Exercice 1 : Analyse cinématique d'un guidage flexible

Question 1

Qualitativement parlant, les degrés de liberté du bloc A sont décrits ainsi :

$$x^{Fp} \qquad y_1 \quad z_1 \quad r_{x1} \qquad r_{y1} \quad r_{z1}$$

Notation (rappel) :

- x_1 : Mouvement en translation dans la direction x **bloqué** par **une** articulation
- x_n : Mouvement en translation dans la direction x **bloqué** par $\boldsymbol{n}$ articulations (hyperstatisme de degrés $n-1$)
- x^F : Mouvement en translation rectiligne dans la direction x **libre** (Free)
- x^{Fp} : Mouvement en translation dans la direction x libre, mais accompagné d'un mouvement **parasite**.
- x^{LF} : Mouvement en translation rectiligne dans la direction x libre **localement** (Local Freedom) (apparition de contraintes élevées et augmentation significative de la rigidité pour les grandes courses).
- x^{LFp} : Mouvement en translation dans la direction x libre **localement** et accompagné d'un mouvement **parasite**.
- r_{x1} : Mouvement en rotation autour de l'axe x **bloqué** par **une** articulation
- etc.

Question 2

Selon l'analyse qualitative, on a bien $DOF = 1$, le mouvement libre étant la translation selon x accompagnée d'un mouvement parasite selon y.

Question 3

En appliquant le théorème de Grübler sur la cinématique, on calcule la mobilité suivante :

$$M = 3 + 5 + 5 - 2 \cdot 6 = 1 \tag{1}$$

Il y a en effet 2 boucles cinématiques. On considère également une mobilité interne de 3 pour la lame et de 5 pour chaque tige.

Question 4

Le degré d'hyperstatisme de la structure se calcule comme suit :

$$DOH = DOF - M = 0 \tag{2}$$

Exercice 2 : Fréquences propres d'oscillateurs à 1 DDL

a) La fréquence propre du mobile de base est donnée par la relation suivante :

$$f_a = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 3 \text{ Hz}$$

b) On réduit tout à une masse en translation m_{eq} sur le ressort de droite :

$$x_{gauche} = x_{droite}/4 \Rightarrow m_{eq} = 4m/16 = m/4.$$

La fréquence de l'oscillateur est :

$$f_a = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k/9}{m_{eq}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k}{9m}} = \frac{2}{3}f_a = 2 \text{ Hz}$$

c) On réduit les ressorts à une rigidité angulaire équivalente $k_{\alpha eq}$:

$$\frac{1}{2}k_{\alpha eq}\theta^2 = \frac{1}{2}7k(\frac{L}{2}\theta)^2 + \frac{1}{2}4k(\frac{3L}{4}\theta)^2 = \frac{1}{2}(\frac{7}{4} + \frac{9}{4})L^2k\theta^2 \Rightarrow k_{\alpha eq} = 4kL^2$$

La fréquence de l'oscillateur est :

$$f_c = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{\alpha eq}}{J}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4kL^2}{mL^2}} = 2f_a = 6 \text{ Hz}$$

d) On réduit le montage en parallèle du ressort de droite et du ressort rotatif à une rigidité angulaire équivalente $k_{\alpha eq}$ au niveau du ressort rotatif :

$$\frac{1}{2}k_{\alpha eq}\theta^2 = \frac{1}{2}2k(\frac{L}{2}\theta)^2 + \frac{1}{2}4kL^2\theta^2 \Rightarrow k_{\alpha eq} = \frac{1}{2}kL^2 + 4kL^2 = \frac{9}{2}kL^2$$

On réduit la masse de gauche à une inertie équivalente au niveau du ressort rotatif J_{eq}. Le levier de gauche dédouble le mouvement de la masse :

$$\frac{1}{2}J_{eq}\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{m}{2}(2L\omega)^2 \Rightarrow J_{eq} = 2mL^2$$

La fréquence de l'oscillateur est donc :

$$f_c = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{\alpha eq}}{J_{eq}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\frac{9}{2}kL^2}{2mL^2}} = 3/2f_a = 4.5 \text{ Hz}$$

Exercice 3 : Convoyeur à bande

Question 1

Lorsqu'une caisse se trouve en équilibre statique sur la bande à l'arrêt, trois forces agissent sur celle-ci : la pesanteur, la réaction normale de la bande ainsi que le frottement. En effectuant l'équilibre statique d'une caisse lorsque la bande est arrêtée, on peut écrire :

— Selon l'axe x, parallèle à la bande : $f = mg \cdot sin(\theta)$
— Selon l'axe y, perpendiculaire à la bande : $N = mg \cdot cos(\theta)$

A l'imminence de mouvement, nous avons la propriété $f = \mu_b \cdot N$. Dès lors, pour garantir que la caisse ne glisse pas, il faut que le frottement apparent soit inférieur au frottement à l'imminence de mouvement. Donc :

$$mg \cdot sin(\theta) \leq \mu_b \cdot mg \cdot cos(\theta) \tag{3}$$

En simplifiant, on constate que les caisses ne glissent pas sur la bande si $tan(\theta) \leq \mu_b$, ce qui est le cas.

Question 2

Le ressort doit être enroulé selon le sens 1 (figure a) pour remplir la fonction d'anti-recul. En effet, dans le sens de montée des caisses, le tambour va tendre à desserrer les spires du ressort. Le ressort agit donc en limiteur de couple dans le sens de montée des caisses et désolidarise donc le tambour de l'axe de blocage.

Dans le sens inverse, le tambour va resserrer les spires du ressort sur la portée. Le ressort agit donc en embrayage et s'accouple avec l'axe de blocage et va donc bloquer le recul des caisses.

Question 3

Le tambour entraîne la bande, qui elle-même entraîne les caisses par friction. En cas de coupure de courant, il faut donc appliquer un couple M au tambour permettant de maintenir la bande en équilibre statique et éviter que celle-ci ne recule sous l'effet du poids des 18 caisses. Donc, en effectuant les équilibres statiques au niveau du tambour et de la bande, nous pouvons écrire :

— Equilibre statique du tambour : $M = R \cdot T_{bande}$
— Equilibre statique de la bande : $T_{bande} = 18 \cdot mg \cdot sin(\theta)$

Donc :

$$M = 18R \cdot mg \cdot sin(\theta) \tag{4}$$

L'application numérique nous donne $M = 33.7Nm$.

Question 4

Dans le cas du système anti-recul pour le convoyeur, le mécanisme d'embrayage ressort devra donc fonctionner en limiteur de couple en fonctionnement normal (lorsque les caisses sont convoyées sur la bande). En cas de coupure de courant, le mécanisme d'embrayage à ressort fonctionnera en embrayage, en s'accouplant avec l'axe bloqué et permettra donc de retenir les caisses.

Le couple transmissible en embrayage C est donné par l'équation suivante :

$$C = \frac{D^2 - D_i^2}{D \cdot D_i^2} \cdot EI(e^{\mu\alpha} - 1) \tag{5}$$

Dans un premier temps, nous avons la contrainte de dimensionnement suivante, intégrant le facteur de sécurité $S = 2$:

$$C \geq S \cdot M \tag{6}$$

Dans un second temps, il faut considérer la plage de tolérance de fabrication sur le diamètre non-monté D_i. Nous savons que plus le diamètre D_i est petit par rapport au diamètre monté D, plus le couple transmissible par friction sera important. On va donc dimensionner le ressort en considérant le diamètre D_i le plus élevé :

$$D_i = (1+\gamma) \cdot D_{i,nom} \tag{7}$$

avec $\gamma = 0.01$

En combinant les expression 5 et 6, on peut donc écrire :

$$C = \frac{D^2 - D_i^2}{D \cdot D_i^2} \cdot EI(e^{\mu\alpha} - 1) \geq 2M \tag{8}$$

En simplifiant, on a :

$$e^{\mu\alpha} \geq \frac{2M \cdot D \cdot D_i^2}{(D^2 - D_i^2) \cdot EI} + 1 \tag{9}$$

En se rappelant que $\alpha = 2\pi \cdot n$, avec n le nombre de spires actives du ressort, on peut écrire :

$$\mu \cdot 2\pi \cdot n \geq ln\left(\frac{2M \cdot D \cdot D_i^2}{(D^2 - D_i^2) \cdot EI} + 1\right) \tag{10}$$

En intégrant l'équation 7 et en isolant n, on a finalement :

$$n \geq \frac{1}{\mu \cdot 2\pi \cdot} ln\left(\frac{2M \cdot D \cdot (1+\gamma)^2 \cdot D_{i,nom}^2}{(D^2 - (1+\gamma)^2 \cdot D_{i,nom}^2) \cdot EI} + 1\right) \tag{11}$$

L'application numérique donne $n \geq 5$. Le ressort doit donc avoir un minimum de 5 spires actives pour garantir le couple de retenue M en embrayage avec un facteur de sécurité $S = 2$.

Question 5

Le rendement η du convoyeur s'écrit comme le rapport du couple nécessaire à appliquer au tambour sans frottement avec le couple nécessaire à appliquer au tambour avec frottement. Dans le cas présent, le rendement s'écrit :

$$\eta = \frac{M}{M + C_{lim,max}} \tag{12}$$

En effet, une partie de l'énergie du moteur est effectivement dissipée par frottement dans l'embrayage fonctionnant en limiteur de couple.

En considérant la plage de tolérance de fabrication sur le diamètre non-monté D_i. Nous savons que plus le diamètre D_i est petit par rapport au diamètre monté D, plus le seuil de couple limite sera important. On va donc dimensionner le ressort en considérant le diamètre D_i le plus faible :

$$D_i = (1-\gamma) \cdot D_{i,nom} \tag{13}$$

Dès lors, en faisant l'hypothèse que le nombre de spires est suffisant pour négliger l'influence du terme exponentiel, on a :

$$\eta = \frac{M}{M + \frac{D^2 - (1-\gamma)^2 \cdot D_{i,nom}^2}{D \cdot (1-\gamma)^2 \cdot D_{i,nom}^2} EI \frac{(e^{\mu\alpha} - 1)}{e^{\mu\alpha}}} \approx \frac{M}{M + \frac{D^2 - (1-\gamma)^2 \cdot D_{i,nom}^2}{D \cdot (1-\gamma)^2 \cdot D_{i,nom}^2} EI} \tag{14}$$

Finalement l'application numérique donne $\eta = 98.5\%$. Très peu d'énergie est dissipée par frottement dans le ressort.

Exercice 4 : Montage de roulements à billes

Voici la démarche chronologique menant à la solution :

L'absence de jeu est obtenue grâce à un rattrapage de jeu par précontrainte du montage.

Le frottement est interdit, le rattrapage de jeu demande donc l'utilisation de deux roulements montés en opposition.

Le rotulage demandé nous indique qu'il faut rapprocher au maximum (idéalement faire coïncider) les centres de pivotement des roulements. Pour ce faire, un montage en « X » est avantageux.

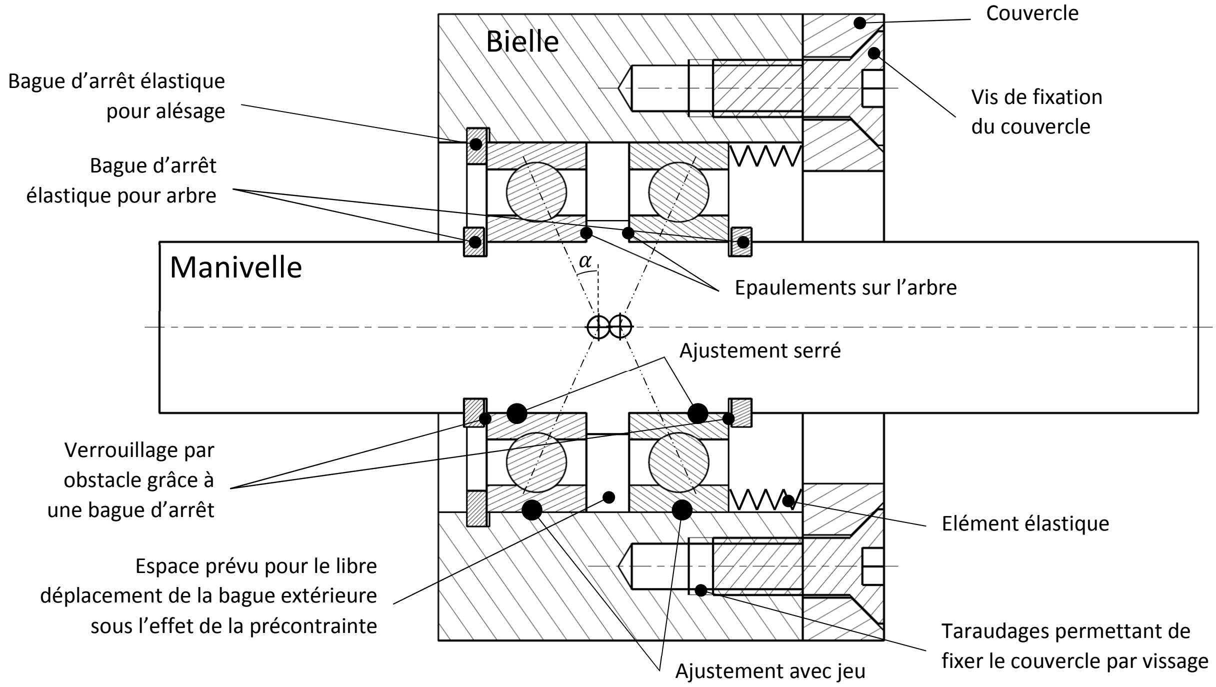
Il est possible de précontraindre un tel montage géométriquement ou élastiquement, mais la façon géométrique est interdite dans la donnée.

Le schéma du mécanisme permet de déterminer la direction de la charge s'appliquant au roulement : la force transitant de la manivelle à la bielle est constamment alignée avec l'axe longitudinal de cette dernière (dans le plan du schéma et passant par ses deux articulations). La direction de la charge appliquée sur les roulements est donc fixe par rapport aux bagues extérieures et tournante par rapport aux bagues intérieures, il faut donc prévoir un ajustement serré pour les bagues intérieures.

L'élément élastique utilisé pour exercer la précontrainte ne peut donc agir que sur les bagues extérieures.

Un ajustement avec jeu est préconisé pour les bagues extérieures afin de faciliter leur montage. Toutefois, au moins une des deux bagues extérieures doit absolument être ajustée avec jeu car elle doit pouvoir être libre de se déplacer axialement sous l'effet de l'élément élastique utilisé pour la précontrainte.

Solution :



Remarques :

- L'élément élastique peut être implémenté sous forme de ressort hélicoïdal de compression ou de rondelles élastiques.
- Les centres de pivotement sont rapprochés au maximum l'un de l'autre par le montage en «X» dans le but d'obtenir le rotulage demandé. Rappel : pour des roulements à gorge profonde, les lignes de force forment un angle de contact α allant de 4° à 10° en fonction du jeu interne du roulement.
- Les verrouillages par obstacle des bagues intérieures ajustées avec serrage garantissent un montage robuste aux vibrations et aux chocs.