = 1,41 \text{ Hz}$



(f) $J = J_0$; $k_{\alpha} = \frac{k_{\alpha 0}}{4}$;
 $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{\alpha 0}}{4J_0}} = \frac{f_0}{2} = 1 \text{ Hz}$

Solution 14 : Hissage de charges avec frottement

Question 1 :

Lorsque la barre est fixe, à la montée, le brin auquel pend la charge est le brin mou ; sa tension est : $T_2 = mg = 245.3 \text{ N}$.

L'angle d'enroulement est : $\alpha = 3\pi/4$

La force de frottement tangentielle est : $F = T_2(e^{\mu\alpha} - 1) = 252 \text{ N}$.

La force que doit exercer la meunière et : $T_1 = T_2 + F = 497.3 \text{ N}$ ($= 50.7 \text{ kg}$)

Remarque : cette force est nettement supérieure à celle du poids du sac en raison du frottement de la corde sur la barre fixe qui s'additionne au poids lors de la montée.

Question 2 :

Lorsque la barre est fixe, à la descente, le brin auquel pend la charge et le brin tendu ; sa tension est : $T_1 = mg = 245.3 \text{ N}$.

L'angle d'enroulement est identique au cas de la montée : $\alpha = 3\pi/4$

La force de frottement tangentielle est : $F = T_1((e^{\mu\alpha} - 1)/e^{\mu\alpha}) = 124.3 \text{ N}$.

La force que doit exercer la meunière et : $T_2 = T_1 - F = 120.9 \text{ N}$ ($= 12.3 \text{ kg}$).

Remarque : cette force est nettement inférieure à celle du poids du sac en raison du frottement de la corde sur la barre fixe qui aide au freinage lors de la descente.

Questions 3 et 4 :

Lorsque la barre est tournante le brin auquel pend la charge est le brin tendu, aussi bien à la montée qu'à la descente. Ceci s'explique par le fait que la force de frottement garde le même signe dans les deux cas du fait que la charge est montée à basse vitesse et donc que corde défile sur la barre plus lentement que la vitesse périphérique de la barre. Nous avons donc :

$$T_1 = mg = 245.3 \text{ N}.$$

L'angle d'enroulement est supérieur d'un tour au cas des question 1 et 2 : $\alpha = 3\pi/4 + 2\pi = 11\pi/4$

La force de frottement tangentielle est : $F = T_1((e^{\mu\alpha} - 1)/e^{\mu\alpha}) = 226.9 \text{ N}$.

La force que doit exercer la meunière, à la montée comme à la descente est : $T_2 = T_1 - F = 18.4 \text{ N}$ ($= 1.88 \text{ kg}$ seulement pour une charge de 25 kg !). Remarque : Avec ce mécanisme le frottement réduit la tension dans le brin de la meunière aussi bien à la montée qu'à la descente. D'où l'intérêt d'augmenter le frottement en augmentant l'angle d'enroulement.

Questions 5 :

Le système est ingénieux et très efficace, il fournit une assistance qui réduit la force à exercer pour hisser la charge de 96% à la montée et de 92% à la descente, tout en laissant la même liberté de travail qu'avec le système original. Ce système très simple fonctionne dans les deux sens (montée et descente) en exploitant un couple moteur qui est, quant à lui, toujours orienté dans le même sens, sans pourtant nécessiter ni d'embrayage, ni d'inverseur de sens de rotation, ni aucun autre type d'accouplement temporaire. Les inconvénients sont l'usure de la corde et du tambour, ainsi que le mauvais rendement.

Solution 15 : Systèmes oscillants

• Systèmes a) et b)

$$\text{a) } J_{eq} = 3mr^2$$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_\alpha}{3mr^2}}$$

$$\text{b) } J_{eq} = 2mr^2 + m(2r)^2 = 6mr^2$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_\alpha}{6mr^2}}$$

Résultat :

$$\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{3mr^2}{6mr^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f_2 = \frac{f_1}{\sqrt{2}} = \boxed{1.41 \text{ Hz}}$$

• Systèmes c) et d)

$$\text{c) } k_{\alpha eq} = 2kr^2$$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2kr^2}{J}}$$

$$\text{d) } k_{\alpha eq} = kr^2 + k(2r)^2 = 5kr^2$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{5kr^2}{J}}$$

Résultat :

$$\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{5kr^2}{2kr^2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow f_2 = f_1 \sqrt{\frac{5}{2}} = \boxed{3.16 \text{ Hz}}$$

• Systèmes e) et f)

$$\text{e) } J_{eq} = 3J + 4J = 7J$$

$$k_{\alpha eq} = kr^2$$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kr^2}{7J}}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } J_{eq} &= J + \frac{1}{4}3J = \frac{7}{4}J \\ k_{\alpha eq} &= kr^2 \\ f_1 &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kr^2}{\frac{7}{4}J}} \end{aligned}$$

Résultat :

$$\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{7J}{\frac{7}{4}J}} = 2 \Rightarrow f_2 = 2f_1 = \boxed{4 \text{ Hz}}$$

• **Systèmes g) et h)**

$$\begin{aligned} \text{g) } m_{eq} &= 4m \\ f_1 &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{4m}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } m_{eq} &= 4m \\ k_{eq} &= \frac{1}{\frac{1}{k} + \frac{1}{4k}} = \frac{4}{5}k \\ f_2 &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\frac{4}{5}k}{4m}} \end{aligned}$$

Résultat :

$$\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{4}{5}} \Rightarrow f_2 = \sqrt{\frac{4}{5}}f_1 = \boxed{1.79 \text{ Hz}}$$