

Christophe ANCEY

LABORATOIRE HYDRAULIQUE ENVIRONNEMENTALE (LHE)

École Polytechnique Fédérale de Lausanne

Écublens

CH-1015 Lausanne

Analyse différentielle

**Outils mathématiques
pour la
dynamique des fluides**



Table des matières

1 Fonctions à variable complexe	3
1.1 Généralités	3
1.1.1 Définition des fonctions holomorphes (ou analytiques)	3
1.1.2 Dérivation des fonctions holomorphes	4
1.1.3 Intégration des fonctions holomorphes	5
1.1.4 Séries de fonctions complexes	9
1.1.5 Principe de réflexion de Schwarz	13
1.2 Transformations conformes	14
1.2.1 Définitions	14
1.2.2 Quelques transformations classiques	15
1.2.3 Transformation de Schwarz-Christoffel	15
1.2.4 Transformation de Joukowski	17
1.3 Applications	17
1.3.1 Jet libre	19
1.3.2 Rupture de barrage	22
1.3.3 Équilibre d'un fluide plan incompressible newtonien	24
2 Portrait de phase	27
2.1 Généralités	27
2.2 Typologie des points singuliers	30
2.3 Détermination de la courbe asymptotique	31
2.3.1 Détermination numérique	31
2.3.2 Détermination analytique	32
2.4 Cas des points singuliers situés à l'infini	33
2.5 Cas des points singuliers avec tangente horizontale/verticale	34
3 Les équations aux dérivées partielles du premier ordre	37
3.1 Equations linéaires	37
3.2 Equations non linéaires	38
3.2.1 Généralités	38
3.2.2 Méthodes de Charpit	38

4	Équations différentielles linéaires du second ordre	41
4.1	Classification des équations à deux variables	41
4.2	Équations elliptiques	44
4.2.1	Formule de Green	44
4.3	Équations hyperboliques	45
4.3.1	Équation des ondes	45
4.3.2	Problème de Cauchy	46
4.3.3	Fonction de Riemann	47
4.4	Solutions faibles des problèmes hyperboliques	50
4.5	Conditions aux limites pour les problèmes hyperboliques	51
4.5.1	Équation des ondes	51
4.5.2	Vocabulaire	55
4.6	Transformation en équations linéaires du second ordre	57
4.6.1	Méthode de l'hodographe	57
4.6.2	Onde simple	58
4.6.3	Application : équations de Saint-Venant	60
5	Les équations différentielles et leurs symétries	77
5.1	Définition : groupe de transformation à un paramètre	77
5.1.1	Généralités	78
5.1.2	Orbites et courbes invariantes	78
5.1.3	Générateur infinitésimal	80
5.1.4	Prolongation d'un générateur infinitésimal	81
5.1.5	Prolongation du groupe pour des symétries ponctuelles	82
5.2	Applications	84
5.2.1	Première application : le changement de variable	84
5.2.2	Seconde application : la méthode du facteur intégrant	87
5.2.3	Troisième application : groupes laissant une équation invariante	88
5.3	Algèbre de Lie	90
5.3.1	Commutateur	90
5.3.2	Algèbre de Lie	90
5.4	Solutions invariantes des équations différentielles	92
5.5	Cas particulier des équations du premier ordre	93
5.5.1	Indétermination des équations caractéristiques	93
5.5.2	Solutions singulières des équations différentielles du 1 ^{er} ordre	94
5.6	Résolution des équations du second ordre : théorème de réduction de Lie	95
5.7	Résolution des équations différentielles d'ordre n (méthode des invariants)	96
5.8	Analyse dimensionnelle	99

6	Exemples traités	101
6.1	Équations du second ordre	101
6.1.1	Résoudre l'équation $y\ddot{y} - \dot{y}^2 - a^2y^3 = 0$	101
6.1.2	Résoudre l'équation $\ddot{y} + 2\dot{y}/x + y^n = 0$ (Emden-Fowler)	104
6.1.3	Résoudre l'équation $4\ddot{y} + 9x\dot{y}^{5/3} = 0$ (hélium super-fluide)	107
6.2	Équations du troisième ordre	109
6.2.1	Résoudre l'équation $\ddot{y} + y\ddot{y} = 0$ (Blasius)	109
6.2.2	Méthode 1 : résolution par itération successive	110
6.2.3	Méthode 2 : invariants fondamentaux	116
7	Les équations aux dérivées partielles et leurs symétries	119
7.1	Transformations finies de dérivées partielles	119
7.1.1	Notations	119
7.1.2	Transformations infinitésimales	120
7.1.3	Condition d'invariance pour les EDP	121
7.2	Équations scalaires à deux variables dépendantes	121
7.2.1	Changement de variables et condition de symétrie	121
7.2.2	Condition de symétrie pour les groupes de Lie	122
7.2.3	Exemple : équation linéaire de diffusion	123
7.2.4	Exemple : équation non linéaire de diffusion	124
7.2.5	Exemple : équation de couche limite avec gradient de pression	125
7.3	Solutions similaires pour les équations aux dérivées partielles	127
7.3.1	Généralités : passage EDP $\rightarrow$ EDO	127
7.3.2	Comportement asymptotique	127
8	Quelques équations classiques	131
8.1	Équation non linéaire de diffusion $h_t = h_x^2$	131
8.1.1	Caractéristiques d'une équation non linéaire du premier ordre	131
8.1.2	Problème avec conditions aux limites et initiales	132
8.1.3	Propriétés des équations	132
8.1.4	Développement asymptotique aux temps petits	133
8.1.5	Développement asymptotique aux temps grands	134
8.2	Équation non linéaire de diffusion $h_t = (h^n h_x)_x$	134
8.2.1	Propriétés des équations	134
8.2.2	Conditions aux limites	134
8.2.3	Solutions auto-similaires aux temps courts	136
8.2.4	Solutions auto-similaires aux temps longs	139
8.2.5	Transition des temps courts aux temps longs	143

Fonctions à variable complexe

Nous commençons par rappeler quelques-uns des principaux résultats sur les fonctions à variable complexe. Nous présentons ensuite quelques exemples d'application à la mécanique des fluides. La théorie des fonctions à variable complexe est particulièrement efficace et utile pour des problèmes elliptiques où le problème à résoudre se ramène à une équation de la forme $\Delta\psi = 0$.

On emploie les notations suivantes : le nombre imaginaire est désigné par $\imath = \sqrt{-1}$, la partie réelle d'un complexe $z = x + \imath y$ est notée $x = \Re(z)$, la partie imaginaire est notée $y = \Im(z)$. Le conjugué de z est noté $\bar{z} = x - \imath y$. Le conjugué d'une fonction $f(z)$ est définie par $\bar{f} = \overline{f(\bar{z})}$.

1.1 Généralités

1.1.1 Définition des fonctions holomorphes (ou analytiques)

L'utilisation de fonctions à variable complexe permet de simplifier des problèmes de la mécanique de façon notable. L'introduction d'une variable complexe $z = x + \imath y$ à la place d'une (de) variable(s) réelle(s) introduit quelques problèmes, notamment en ce qui concerne la dérivabilité et l'unicité de la définition. Par exemple, la fonction $f(z) = z^2$ ne pose pas de problème particulier car à un point du plan complexe on associe un autre point de façon unique. En revanche, si on ne prend pas de précautions particulières, la fonction $f(z) = z^{1/2}$ est à valeurs multiples. En effet, considérons $z_1 = e^{2\imath\pi}$ et $z_2 = e^{4\imath\pi}$; ces affixes définissent le même point du plan complexe, en l'occurrence un point A situé en (1, 0). Pourtant, on a $f(z_1) = e^{\imath\pi}$ et $f(z_2) = e^{2\imath\pi}$. L'image de z_2 est toujours situé au point A tandis que l'image de z_1 est B de coordonnées (-1, 0).

Pour éviter ce genre de problèmes, on va définir des domaines où les fonctions donnent des images de façon unique. À cet effet, on introduit la notion de *point de coupure* : un point z_0 est un point de coupure pour f si, quand z effectue une révolution complète autour de z_0 , l'image de z ne retourne pas à son point de départ. Clairement, dans le cas $f(z) = z^{1/2}$, le point origine est un point de coupure ; de même le point « infini » est un point de coupure. Afin d'éviter la non-unicité du point image, on coupe le plan complexe en traçant une droite reliant les points de coupure. Par exemple, pour $f(z) = z^{1/2}$, la coupure se fait le long de l'axe réel $y = 0$ et il s'ensuit que la fonction $f(z) = z^{1/2}$ n'est définie que pour $0 < \theta \leq 2\pi$ ($z = re^{\imath\theta}$). À noter que différentes coupures peuvent être proposées ; par exemple avec $f(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}$, avec a et b réels ($a < b$), la coupure peut se faire par un segment entre a et b ou bien deux demi-droites $]-\infty, a]$ et $]b, +\infty]$.

On peut ensuite énoncer différents résultats valables pour les fonctions définies de façon

univoque. On va notamment introduire la notion centrale de fonction *holomorphe* ou *analytique*, qui pour les physiciens recouvrent la même réalité : on dit qu'une fonction est analytique lorsque l'image $z' = f(z)$ de tout point d'un domaine Ω est définie de façon unique et que la fonction est dérivable. On commence par donner une condition nécessaire et suffisante de dérivabilité, puis on s'intéressera au calcul intégral.

Condition de Cauchy : une fonction $f(x, y) = A(x, y) + \imath B(x, y)$ est dérivable en $z = x + \imath y$ si :

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial A}{\partial y} = -\frac{\partial B}{\partial x}.} \quad (1.1)$$

Sous des réserves de régularité, on peut montrer que c'est une condition nécessaire et suffisante.

Une fonction est dite *holomorphe* dans un domaine¹ Ω si elle admet une dérivée en tout point de Ω . Si $f(x, y) = A(x, y) + \imath B(x, y)$ est holomorphe sur Ω , alors A et B vérifient l'équation de Laplace

$$\boxed{\Delta A = \Delta B = 0,} \quad (1.2)$$

où l'on a noté Δ (écrit aussi parfois ∇^2) l'opérateur dit *laplacien* :

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2},$$

en coordonnées cartésiennes.

Il suffit de prendre les parties réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe pour obtenir des fonctions *harmoniques*². Une fonction holomorphe est automatiquement indéfiniment dérivable sur le domaine Ω . C'est un résultat remarquable qui tranche avec les propriétés des fonctions à variable réelle pour lesquelles il n'existe pas de lien systématique de régularité entre la dérivée à l'ordre 1 et les dérivées d'ordre supérieur.

► La partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction analytique doivent toutes deux satisfaire l'équation de Laplace (autrement dit, ce sont des fonctions harmoniques) pour que la condition de Cauchy-Riemann soit vérifiée. On les appelle des *conjugués harmoniques*. Notons que les lignes isovaleurs sont perpendiculaires, c'est-à-dire si $w = u + \imath v$, alors

$$\boxed{\nabla u \cdot \nabla v = 0.}$$

Notamment, lorsqu'une fonction u est harmonique sur un domaine, on peut toujours construire une fonction v qui soit son conjugué harmonique.

1.1.2 Dérivation des fonctions holomorphes

La dérivation des fonctions à variable complexe suit les mêmes règles que les fonctions à variable(s) réelles. On peut également les dérivations dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \imath \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \imath \frac{\partial}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

1. Sous-ensemble ouvert et connexe : à tout point de ce domaine on peut lui associer un disque centré sur lui et de rayon non nul (le point n'est pas sur une frontière, on doit pouvoir l'attendre quelle que soit la direction choisie) ; un domaine est connexe si toute ligne polygonale reliant des points du domaine est elle-même incluse dans le domaine.

2. Une fonction est dite harmonique quand elle vérifie l'équation de Laplace et qu'elle est continue.

avec $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$. On peut également se servir de :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= i \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.\end{aligned}$$

Si $w = u + iv$, alors on a :

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y}.$$

L'équation de Laplace s'écrit en variables complexes :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow 4 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \bar{z}} = 0.$$

1.1.3 Intégration des fonctions holomorphes

L'intégration dans le plan complexe repose sur la notion de « chemin » : un chemin est une courbe continûment dérivable par morceaux sur $\mathbb{C}$: un chemin Γ est la courbe d'équation $z = \gamma(s)$ définie sur $[a, b]$. Un chemin est toujours orienté de son origine vers son extrémité ; lorsque les deux points coïncident, on parle de *lacet*. La plupart des propriétés valables pour les fonctions à variable réelle marchent également dans le cas complexe.

Théorème de Cauchy : soit f une fonction holomorphe sur le domaine Ω , alors pour deux lacets Γ_1 et Γ_2 homotopes³ :

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

Notamment pour un lacet homotope à un point, alors

$$\boxed{\int_{\Gamma} f(z) dz = 0,}$$

quelque soit le lacet Γ . La réciproque du théorème de Cauchy – connue sous le nom de théorème de Morera – énonce que si $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ alors la fonction est holomorphe.

► Une conséquence importante pour l'intégration est la suivante : pour une fonction holomorphe, l'intégrale de f entre deux points A et B ne dépend pas du chemin choisi :

$$\boxed{\int_A^B f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz,} \quad (1.3)$$

quelles que soient les courbes Γ_1 et Γ_2 reliant A et B.

C'est cette propriété qu'il va être intéressant d'exploiter pour faciliter le travail d'intégration. Si f est une fonction holomorphe sur un large domaine, on peut choisir à sa guise la contour d'intégration. Par exemple (voir figure 1.1), imaginons que l'on intègre f sur un lacet Γ ; on peut réduire ce lacet et intégrer – sans changer le résultat – sur le lacet Γ' . C'est une conséquence immédiate du théorème de Cauchy

$$\int_{\Gamma} f(z) dz + \int_{AB} f(z) dz - \int_{\Gamma'} f(z) dz + \int_{BA} f(z) dz = 0,$$

3. Deux lacets sont homotopes si on peut passer de l'un à l'autre par une transformation continue sans sortir du domaine Ω . Si sur le domaine Ω , tout lacet est homotope à un point, alors le domaine est *simplement connexe*.

et puisque les intégrales le long de AB se composent, on tire

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma'} f(z)dz.$$

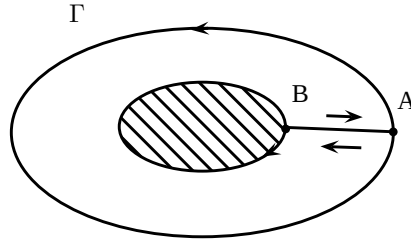


Figure 1.1 : contour agrandi ou rétréci.

Le théorème de Cauchy nous permet aussi de montrer simplement que si f n'est pas holomorphe en un nombre fini de points (singuliers) au sein d'un contour Γ , alors on peut tracer de petits contours élémentaires entourant ces points singuliers et transformer l'intégrale sur Γ en une somme d'intégrales autour des points singuliers

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma_i} f(z)dz.$$

Ce résultat va nous permettre de démontrer le théorème des résidus un peu plus loin.

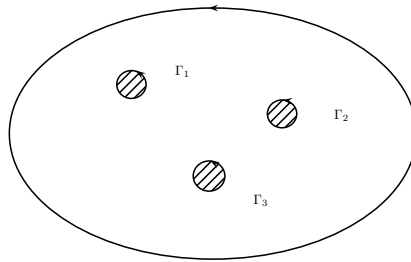


Figure 1.2 : contour autour de points singuliers.

Formule de Cauchy : pour tout lacet Γ d'un domaine simplement connexe Ω et pour toute fonction holomorphe sur Ω , alors pour tout point z_0 intérieur au lacet Γ , on a :

$$\epsilon f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad (1.4)$$

avec $\epsilon = \pm 1$ l'indice⁴ de z_0 par rapport à Γ . Si z_0 est à l'extérieur du domaine délimité par Γ , alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0.$$

Quelques conséquences importantes :

- Si f est holomorphe sur un domaine simplement connexe, alors il suffit de connaître f sur un lacet autour de z_0 pour connaître $f(z_0)$.

4. C'est le nombre de tours faits par l'image de Γ autour de z_0 quand s croît de a à b . Selon que Γ est orienté positivement ou négativement, $\epsilon = \pm 1$.

- Ainsi la valeur de f au centre d'un cercle est égale à la valeur moyenne sur le cercle. D'où l'on déduit que f ne peut pas prendre son maximum relatif à l'intérieur de Ω .
- Toute fonction holomorphe est indéfiniment dérivable sur le domaine considéré.

Comme on l'a indiqué plus haut, toute fonction $f(z)$ holomorphe sur un domaine Ω est indéfiniment dérivable sur ce domaine. On a par ailleurs

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw.$$

Théorème de Liouville : si f est bornée et holomorphe sur $\mathbb{C}$ alors f est une constante.

► Ce théorème semble anodin. Il montre en fait qu'une fonction complexe doit nécessairement comporter des points singuliers et donc ne pas être analytique dans le plan complexe pour présenter un intérêt (c'est-à-dire si on ne s'intéresse pas qu'aux fonctions constantes).

Valeur principale d'une intégrale : considérons une fonction définie sur un contour Γ et un point ζ_0 sur ce contour. L'intégrand $f(\zeta)/(\zeta - \zeta_0)$ est partout défini sur ce contour sauf au point ζ_0 , ce qui rend l'intégrale $\int_{\Gamma} f(z) dz$ impropre. Cette intégrale peut avoir un sens si la limite de

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - C_{\epsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta \text{ existe,}$$

où C_{ϵ} est l'arc formé par l'intersection entre Γ et le disque de rayon ϵ (supposé petit). Cette limite est appelée *valeur principale*.

Par exemple, considérons $\int_{\Gamma} z^{-1} dz$, avec Γ un contour fermé passant par O . Ici, on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - C_{\epsilon}} \frac{1}{\zeta} d\zeta = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - C_{\epsilon}} \arg \zeta d\zeta = i\pi,$$

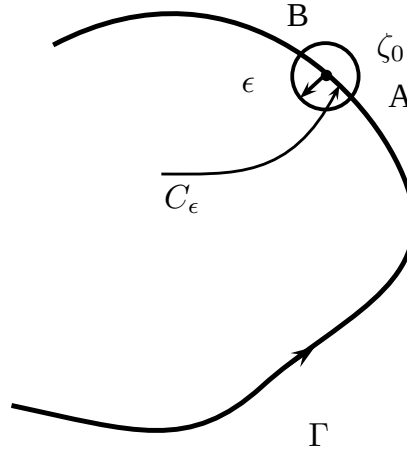


Figure 1.3 : contour avec un point singulier.

Formules de Plemelj : La formule de Cauchy permet aussi de montrer une série de formules dite de formules de Plemelj, qui ont leur utilité en mécanique des fluides dans les calculs de surface libre. On considère un contour fermé Γ avec un point z_0 , qui délimite un domaine L et un domaine R ; on se donne une fonction $\phi(z)$ sur Γ de telle sorte que $\int_{\Gamma} (\phi(z) - \phi(z_0))/(z - z_0)$ existe. On définit

$$\Phi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

On peut définir la limite à gauche

$$\Phi^L(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0, z \in L} \Phi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\zeta) - \phi(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta + \phi(z_0).$$

Et de même, la limite à droite vaut

$$\Phi^R(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0, z \in R} \Phi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\zeta) - \phi(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta.$$

Ce résultat se montre facilement en décomposant

$$\Phi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\zeta) - \phi(z_0) + \phi(z_0)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\zeta) - \phi(z_0)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\phi(z_0)}{\zeta - z} d\zeta.$$

À l'aide de la formule de Cauchy, on tire le résultat recherché. $\square$

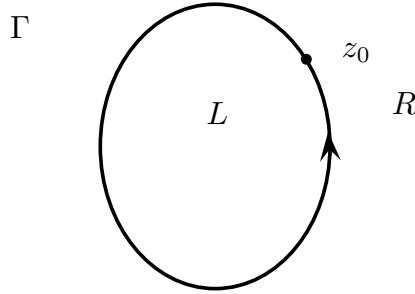


Figure 1.4 : contour fermé avec un point singulier.

La différence des deux résultats nous la *première formule de Plemelj*

$$\Phi^L(z_0) - \Phi^R(z_0) = \phi(z_0), \quad (1.5)$$

alors que la somme des deux intégrales nous fournit la *deuxième formule de Plemelj*

$$\Phi^L(z_0) + \Phi^R(z_0) = \frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta. \quad (1.6)$$

Ce résultat marche également si au lieu de prendre un contour fermé, on prend un contour ouvert. Cela permet d'aboutir au *théorème de Plemelj*, qui fournit la solution à l'équation fonctionnelle dit *problème de Riemann-Hilbert*, qui consiste à chercher une fonction Φ analytique dans le plan z sauf le long d'un arc Γ , où elle vérifie la condition de saut

$$\Phi^L(z_0) - \Phi^R(z_0) = \phi^R(z_0), \quad (1.7)$$

pour tout z_0 de cet arc Γ . Cette équation admet une solution unique qui est holomorphe partout excepté sur l'arc Γ

$$\Phi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (1.8)$$

1.1.4 Séries de fonctions complexes

Une série de fonctions $u_n(z)$ est une suite de fonctions

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^n u_k(z).$$

Les théorèmes sur les séries de fonctions à variable entière se généralisent pour les séries de fonctions à variable complexe. Un théorème important est dû à Weierstrass : si la série $u_n(z)$ est une suite de fonctions holomorphes et si la série est uniformément convergente, alors la fonction

$$S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$$

est holomorphe et sa dérivée est la somme des dérivées $u'_n(z)$.

Une *série entière* est une série dont le terme général est de la forme :

$$u_n(z) = a_n(z - c)^n,$$

avec a_n , c , et z des complexes. Le *rayon de convergence* ρ est le scalaire tel que pour tout $|z| < r$ la série converge (absolument). La formule d'Hadamard permet d'exprimer le rayon de convergence à partir des coefficients a_n :

$$\rho^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{p \geq n} |a_p|^{1/p}.$$

Un résultat important est le suivant : la somme d'une série entière est holomorphe dans son disque de convergence.

Ces résultats peuvent être utilisés pour définir la série de Taylor d'une fonction holomorphe : toute fonction holomorphe est représentable par une série entière. En effet, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dz,$$

avec Γ un lacet autour d'un point d'affixe a . En développant $1/(w - z)$ en série entière de $z - a$

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - a} \left(1 + \frac{z - a}{w - a} + \cdots + \left(\frac{z - a}{w - a} \right)^+ \cdots \right),$$

on obtient en intégrant terme à terme

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - a)^n,$$

avec $a_n = f^n(a) = (2i\pi)^{-1} \int_{\Gamma} f(w)(w - a)^{-(n+1)}$. L'holomorphic permet également de relier a_n aux dérivées de f de façon unique :

$$f(z) = f(a) + (z - a)f'(a) + \frac{(z - a)^2}{2!}f''(a) + \cdots.$$

Toute fonction holomorphe décomposable en série de Taylor est appelée *fonction analytique*.

Considérons une fonction holomorphe sur un domaine simplement connexe Ω . Pour tout point d'affixe a de Ω , il existe un disque centré sur a contenu dans Ω à l'intérieur duquel $f(z)$ est la somme d'une série de Taylor :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - a)^n.$$

Si on peut écrire

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-a)^n = a_p(z-a)^p h(z),$$

avec $h(a) = 1$, alors a est un *zéro d'ordre p* de f . Tout zéro d'une fonction holomorphe est isolé si $f \neq 0$.

Soient deux domaines Ω et Ω_1 tels que $\Omega_1 \subset \Omega$, si deux fonctions f et f_1 sont respectivement holomorphes sur Ω et Ω_1 et si $f(z) = f_1(z)$ pour tout $z \in \Omega_1$, alors f_1 est appelé *prolongement analytique* de f sur Ω_1 ou bien encore f est la restriction de f_1 à Ω .

La *série de Laurent* peut être considérée comme une généralisation de la série de Taylor lorsque le point d'affixe a n'est pas dans Ω . Dans ce cas, on ne peut pas développer en série de Taylor puisque z dans un voisinage de a n'est pas dans Ω . On peut toujours, en revanche, exprimer f comme une série de Laurent :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-a)^n,$$

avec $b_n = (2i\pi)^{-1} \int_{\Gamma} f(w)(w-a)^{-(n+1)} dw$ et Γ un lacet quelconque dans Ω et entourant a . La série de Laurent coïncide avec la série de Taylor lorsque a est dans Ω ; dans ce cas, les coefficients b_n sont nuls pour $n < 0$.

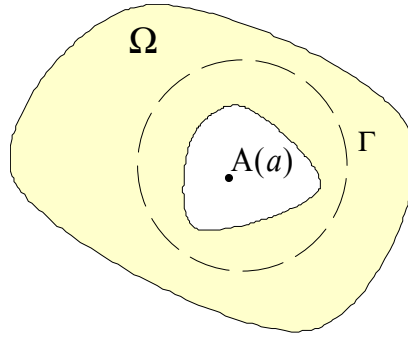


Figure 1.5 : domaine Ω évidé en son centre.

Considérons une fonction f holomorphe sur un disque de rayon R privé de son centre A d'affixe a : $f(z)$ est dérivable pour $0 < |z-a| < R$, mais f peut ne pas être définie en $z = a$. On peut développer f en série de Laurent de centre a :

$$f(z) = v(z) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n,$$

avec :

$$v(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n}.$$

La fonction $v(z)$ s'appelle la *partie singulière* de f .

- Si tous les coefficients b_n sont nuls, c'est-à-dire si $v = 0$, alors la fonction F qui est égale
 - à $f(z)$ dans le disque privé de son centre,
 - a_0 en $z = a$,

est analytique dans le disque. Dans ce cas, $z = a$ est une *singularité apparente*.

- Dans le cas contraire, $z = a$ est un *point singulier isolé*. Ce point est un pôle si un nombre fini de coefficients b_n sont différents de zéro sinon on parle de point singulier essentiel (ou pôle d'ordre infini). Plus précisément, si $b_n \neq 0$ et $b_p = 0$ pour $p > n$, alors :

$$f(z) = \frac{b_p}{(z-p)^p} + \frac{b_{p-1}}{(z-p)^{p-1}} + \cdots + \frac{b_1}{z-p} + \sum_{k=0}^{\infty} a_n(z-a)^n.$$

Pour établir la nature d'un point, on peut se servir des résultats suivants :

- Si f non définie en $z = a$ a une limite quand $z \rightarrow a$, alors $z = a$ n'est qu'une singularité apparente.
- Si pour $p \in \mathbb{N}_+$, $(z-a)^p f(z)$ tend vers une limite non nulle quand $z \rightarrow a$ alors le point a est un pôle d'ordre p .

Si $z = a$ est un point singulier isolé, alors dans un disque centré sur a , on a vu qu'on peut écrire :

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n} + \sum_{k=0}^{\infty} a_n(z-a)^n,$$

et dans ce cas, le coefficient b_1 a une importance toute particulière : on l'appelle *résidu* de f en $z = a$ et on le note :

$$b_1 = \text{Res}(a, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz;$$

avec Γ un lacet orienté positivement ayant pour trajectoire un cercle autour de a ne contenant pas d'autre point singulier autre que a . Si a est un pôle, on peut déterminer le résidu sans calcul intégral à l'aide de quelques astuces :

- Si a est un pôle simple, alors on peut écrire :

$$f(z) = \frac{b_1}{a-z} + h(z),$$

donc le résidu est b_1 . Par exemple si $f = G(z)/H(z)$ avec F et G deux fonctions holomorphes telles que $G(a) \neq 0$ et $H(z) = (z-a)H_*$ ($H_*(a) \neq 0$), alors a est un pôle simple et :

$$\text{Res}(a, f) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z-a)G(z)}{H(z) - H(a)} = \frac{G(z)}{H'(z)}.$$

- On peut généraliser ce résultat à un pôle d'ordre p et montrer que

$$\text{Res}(a, f) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} f(z) (z-a)^p.$$

- Si $f(z) = f(-z)$, alors $\text{Res}(0, f) = 0$.
- Pour un point singulier essentiel, il faut le plus souvent calculer la série de Laurent pour calculer le résidu.

Théorème des résidus : Soient $z_1, z_2, \dots, z_n$ un nombre fini de points distincts d'un domaine simplement connexe et f une fonction holomorphe. La partie singulière est notée pour le point z_k :

$$v_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{n,k}}{(z-z_k)^n}.$$

Cette fonction est définie sur un disque centré sur z_k de rayon suffisamment petit pour ne pas contenir d'autres points singuliers. Pour tout lacet Γ contenant tous les points singuliers on a :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=1}^n \epsilon_k \text{Res}(z_k, f).$$

► Ce théorème a d'importantes implications dans le calcul d'intégrales de fonction à variable réelle car il permet de simplifier le calcul. Un corollaire de ce théorème est le suivant : on cherche à calculer

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{g(z)} dz,$$

avec $f(a) \neq 0$, $g'(a) \neq 0$, mais $g(a) = 0$ pour un point a à l'intérieur de Γ . On montre après développement en série de Taylor et application du théorème des résidus que :

$$I = 2i\pi \frac{f(a)}{g'(a)}.$$

Ce calcul peut être étendu lorsque $g^{(n)} = 0$ pour $0 \leq n \leq i$ et $g^{(n+1)} \neq 0$.

♣ **Exemple.** – Calcul de $I = \int_0^\infty (1+x^2)^{-1} dx$.

Notons tout d'abord que l'on a à cause de la parité de l'intégrand :

$$I = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx.$$

L'intégrand a deux pôles situés en $(0, \pm i)$. Considérons un demi-cercle comme sur la figure 1.6 de rayon R .

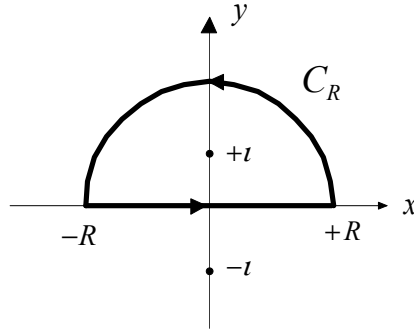


Figure 1.6 : contour choisi pour le calcul de l'intégrale.

Calculons $I(R)$ sur ce contour

$$I(R) = \frac{1}{2} \int_{C_R} \frac{1}{1+z^2} dz + \frac{1}{2} \int_{-R}^R \frac{1}{1+z^2} dz.$$

D'après la formule de Cauchy (1.4), on a : $I(R) = \pi/2$. Notons par ailleurs que

$$\frac{1}{2} \int_{C_R} \frac{1}{1+z^2} dz = \frac{i}{2} \int_0^\pi \frac{Re^{i\theta}}{1+R^2 e^{2i\theta}} d\theta \approx \frac{i}{2R} \int_0^\pi e^{-i\theta} d\theta \rightarrow 0 \text{ quand } R \rightarrow \infty.$$

On déduit alors que $I = \pi/2$. □

1.1.5 Principe de réflexion de Schwarz

Bien des problèmes en mécanique des fluides impliquent un milieu semi-infini avec une frontière. Par exemple, considérons un demi-plan infini avec une frontière solide et une source à l'intérieur du demi-plan ; la méthode utilisée pour résoudre ce type de problème, dite « méthode des images », consiste à placer un puits de façon symétrique par rapport à la frontière. La condition de non-pénétration sera alors vérifiée à la paroi.

Cette méthode peut être généralisée de la façon suivante dans le cas des fonctions à variable réelle. Considérons un demi-plan $y < 0$ et une frontière en $y = 0$. On cherche à déterminer une fonction $f(x, y)$ vérifiant l'équation de Laplace dans le demi-plan $y < 0$. Pour cela on considère le prolongement par symétrie :

$$\tilde{f}(x, y) = -f(x, -y).$$

On montre facilement que la fonction $\tilde{f}(x, y)$ vérifie aussi l'équation de Laplace dans le demi-plan $y > 0$. Si, de plus, on impose $\tilde{f}(x, y) = f(x, y)$ pour $y > 0$ alors $\tilde{f}(x, y)$ vérifie l'équation de Laplace dans tout le plan, elle doit être nulle pour $y = 0$, et elle doit être impaire.

Ce principe peut être étendu aux fonctions à variable complexe. Introduisons la notation $\bar{f}$:

$$\bar{f}(z) = \overline{f(\bar{z})},$$

soit encore avec $f = u + iv$

$$\hat{f}(z) = u(x, -y) - iv(x, -y).$$

Si f est définie dans le demi-plan inférieur, alors $\hat{f}$ est définie dans le demi-plan supérieur. Le principe de Schwarz s'énonce ainsi.

Principe de Schwarz : dans le demi-plan, soit D une région fermée avec une frontière L le long de l'axe $y = 0$. Considérons une fonction analytique dans D , continue sur ses frontières, et prenant des valeurs réelles sur l'axe $y = 0$. Alors, $\hat{f}$ est la continuation analytique de f à travers L de D sur son image miroir D' . Une fonction F définie comme $F(z) = f(z)$ pour $z \in D$ et $F(z) = \hat{f}(z)$ pour $z \in D'$ est analytique sur $D \cup D'$.

► Ce principe va être très utile pour simplifier des problèmes avec des conditions plus ou moins compliquées. L'exemple du jet (cf. § 1.3.1) en donnera un exemple.

1.2 Transformations conformes

1.2.1 Définitions

Dans un certain nombre de problèmes, on cherche à résoudre une équation, par exemple l'équation de Laplace $\Delta\psi = \psi_{xx} + \psi_{yy} = 0$, dans le plan $x - y$ avec des conditions aux limites plus ou moins complexes. L'idée est de se ramener à des domaines d'intégration plus simples en faisant un changement de variable. Ce changement de variable $(x, y) \rightarrow (X, Y)$ est une transformation géométrique ; si cette transformation conserve les angles, il n'y a souvent que peu de changements dans la forme de l'équation. Par exemple pour l'équation de Laplace, on aura à résoudre $\psi_{XX} + \psi_{YY} = 0$ dans le nouveau domaine.

Une transformation $z = x + iy \rightarrow Z(z) = X(x, y) + iY(x, y)$ est dite *conforme* si elle conserve les angles. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation soit conforme est que la fonction $Z(z)$ soit analytique.

Les points où la dérivée $Z'(z)$ est nulle/infinie peuvent être des points singuliers de la transformation. Au voisinage de tels points, on peut exprimer Z de la façon suivante :

$$Z = Z_0 + (z - z_0)^p f(z_0) + O((z - z_0)^{1+p}),$$

avec $p \in \mathbb{N}_+$ et $f(z_0) \neq 0$. Si $p = 1$, la transformation est conforme en ce point ; si $p > 1$, les angles ne sont pas conservés : là où les points où Z' s'annule, l'image d'une ligne continue présente un point anguleux. L'idée de base de la transformation conforme est d'utiliser les singularités locales pour transformer des conditions aux limites compliquées en conditions plus simples.

♣ **Exemple.** – *Exemple de transformation conforme.*

On à résoudre l'équation dans le demi-plan $y > 0$:

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0,$$

avec

$$\phi(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1, \\ 1. & \end{cases}$$

Pour cela on utilise la transformation conforme :

$$Z = \ln \frac{z - 1}{z + 1},$$

qui transforme le demi-plan en une bande infinie comme le montre la figure 1.7.

Il est beaucoup plus simple de résoudre l'équation avec les conditions aux limites et compte tenu de l'invariance en x . L'équation en elle-même ne change pas puisque la transformation est conforme, donc avec $Z = X + iY$, on a toujours :

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial Y^2} = 0,$$

avec

$$\phi(x, 0) = 0 \text{ et } \phi(x, \pi) = 1.$$

On trouve : $\phi = y/\pi$. En repassant aux variables x et y , on obtient finalement :

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\pi} \arctan^{-1} \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1}.$$

□

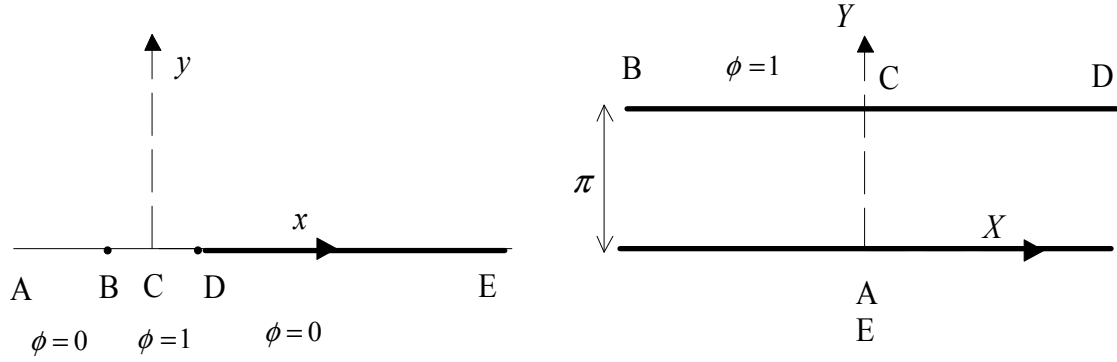


Figure 1.7 : transformation d'un demi-plan en bande.

1.2.2 Quelques transformations classiques

Transformation linéaire

Une transformation linéaire $w = Az$, avec $A = ae^{i\alpha} \in \mathbb{C}$ est une double transformation : expansion/contraction liée au coefficient a et rotation d'un angle α .

Transformation inverse

Une transformation linéaire $w = z^{-1}$ pour z non nul transforme les cercles en cercles/droites, les lignes en droites/cercles selon que l'objet passe ou non par l'origine.

Transformation linéaire fractionnelle

La transformation

$$w = \frac{az + b}{cz + d},$$

avec a, b, c, d des complexes, transforme les cercles en droites et réciproquement.

1.2.3 Transformation de Schwarz-Christoffel

La transformation de Schwarz-Christoffel est la plus connue : elle consiste à associer à un point d'affixe z l'image Z telle que :

$$\boxed{\frac{dz}{dZ} = K(Z - a_1)^{p_1} \cdots (Z - a_n)^{p_n}}, \quad (1.9)$$

avec $a_i \in \mathbb{R}$, $p_i \in \mathbb{R}$, et $K \in \mathbb{C}$. La transformation $Z(z)$ est conforme sauf aux points a_i où l'on a : $Z' = 0$. On montre facilement que si dans le plan complexe, une frontière a un point anguleux en a_i d'angle α_i alors, si on a choisi

$$p_i = \alpha_i/\pi - 1,$$

le point anguleux est transformé en point non angulaire. Notons que si dans la transformation $a_i \rightarrow \infty$, alors on omet le facteur $(z - a_i)$ dans la transformation puisqu'il serait associé à l'exposant 0 ; on dit que le polygone est dégénéré en ce point.

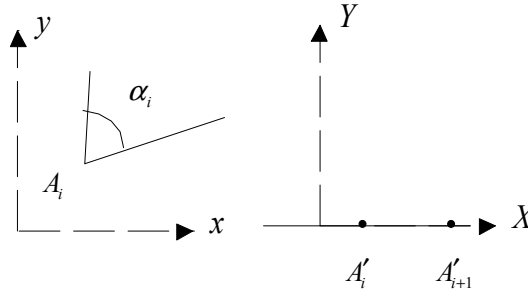


Figure 1.8 : transformation d'une ligne brisée en axe horizontal.

♣ **Exemple.** – Transformation d'une tranche de fluide.

Considérons une tranche de fluide entre deux plans horizontaux (voir figure 1.9). Les points A, B, C sont en $+\infty$, 0, et $-\infty$ et définissent un polygone dégénéré. Dans la transformation de Schwarz-Christoffel, tous les points se retrouvent sur le même axe ($Y = 0$) comme le montre la figure 1.9. Dans le plan image, A est situé $+\infty$, B' en b , C $c > b$, et D en $-\infty$. Les angles dans le plan $x-y$ entre les nœuds du polygone sont⁵ du polygone sont : $\alpha_B = \pi/2$, $\alpha_C = \pi/2$, d'où l'on tire : $p_B = -1/2$ et $p_C = -1/2$.

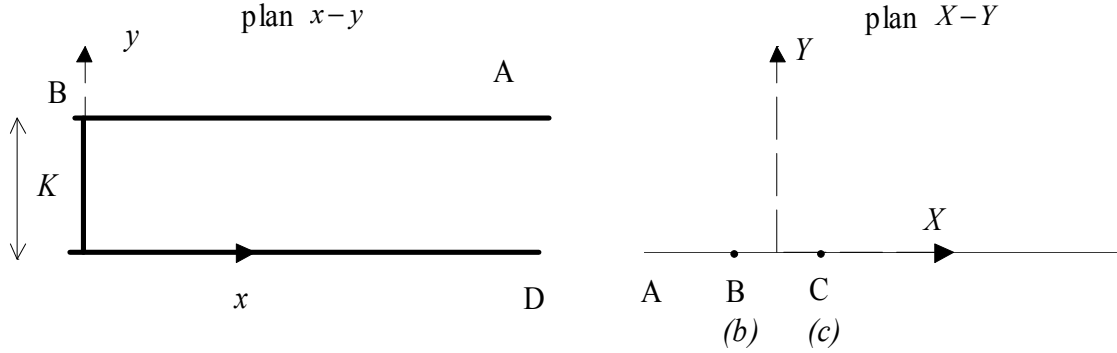


Figure 1.9 : passage du plan $x-y$ au plan $X-Y$.

L'équation de Schwarz-Christoffel (1.9) donne :

$$\frac{dz}{dZ} = K(Z-b)^{-1/2}(Z-c)^{-1/2} = \frac{K}{Z},$$

d'où l'on tire que

$$z(Z) = 2K \ln \left(\sqrt{Z-b} + \sqrt{Z-c} \right) + z_0.$$

On peut inverser cette équation et obtenir ainsi :

$$Z = \frac{1}{2}(b+c) + \frac{1}{2}(c-b) \cosh(K(z-z_0)).$$

Les paramètres b et c peuvent être choisis librement, mais pas K et z_0 qui doivent être choisis de telle sorte que les points images soient bien les images souhaitées par la transformation $Z(z)$. □

★ On pourra utilement se rapporter à l'ouvrage de ? qui présente en détail les applications conformes et donne un catalogue de transformations utiles.

5. Pour les angles des points à l'infini, on peut se souvenir que la somme des angles d'un polygone à n côtés est $(n-2)\pi$, soit ici 2π , on en déduit que les angles des points rejetés à l'infini doivent être nuls.

1.2.4 Transformation de Joukowski

Il existe d'autres transformations utiles, notamment celle de Joukowski abondamment utilisée en aéronautique (?). Cette transformation est définie par

$$w = z + \frac{a^2}{z},$$

avec $a \in \mathbb{R}$. La transformation change un cercle centré à l'origine en une ellipse dans le plan w ; un cas particulier est le cercle de rayon $r = a$ qui est transformé en segment de droite (ellipse dégénérée de petit axe nul). Les conditions à l'infini ne sont pas changées. Par ailleurs un cercle décentré mais dont le centre reste sur l'axe x est transformé en un profil symétrique évoquant une forme d'aile, appelé *profil de Joukowski*.

1.3 Applications

On étudie un écoulement irrotationnel dans un canal infini. Les points A, B, C (resp. A', B', C') sont en $+\infty, 0$, et $-\infty$ et définissent un polygone dégénéré. Dans la transformation, tous les points se retrouvent sur le même axe ($Y = 0$) comme le montre la figure 1.10. Dans le plan image, A' est situé $+\infty$, B' en $+1$, C et C' à l'origine, B en -1 , et A en $-\infty$. Les angles dans le plan $x - y$ entre les nœuds du polygone sont : $\alpha_B = \pi$, $\alpha_C = 0$, $\alpha_{C'} = 0$, $\alpha_{B'} = \pi$, d'où l'on tire : $p_B = 0$, $p_C = -1$, $p_{C'} = -1$, $p_{B'} = 0$.

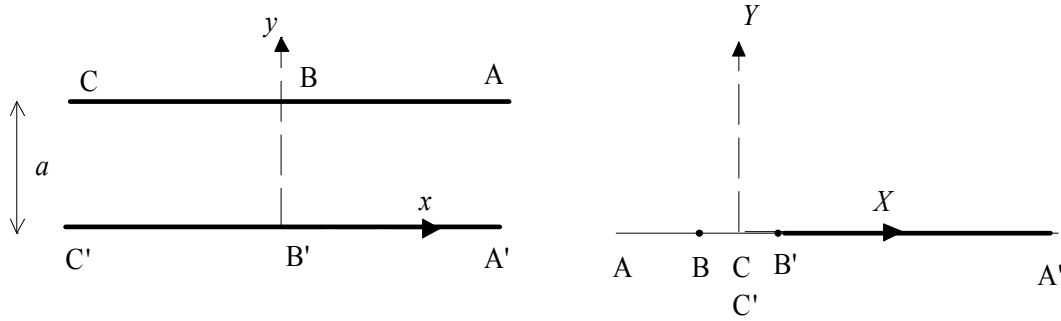


Figure 1.10 : écoulement dans un plan infini. Le trait gras dans le plan $X - Y$ représente la demi-droite de coupure.

La transformation de Schwarz-Christoffel donne :

$$\frac{dz}{dZ} = K(Z - a_1)^{p_1} \dots (Z - a_n)^{p_n} = \frac{K}{Z},$$

d'où l'on tire que $z(Z) = K \ln Z + Z_0$. Reste à déterminer K et Z_0 . L'image de B dans le plan image $X - Y$ nous indique que $Z_0 = 0$. L'image de n'importe quel point sur le bord supérieur a pour coordonnées dans le plan $x - y$: $z = \xi + ia$; son image dans le plan $X - Y$ est sur l'axe réel $Z = |\zeta|e^{i\pi}$; donc on doit avoir $\xi + ia = K(\ln |\zeta| + i\pi)$, d'où l'on tire $K = a/\pi$. La transformation recherchée est donc

$$z = \frac{a}{\pi} \ln Z \text{ ou bien } Z = e^{\pi z/a}.$$

Canal semi infini

On étudie un écoulement irrotationnel dans un canal infini. Les points A, B, C, et D sont en $+\infty, 0, 0$, et $-\infty$ et définissent un polygone dégénéré. Dans la transformation, tous les

points se retrouvent sur le même axe ($Y = 0$) comme le montre la figure 1.11. Dans le plan image, A' est situé $-\infty$, B' en -1 , C en $+1$, et D en $+\infty$. Les angles dans le plan $x - y$ entre les nœuds du polygone sont : $\alpha_B = \pi/2$, $\alpha_C = \pi/2$, $\alpha_D = 0$, d'où l'on tire : $p_B = -1/2$, $p_C = -1/2$, $p_D = 0$

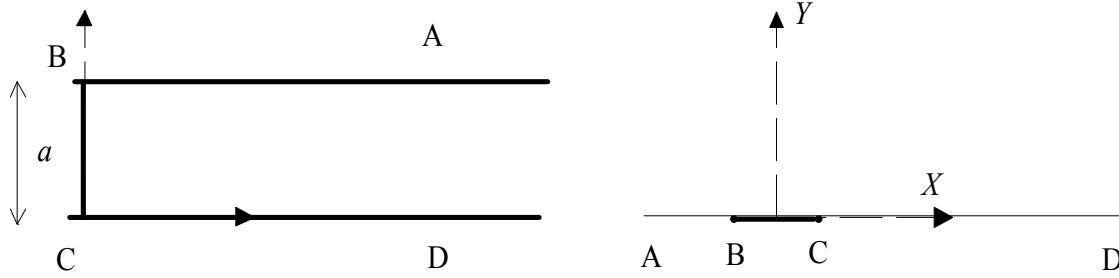


Figure 1.11 : écoulement un canal ouvert à droite.

La transformation de Schwarz-Christoffel donne :

$$\frac{dz}{dZ} = K(Z - a_1)^{p_1} \cdots (Z - a_n)^{p_n} = \frac{K}{\sqrt{Z^2 - 1}},$$

d'où l'on tire que $z(Z) = K \ln(Z + \sqrt{Z^2 - 1}) + Z_0$. Cette fonction est à valeur multiple et il faut définir des coupures pour remédier à cela. Définissons la coupure comme le segment $[-1, +1]$ de l'axe réel ; on a sur cet axe :

$$\sqrt{Z^2 - 1} = \begin{cases} -\sqrt{X^2 - 1} & \text{si } -\infty < X < -1, \\ i\sqrt{1 - X^2} & \text{si } -1 < X < +1, \\ \sqrt{X^2 - 1} & \text{si } 1 < X < \infty. \end{cases}$$

Dans le plan $X - Y$, $Z + \sqrt{Z^2 - 1}$ ne s'annule jamais. D'où l'on peut définir :

$$\ln(Z + \sqrt{Z^2 - 1}) = \begin{cases} \ln(Z - \sqrt{X^2 - 1}) & \text{si } -\infty < X < -1, \\ \ln(Z + i\sqrt{1 - X^2}) & \text{si } -1 < X < +1, \\ \ln(Z + \sqrt{X^2 - 1}) & \text{si } 1 < X < \infty. \end{cases}$$

Reste à déterminer K et Z_0 . En examinant les images de B et C, on tire que $Z_0 = 0$ et $K = a/\pi$. La transformation inverse s'en déduit :

$$z = \frac{a}{\pi} \ln(Z + \sqrt{Z^2 - 1}) \quad \text{ou bien} \quad Z = \frac{a}{\pi} \cosh^{-1} z.$$

Marche d'escalier

On étudie un écoulement irrotationnel au voisinage d'un rétrécissement brutal. À l'infini, il y a un écoulement parallèle de débit Q . Pour les besoins de l'exercice, on considère que la largeur AF vaut π et qu'en BC on a $h\pi$ avec $h < 1$. On ramène le problème en question à un problème plan à l'aide d'une transformation de Schwarz-Christoffel : les points A et F seront confondus avec l'origine (le point image sera assimilé à une source puisqu'en AF il transite un débit Q), le point D aura pour image D' situé en $Z = 1$, les points B et C sont repoussés à l'infini, seul le point E n'est fixé pour l'instant (on le laisse libre de façon à pouvoir écrire la conservation des débits). $\square$

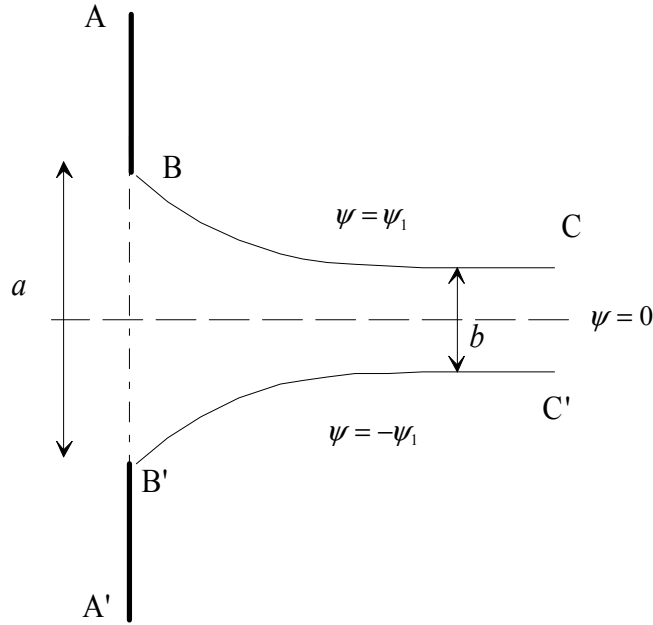


Figure 1.13 : jet libre.

Nous allons aborder maintenant une application astucieuse des fonctions à variable complexe due à Helmholtz et Kirchhoff (??) pour les jets en régime permanent. L'extension au cas du régime non-permanent, principalement l'établissement du régime permanent, a été étudiée bien plus tard, notamment par ??; la principale difficulté dans ce cas-là concerne les conditions aux limites puisque si en régime permanent, la surface libre est une ligne de courant, cela cesse d'être vrai en régime non permanent.

Méthode de Kirchhoff-Helmoltz

En suivant la méthode de Kirchhoff-Helmoltz (?), on introduit la variable complexe :

$$\Omega = \ln \frac{dz}{dw} = \ln \frac{1}{u - iv} = \ln q^{-1} + i\theta,$$

où $\mathbf{u} = qe^{i\theta}$ avec $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ la magnitude et θ la direction du champ de vitesse dans le repère $x - y$. Cette nouvelle variable a des propriétés intéressantes :

- pour une surface libre, la pression est constante et égale à la pression atmosphérique, donc la vitesse est aussi constante puisque la surface libre correspond en régime permanent à une ligne de courant, donc $q = cte$, donc $\Re(\Omega) = cte$; la surface libre est représentée par un segment droit dans le plan Ω ;
- pour une paroi solide, la composante normale est nulle et la vitesse est parallèle à la surface libre, donc l'angle θ est également constant, donc $\Im(\Omega) = cte$; la paroi est représentée par un segment horizontal dans le plan Ω .

Dans le cas d'un jet, les contours sont des lignes de courant. On peut à la fois caractériser le champ cinématique et le champ potentiel, c'est ce que résumé la figure 1.14. L'idée essentielle de la méthode de Kirchhoff-Helmoltz est la suivante : on caractérise chacun des champs dans son espace :

- le champ cinématique dans un espace w ;

- le champ potentiel dans un espace Ω .

On utilise une transformation de Schwarz-Christoffel pour transformer chacun des polygones à un même polygone d'un nouvel espace que l'on va appeler ici λ . Il reste donc à déterminer les changements de variable $\lambda(\Omega)$ et $\lambda(w)$ à effectuer. Une fois que cela est fait, on cherche la relation qui existe entre $\lambda(\Omega)$ et $\lambda(w)$; on s'attend à trouver une équation différentielle que l'on va résoudre.

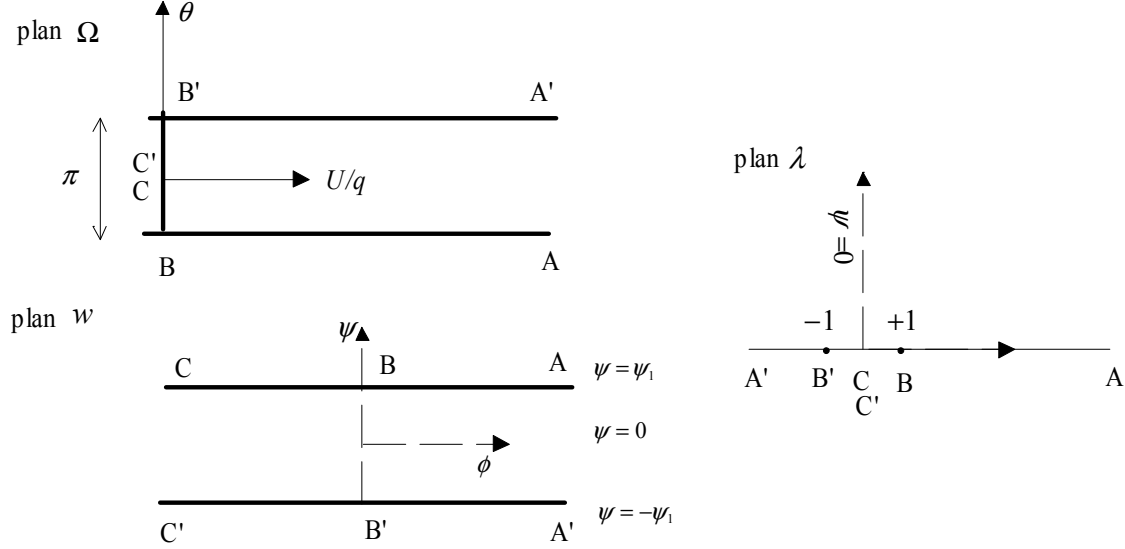


Figure 1.14 : transformation conforme.

• 1) Transformation $\lambda(\Omega)$

On a :

$$B' \left(\Omega = i\frac{\pi}{2} \right) \rightarrow B'(\lambda = -1),$$

$$B \left(\Omega = -i\frac{\pi}{2} \right) \rightarrow B'(\lambda = +1).$$

D'après la relation vue précédemment (voir *supra* § 1.3), on a : $\lambda = \cosh[K(\Omega - \Omega_0)]$, d'où on trouve : $K = 1$ et $\Omega_0 = -i\pi/2$.

• 2) Transformation $\lambda(w)$

On a :

$$B'(w = -i\psi_1) \rightarrow B'(\lambda = -1),$$

$$B(w = i\psi_1) \rightarrow B'(\lambda = +1).$$

D'après la relation vue précédemment (voir *supra* § 1.3), on a : $w = K \ln \lambda + w_0$ ou bien encore $\lambda = \exp[(w - w_0)/K]$, d'où on trouve : $K = -2\psi_1/\pi$ et $w_0 = i\psi_1$.

• 3) Relation $\Omega(w)$ et $w(z)$

En égalant les deux expressions de λ , on tire :

$$\lambda = i \exp \left[-\frac{\pi}{2\psi_1} w \right] = i \sinh \Omega = \frac{i}{2} \left(U \frac{dz}{dw} - \frac{1}{U} \frac{dw}{dz} \right) \quad (1.10)$$

en utilisant la définition du sinh. On tire de $\lambda = \frac{i}{2}(Uz' - (Uz')^{-1})$ que :

$$U \frac{dz}{dw} = -i \pm \sqrt{1 - \lambda^2},$$

dont seule la branche avec + est physiquement possible. En se servant de la relation (tirée de l'éq. 1.10)

$$d\lambda = -\frac{i}{2} \frac{\pi}{\psi_1} \lambda dw,$$

on trouve que

$$\frac{U}{2} \frac{\pi}{\psi_1} (z - z_0) = i(\lambda - 1) - \sqrt{1 - \lambda^2} + \tanh^{-1} \sqrt{1 - \lambda^2},$$

avec z_0 une constante. Dans le plan complexe z , le point B a pour coordonnées $z = ia$ (voir figure 1.13) et le point image est le point $\lambda = 1$, d'où $z_0 = ia$. En comparant l'équation (1.10) avec ce résultat, on détermine les relation $z(\Omega)$ et $w(\Omega)$ après substitution de $\lambda = i \sinh \Omega$.

1.3.2 Rupture de barrage

Équations du mouvement

Nous allons considérer le problème de la rupture de barrage du point de vue Lagrangien. Les équations du mouvement sont pour un point données par l'équation de quantité de mouvement :

$$\rho X_{tt} = -p_X,$$

$$\rho Y_{tt} = -p_Y - g,$$

où X et Y sont les déplacements d'une particule initialement ($t = 0$) en $(X, Y) = (a, b)$, et une condition sur le jacobien de la transformation $(a, b) \rightarrow (X, Y)$ qui doit rester inchangé au cours du mouvement (cette relation se substitue donc à l'équation de conservation de la masse) :

$$X_a Y_b - X_b Y_a = 1.$$

Notons que la conservation de la quantité de mouvement fait appel à un gradient de pression calculé avec les variables de déplacement, ce qui n'est pas très commode. On a donc considéré comme variables indépendantes a , b , et t ; on tire (??)

$$X_{tt} X_a + (Y_{tt} + g) Y_a + \frac{1}{\rho} p_a = 0,$$

$$X_{tt} X_b + (Y_{tt} + g) Y_b + \frac{1}{\rho} p_b = 0,$$

que l'on peut encore simplifier en supprimant le terme de pression :

$$(X_a X_{bt} + Y_a Y_{bt})_t = (X_b X_{at} + Y_a Y_{at})_t,$$

dont l'intégration donne :

$$(X_a X_{bt} + Y_a Y_{bt}) - (X_b X_{at} + Y_a Y_{at}) = f(t),$$

où $f(t)$ est une fonction arbitraire représentant la vorticité.

Méthode de Pohle

La méthode utilisée par Pohle consiste à exprimer les fonctions X , Y , et p comme des séries de t (??) :

$$\begin{aligned} X(a, b ; t) &= a + X^{(1)}(a, b)t + X^{(2)}(a, b)t^2 + \dots, \\ Y(a, b ; t) &= b + Y^{(1)}(a, b)t + Y^{(2)}(a, b)t^2 + \dots, \\ p(a, b ; t) &= p^{(0)}(a, b) + p^{(1)}(a, b)t + p^{(2)}(a, b)t^2 + \dots, \end{aligned}$$

puis à les reporter dans les équations du mouvement (ici dans l'équation sur le jacobien pour X et Y et l'équation de la quantité de mouvement pour p). On collecte ensuite les termes associés à chaque puissance de t . Pour $O(t^0)$, on tire :

$$\begin{aligned} X_a^{(1)} + Y_b^{(1)} &= 0, \\ X_a^{(2)} + Y_b^{(2)} &= -(X_a^{(1)}Y_b^{(1)} - X_b^{(1)}Y_a^{(1)}), \\ p_{aa}^{(0)} + p_{bb}^{(0)} &= -2\rho(X_b^{(2)} + Y_a^{(2)}) = 0. \end{aligned}$$

Pour $O(t)$, on trouve :

$$X_b^{(2)} - Y_a^{(2)} = 0.$$

Les conditions initiales imposent que la vitesse initiale est nulle : $X^{(1)} = Y^{(1)} = 0$. On déduit que $X^{(2)}$ et $Y^{(2)}$ vérifient la condition de Cauchy Riemann puisque : $X_a^{(1)} + Y_b^{(1)} = 0$ et $X_b^{(2)} - Y_a^{(2)} = 0$. Pour la pression, elle est d'abord hydrostatique, puis pour la surface libre, elle est nulle :

$$\begin{aligned} p(a, b ; t) &= 0 \text{ pour } 0 \leq a < \infty \text{ et } t > 0, \\ p(0, b ; t) &= 0 \text{ pour } 0 \leq b \leq h \text{ et } t > 0. \end{aligned}$$

De plus, le fond est une ligne de courant donc : $Y(a, 0 ; t) = 0$ pour $t > 0$ et $0 \leq a < \infty$. À partir de ces conditions aux limites, on peut déduire les conditions aux limites vérifiées par $X^{(2)}$ et $Y^{(2)}$:

$$X^{(2)}(a, h) = 0 \text{ et } Y^{(2)}(a, h) = -\frac{g}{2}.$$

On souhaite résoudre les équations pour la fonction à variable complexe $Z(z) = Y^{(2)} + iX^{(2)}$ avec $z = x + iy$. Z est harmonique puisque ses composantes sont harmoniques. Une difficulté est que les frontières du domaine considéré sont mixtes : on a une condition sur $X^{(2)}$ pour la surface et deux conditions sur $Y^{(2)}$ sur le fond et la paroi verticale. L'idée est alors d'employer le principe de réflexion de Schwartz en prolongeant Z de façon symétrique par rapport à la surface libre (voir figure 1.15) ; cela est possible car la fonction Z s'annule à la surface libre et elle est continue et analytique.

On emploie ensuite la transformation de Schwarz-Christoffel (voir § 1.3) ; on a : $Z = \cosh[K(z - z_0)]$. On a la transformation :

$$\begin{aligned} B(z = i2h) &\rightarrow B'(\lambda = -1), \\ C(z = 0) &\rightarrow C'(\lambda = +1), \end{aligned}$$

d'où on trouve : $K = \pi/(2h)$ et $z_0 = 0$. On se ramène à la résolution du problème $\Delta Y^{(2)} = 0$, avec

$$Y^{(2)}(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1, \\ -\frac{g}{2} & \text{si } |x| \leq 1. \end{cases}$$

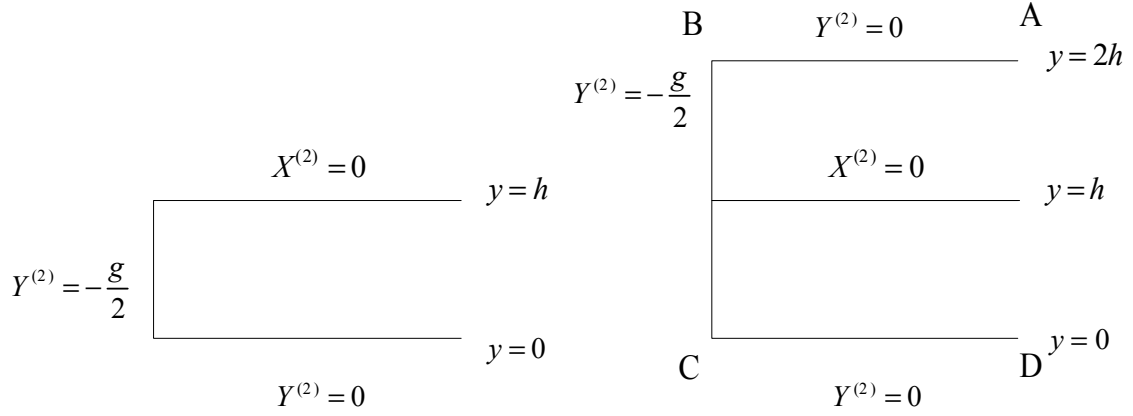


Figure 1.15 : domaine d'intégration et prolongation par symétrie.

On a vu au § 1.2.1 comment résoudre ce problème. La fonction $Z(z) = Y^{(2)} + iX^{(2)}$ étant harmonique, on a :

$$Z = -\frac{ig}{\pi} \ln \frac{w-1}{w+1},$$

dont la partie réelle est :

$$Y^{(2)}(a, b) = -\frac{g}{\pi} \arctan \frac{\sin \frac{\pi b}{2h}}{\sinh \frac{\pi a}{2h}},$$

et la partie imaginaire :

$$X^{(2)}(a, b) = -\frac{g}{\pi} \ln \frac{\sinh^2 \frac{\pi a}{4h} + \cos^2 \frac{\pi b}{4h}}{\sin^2 \frac{\pi b}{2h} + \sinh^2 \frac{\pi a}{4h}}.$$

1.3.3 Équilibre d'un fluide plan incompressible newtonien

Nous espérons ici des problèmes rencontrés en élasticité plane pour les fonctions biharmoniques⁶. Une introduction peut être trouvée dans l'ouvrage de ?. La formulation d'Airy a été utilisée également en mécanique des fluides par ?, ?, et ?.

Équations du mouvement

Considérons un écoulement plan (bidimensionnel) très lent. Les termes inertiels peuvent être négligés dans l'approximation de très petits nombres de Reynolds $Re \rightarrow 0$, c'est-à-dire des écoulements de Stokes, hypothèse que l'on va faire par la suite. Les équations du mouvement sont composées de l'équation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.11)$$

et de l'équation de quantité de mouvement :

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (1.12)$$

6. Une fonction biharmonique est une fonction f vérifiant $\Delta\Delta f = 0$

avec $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes totales : $\boldsymbol{\sigma} = -p_* \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{d}$ où p_* désigne la pression généralisée. En prenant le rotationnel de cette équation, on obtient l'équation de la vorticité (?, p. 200) :

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}, \quad (1.13)$$

avec ν la viscosité dynamique. Pour un écoulement plan, on a : $\omega = -\Delta\psi$ et l'équation de vorticité devient :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \Delta\psi + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \Delta\psi = \nu \Delta\Delta\psi,$$

qui peut s'écrire sous la forme condensée en introduisant la notation du jacobien :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \Delta\psi + \frac{(\Delta\psi, \psi)}{(x, y)} = \nu \Delta\Delta\psi.$$

Conditions aux limites

Il y a deux types de conditions aux limites :

- le long d'une paroi, la condition d'adhérence impose que la vitesse soit nulle, soit si $\mathbf{n}$ désigne la normale à la paroi :

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} = 0,$$

- le long d'une surface libre, si on néglige les effets de tension superficielle et si le fluide environnant est dynamiquement inactif (faible viscosité), alors on a $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - p\mathbf{n} = 0$, soit sous forme matricielle :

$$\mu \begin{bmatrix} \psi_{xy} & (\psi_{xx} + \psi_{yy})/2 \\ (\psi_{xx} + \psi_{yy})/2 & \psi_{xy} \end{bmatrix} \mathbf{n} = p\mathbf{n},$$

en se servant de la relation :

$$4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y},$$

ce qui permet de mettre l'équation matricielle sous une forme complexe s'écrit :

$$4i\mu\psi_{zz}s + p\bar{s} = 0,$$

où s est le vecteur unitaire tangent à la surface libre. De plus en régime permanent, la surface libre est une ligne de courant donc on a $\psi = cst$.

Solutions générales

Lorsqu'on s'intéresse à un écoulement permanent de Stokes, le membre de gauche est nul, d'où l'on tire que : $\Delta\Delta\psi = 0$. En se plaçant dans le plan complexe $\mathbb{C}$ avec $z = x + iy$, on tire :

$$\Delta\Delta\psi = 0 \Rightarrow 16 \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0,$$

dont l'intégration est triviale. Il existe donc deux fonctions f et g telles que :

$$\psi = 2\Re[\bar{z}f(z) + g(z)] = \bar{z}f + z\bar{f} + g + \bar{g},$$

qui est la forme générale des équations.

En examinant les équations du mouvement (1.12), on trouve que :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\mu \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x},$$

d'où l'on conclut que la fonction $p + \imath \mu \Delta \psi$ est analytique de la variable $z = x + \imath y$ puisque les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées. Cela implique aussi que la fonction $\Delta \psi - \imath p/\mu$ est également une fonction analytique, donc les parties réelle et imaginaire vérifient l'équation de Laplace. Si ψ vérifie $\psi = 2\Re[\bar{z}f(z) + g(z)]$, on déduit que $\Delta \psi = 8\Re[f(z)]$. On en déduit que la pression est donnée par :

$$p = -\imath \mu \Delta \psi = -8\imath \mu \Im[f'(z)] = 4\mu \imath (f' - \bar{f}').$$

La condition aux limites à la surface libre s'écrit donc :

$$(\bar{z}f'' + g'')s + \bar{s}(f' - \bar{f}') = 0.$$

Portrait de phase

2.1 Généralités

Un certain nombre d'équations non linéaires du premier ordre ainsi que des équations autonomes du second ordre peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}, \quad (2.1)$$

avec f et g deux fonctions pouvant s'annuler. Les points qui sont à la fois des zéros de f et de g constituent des *points singuliers*¹ puisque la différentielle dy/dx est *a priori* indéterminée en ces points. Le comportement des courbes solutions dépendent fortement de la structure des courbes $f(x, y) = 0$ et $g(x, y) = 0$ autour de ces points critiques, c'est-à-dire de la multiplicité des courbes critiques générées par les équations $f(x, y) = 0$ et $g(x, y) = 0$ ainsi que par le signe de f/g dans les différents domaines délimités par ces courbes critiques.

Le cas le plus simple est rencontré lorsque, près de la singularité, il est possible de linéariser l'équation (2.1). On peut alors écrire : $f(x, y) = ax + by + o(x, y)$ et $g(x, y) = cx + dy + o(x, y)$. Considérons le cas où $ad - bc \neq 0$ et où ces coefficients ne sont pas tous identiquement nuls. Il y a deux courbes critiques dans le voisinage de la singularité :

- $y = -ax/b$ où les courbes admettent une tangente horizontale ;
- $y = -cx/d$ où les courbes admettent une tangente verticale.

En introduisant un paramètre t , on peut mettre l'équation (2.1) sous la forme matricielle :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{u}, \text{ avec } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

On recherche une solution sous la forme $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \exp(\lambda t)$, avec $\mathbf{v}_0$ le vecteur correspondant aux conditions initiales (en $t = 0$). Il s'ensuit que λ doit être une valeur propre de la matrice $\mathbf{M}$ et $\mathbf{v}_0$ un vecteur propre associé ; λ est solution de l'équation du second degré $\lambda^2 - 2h\lambda + k = 0$, avec $2h = b + c$ et $k = \det \mathbf{M} = -ad + bc$, soit encore :

$$\lambda = h \pm \sqrt{h^2 - k}.$$

Les directions principales associées sont : $b - c \mp \sqrt{(b - c)^2 + 4ad}$. Selon la valeur prise par λ , différents comportements sont possibles :

- si $\Delta = h^2 - k > 0$ et $k > 0$, les deux valeurs propres sont réelles et du même signe. Admettons que $h > 0$, les deux valeurs propres sont donc positives, ce qui veut que les

1. On les appelle encore des points *critiques* ou bien des points d'équilibre.

deux solutions du système (2.2) tendent vers 0 quand $t \rightarrow -\infty$ (resp., quand $h < 0$, les solutions tendent vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$). Donc, si chaque condition initiale est choisie sur l'un des axes principaux, chacune des solutions tend vers le point origine ; la solution est alors un segment de droite de pente égale à l'une des directions principales. Que se passe-t-il si la condition initiale ne se trouve pas sur l'une des directions principales ? Admettons qu'une courbe solution tende vers le point origine, alors la limite de dy/dx en 0 dans l'équation (2.1) n'est pas définie ; par application de la règle de L'Hôpital (voir ci-dessous), la pente de la courbe solution doit vérifier en 0 :

$$m = \frac{a + bm}{c + dm},$$

c'est-à-dire $m = b - c \pm \sqrt{(b - c)^2 + 4ad}$ et m coïncide avec l'une des directions principales. Compte tenu du signe de dy/dx autour de l'origine, une seule de ces solutions est possible : les courbes arrivent au point origine en suivant une courbe asymptotique d'équation $y = mx$. On dit que la singularité est un *nœud* ; la figure 2.1 montre un exemple.

- si $\Delta > 0$ et $k > 0$, les deux valeurs propres sont réelles et de signe opposé. Les deux solutions du système (2.2) se comportent différemment quand $t \rightarrow \infty$: l'une tend vers la singularité tandis que l'autre tend vers l'infini. Il y a donc toujours deux courbes passant par la singularité et qui coïncident avec les directions principales. Si maintenant le point initial (condition initiale de l'équation différentielle) n'est pas sur l'une des directions principales, alors il n'est pas possible de trouver une courbe solution menant de ce point à la singularité compte tenu du signe de dy/dx autour de la singularité. Les trajectoires divergent autour de la singularité, on parle de point *selle* ; la figure 2.2 montre un exemple.
- si $\Delta = 0$, la singularité est encore un nœud.
- si $\Delta < 0$, les deux valeurs propres sont imaginaires. Les courbes solutions tendent vers la singularité sans tendre vers une courbe asymptotique mais en s'enroulant comme une spirale. On parle de point *focal* ; la figure 2.3 montre un exemple.

♣ **Exemple.** – Pour la résolution de l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y}{2x + y},$$

on trouve qu'il y a deux valeurs propres positives 3 et 1 associées aux directions principales 1 et -1 respectivement. Il s'agit d'un nœud.

♣ **Exemple.** – Pour la résolution de l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{x + 2y},$$

on trouve qu'il y a deux valeurs propres positives 3 et -1 associées aux directions principales 1 et -1 respectivement. Il s'agit d'une selle.

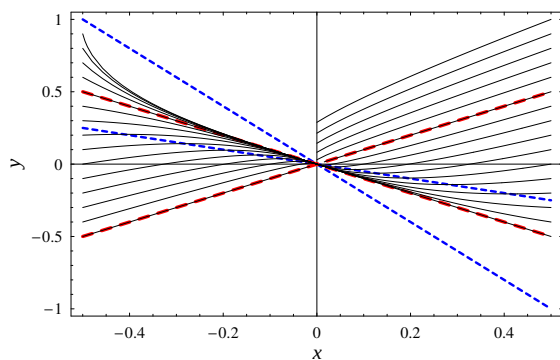


Figure 2.1 : exemple de nœud. Les courbes à trait continu fin sont des solutions de l'équation différentielle ci-dessus; les courbes bleues à petit tiret sont les courbes singulières tandis que les courbes rouges indiquent les directions principales.

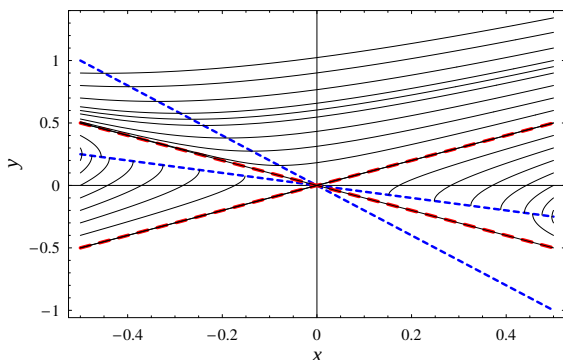


Figure 2.2 : exemple de selle. Les courbes à trait continu fin sont des solutions de l'équation différentielle ci-dessus; les courbes bleues à petit tiret sont les courbes singulières tandis que les courbes rouges indiquent les directions principales.

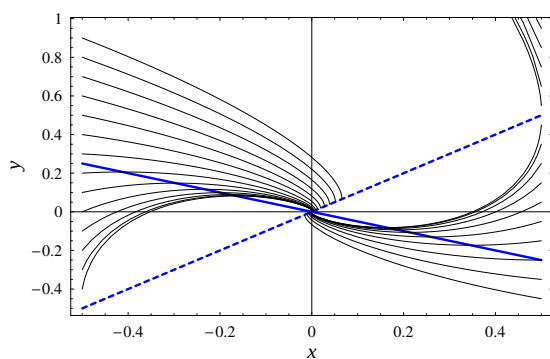


Figure 2.3 : exemple de point focal. Les courbes à trait continu fin sont des solutions de l'équation différentielle ci-dessus; les courbes bleues à petit tiret sont les courbes singulières.

♣ **Exemple.** – Pour la résolution de l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{x - y},$$

on trouve qu'il y a deux valeurs propres positives $(3 \pm \sqrt{3})/2$. Il s'agit d'un point focal.

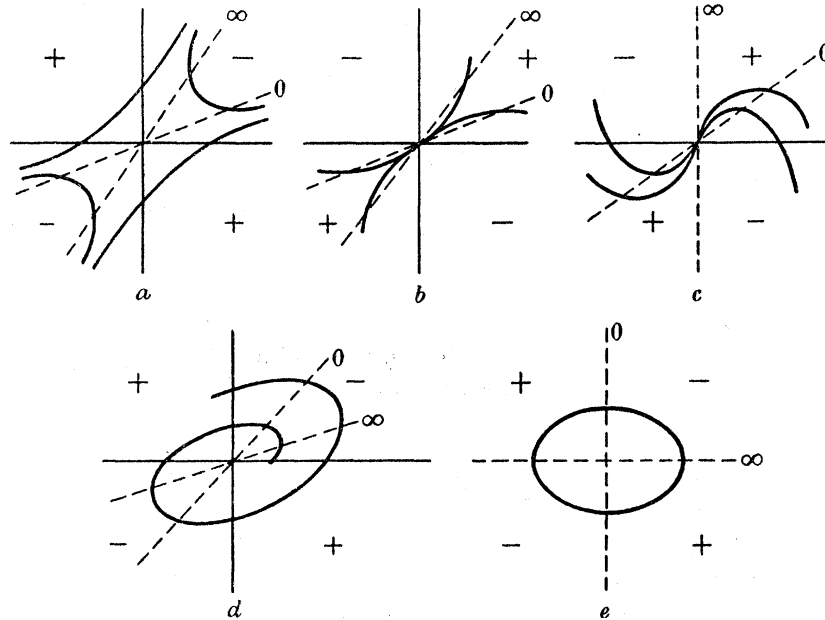


Figure 2.4 : typologie des points singuliers dans le cas où les courbes critiques sont au nombre de deux. D'après (?).

2.2 Typologie des points singuliers

La discussion précédente peut se généraliser à des formes d'équations différentielles plus complexes que le système linéaire (2.2). On retiendra qu'il y a trois types de comportement possibles :

- le *nœud* où les courbes solutions (une infinité) se dirigent vers le point singulier, en général en suivant une courbe asymptotique qui peut se déduire de l'équation différentielle ;
- la *selle* où les courbes solutions divergent à l'approche du point singulier, à l'exception d'une seule qui est capable de le traverser ;
- le *point focal* où les courbes s'enroulent comme des spirales ou bien bouclent en orbite fermée autour du point singulier.

Dans le cas général, le comportement des fonctions est une combinaison de ces trois formes élémentaires, plus moins complexe selon le nombre de courbes critiques $f = 0$ et $g = 0$. La figure 2.4 rappelle les comportements possibles lorsqu'il y a deux courbes critiques. La figure 2.5 montre les combinaisons possibles lorsqu'il y a trois courbes critiques (deux correspondant à $f = 0$ et une seule à $g = 0$). La figure 2.6 montre les combinaisons possibles lorsqu'il y a quatre courbes critiques, dont deux coïncidant avec les axes de coordonnées.

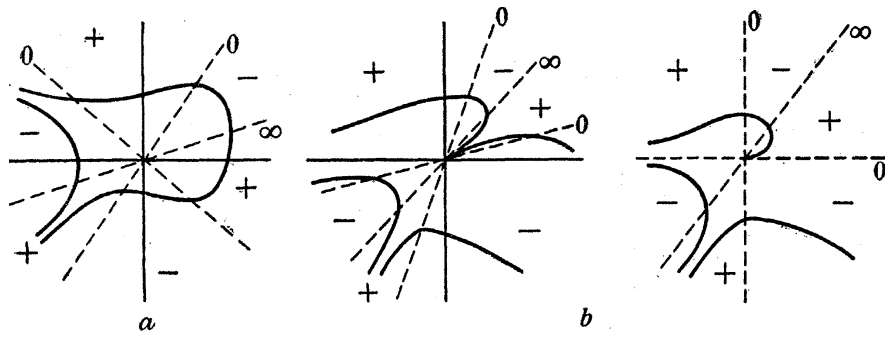


Figure 2.5 : typologie des points singuliers dans le cas où les courbes critiques sont au nombre de trois. D'après (?).

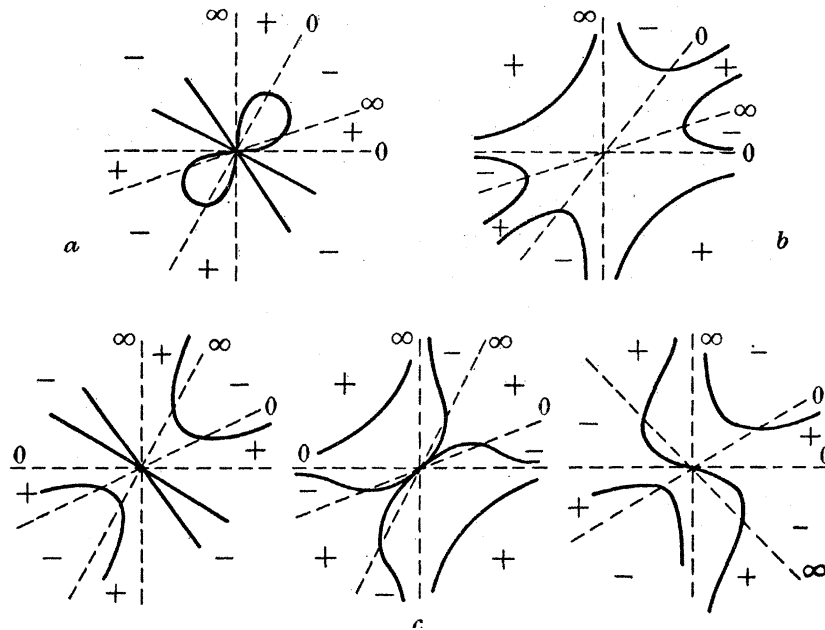


Figure 2.6 : typologie des points singuliers dans le cas où les courbes critiques sont au nombre de quatre. D'après (?).

2.3 Détermination de la courbe asymptotique

Lorsque la singularité est un nœud, il existe une courbe asymptotique vers laquelle les courbes passant par la singularité tendent ; de même lorsque la singularité est une selle, il y a une (seule) courbe solution qui aboutit à la singularité. Cette courbe exceptionnelle est appelée *séparatrice* car elle sépare également deux régions de l'espace, chacune caractérisée par un comportement propre près du point singulier. On peut employer plusieurs méthodes pour déterminer l'équation de cette courbe.

2.3.1 Détermination numérique

En appliquant la règle de l'Hôpital, on peut obtenir la courbe asymptotique vers laquelle convergent les courbes solutions se dirigeant vers un point nœud ou bien la courbe unique

traversant une selle. En effet écrivons :

$$F(x) = f(x, y(x)) \quad \text{et} \quad G(x) = g(x, y(x)).$$

En faisant un développement limité au premier ordre autour d'un point singulier $\mathbf{x}_s$, on a :

$$\dot{y}_s + x\ddot{y}_s + \dots = \frac{x\dot{F}_s + \frac{x^2}{2}\ddot{F}_s + \dots}{x\dot{G}_s + \frac{x^2}{2}\ddot{G}_s + \dots} = \frac{\dot{F}_s + \frac{x}{2}\ddot{F}_s + \dots}{\dot{G}_s + \frac{x}{2}\ddot{G}_s + \dots},$$

où $\dot{y}_s = \dot{y}(\mathbf{x}_s)$ et $\ddot{y}_s = \ddot{y}(\mathbf{x}_s)$. Le calcul de $\dot{F}_s$ se fait à partir des dérivées composées :

$$\dot{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\ddot{F} = \frac{\partial \dot{F}}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial \dot{F}}{\partial y} + \ddot{y} \frac{\partial \dot{F}}{\partial \dot{y}}.$$

On fait de même avec G . On souhaite calculer le développement limité de la courbe asymptotique au point singulier, soit une équation de la forme $y = y_s + m(x - x_s) + p(x - x_s)^2/2$, avec $m = \dot{y}_s = \dot{y}(x_s)$ et $p = \ddot{y}_s = \ddot{y}(x_s)$. À l'ordre 0, on a à résoudre l'équation du second ordre :

$$m = \frac{f_x + m f_y}{g_x + m g_y}, \quad (2.3)$$

pour trouver m . Une fois m connu, on déduit p solution de l'équation :

$$\ddot{F}_s = m\ddot{G}_s + 2p\dot{G}_s. \quad (2.4)$$

♣ **Exemple.** – Considérons l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3xy + 3(1 - y)y}{3x(2x + 3y)},$$

dont on veut connaître le comportement des solutions près de l'origine (point singulier). On trouve que :

$$\dot{F}(0) = 1 + 3m \quad \text{et} \quad \dot{G}(0) = 0,$$

donc la solution de l'équation (2.3) est $m = -1/3$. Poussons à l'ordre 1.

$$\ddot{F}(0) = -\frac{8}{3}p \quad \text{et} \quad \ddot{G}(0) = 6,$$

donc la solution de l'équation (2.4) est $p = 2/9$. La courbe asymptotique a pour équation :

$$y = -\frac{1}{3}x \left(1 - \frac{2}{3}x + \dots \right).$$

2.3.2 Détermination analytique

La séparatrice est une courbe solution de l'équation différentielle (2.1) pour tous les groupes de Lie admis par cette même équation. Une courbe d'équation implicite $\phi(x, y) = 0$ est invariante pour un groupe de Lie $X = \xi\partial_x + \eta\partial_y$ si $X\phi = 0$. Or de la condition

$$X\phi = \xi\partial_x\phi + \eta\partial_y\phi = 0,$$

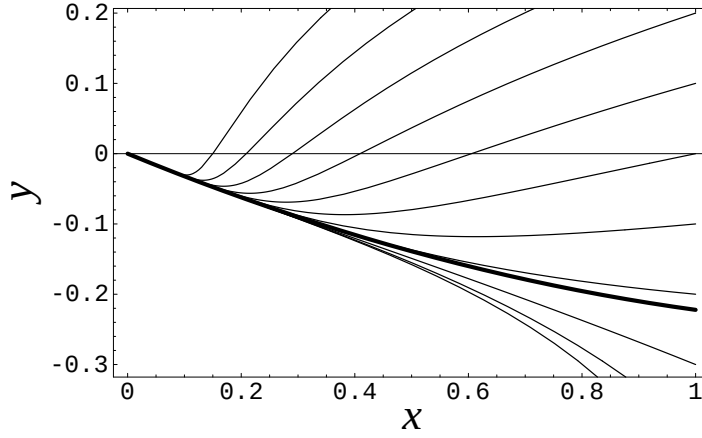


Figure 2.7 : raccord des courbes solutions vers la courbe asymptotique.

on tire que ϕ est également la solution de l'équation différentielle du premier ordre

$$y' = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)}.$$

L'équation de la séparatrice est donc donnée par l'équation algébrique obtenue en substituant y' par η/ξ dans (2.1) (??) :

$$\frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}.$$

Pour trouver l'équation de la séparatrice, il faut donc trouver tous les groupes laissant invariant l'équation (2.1). Au chapitre 5, on présente ces méthodes.

♣ **Exemple.** – Considérons l'équation

$$y' = \frac{y(x - y^2)}{x^2},$$

qui est invariant par le groupe de transformation $x_1 = \lambda x$ et $y_1 = \sqrt{\lambda}y$, dont le générateur infinitésimal s'écrit $X = 2x\partial_x + y\partial_y$. On a donc $\xi = 2x$ et $\eta = y$. L'équation de la séparatrice s'écrit donc

$$\frac{y}{2x} = \frac{y(x - y^2)}{x^2},$$

soit encore

$$y^2 = \frac{x}{2}.$$

□

2.4 Cas des points singuliers situés à l'infini

Dans bien des cas, on $f(x, y) \rightarrow \infty$ et $g(x, y) \rightarrow \infty$, ce qui implique que le comportement de dy/dx est indéfini vers l'infini. Une manière de lever cette indétermination est de faire des hypothèses sur la prédominance des termes, c'est-à-dire $y \ll x$, $y \sim x$, ou $y \gg x$, puis d'intégrer l'équation différentielle, enfin de vérifier si l'hypothèse est cohérente *a posteriori* ou non. Dans certains cas, des points singuliers rejetés à l'infini peuvent représenter en fait un

seul et même point ; un changement de variable permet en général de montrer cela (?). Par exemple, en posant le changement de variable suivant

$$x_1 = \frac{x}{x^2 + y^2} \text{ et } y_1 = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

puis en analysant le comportement en $(0, 0)$ dans le plan (x_1, y_1) , on peut déterminer le comportement d'un point à l'infini (notons que cela correspond à faire le changement $z_1 = 1/z$ avec $z = x + iy$).

♣ **Exemple.** – On considère l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y(x - 2y)}{(1 - 3x)y - x - x^2},$$

pour laquelle on suppose quand $x \rightarrow \infty$ et $y \rightarrow \infty$:

- $y \ll x$, alors on trouve $\dot{y} \propto 3y/x$, soit $y \propto x^3$, l'hypothèse n'est pas cohérente ;
- $y \sim x$, on pose $y \propto mx$, alors on trouve $m = 4/3$, l'hypothèse est cohérente ;
- $y \gg x$, alors $\dot{y}/y \propto 2y/x$, soit $y \propto x^2$. L'hypothèse est donc cohérente.

Pour le premier quadrant $(x, y) > 0$, $x \rightarrow \infty$ et $y \rightarrow \infty$, il y a donc deux points singuliers à l'infini correspondant à deux courbes asymptotiques $y = 4x/3$ et $y = x^2$. Pour le second quadrant $x \rightarrow -\infty$ et $y \rightarrow \infty$, il y a un seul point singulier correspondant à la courbe $y = x^2$, identique donc à la courbe asymptotique trouvée précédemment. Il s'agit en fait du même point et, en pratique, cela veut dire qu'il y ait possible qu'une trajectoire s'échappe du premier quadrant le long de la courbe $y = x^2$ pour revenir par le second le long de la même courbe. Pour le montrer on peut faire le changement de variable

$$u = \frac{1}{x} \text{ et } v = \frac{x^2}{y},$$

de telle sorte que les deux points singuliers du premier problème se transforment en un seul point $A(0, 1)$. On en déduit alors :

$$\frac{dv}{du} = \frac{v(2 - (5 + 2u)v)}{3 + u(-1 + v) + u^2 v}.$$

le point A n'est pas un point singulier de cette équation ; donc, par A et pour les points dans le proche voisinage de A, il ne passe qu'une seule courbe.

2.5 Cas des points singuliers avec tangente horizontale/verticale

On peut trouver des équations différentielles avec des points singuliers admettant $m = 0$ ou $m = \pm\infty$ et, dans ce cas, le comportement se déduit par approximation et intégration de la solution (argument de type *dominant balance*).

♣ **Exemple.** – Considérons par exemple l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8 - 3x}{x(4 - x) - 2}y, \quad (2.5)$$

pour laquelle on note que le dénominateur s'annule pour $A_- (2 - \sqrt{2}, 0)$ et $A_+ (2 + \sqrt{2}, 0)$, qui sont donc deux points singuliers (nœud). Le numérateur s'annule en $A_0 (8/3, 0)$, qui

correspond donc à un extremum de la courbe solution. On a le comportement suivant de la solution :

	A_-		A_0		A_+	
numérateur	+		+		-	-
dénominateur	-		+		+	-
fonction	-		+		-	+

Le comportement autour des nœuds est donné par :

– pour A_- , on a :

$$\frac{dy}{dx} \approx n \frac{y}{x - x_{A_-}},$$

avec $x_{A_-} = 2 - \sqrt{2}$ et $n = (8 - 3x_{A_-})/(x_{A_+} - x_{A_-}) = 3/2 + 1/\sqrt{2} \approx 2,20 > 1$. Par intégration, on tire : $y = c(x - x_{A_-})^n$, avec c une constante d'intégration, donc au point A_- , la courbe admet une tangente horizontale.

– pour A_+ , on a :

$$\frac{dy}{dx} \approx n' \frac{y}{x - x_{A_+}},$$

avec $n' = (3x_{A_+} - 8)/(x_{A_+} - x_{A_-}) = -3/2 + 1/\sqrt{2} \approx 0,79 < 1$. Par intégration, on tire : $y = c|x_{A_+} - x|^{n'}$, donc au point A_+ , la courbe admet une tangente verticale.

Notons que dans le cas présent, il existe une solution analytique de la forme :

$$y(x) = c|2 - ax + x^2|^{3/2} \exp \left[-\sqrt{2} \operatorname{arctanh} \frac{x-2}{\sqrt{2}} \right].$$

Le résultat (intégration numérique) est reporté sur la figure suivante. On note que la tangente verticale pour le point A_+ n'est pas très apparente car l'épaisseur de la divergence de la dérivée est très faible. $\square$

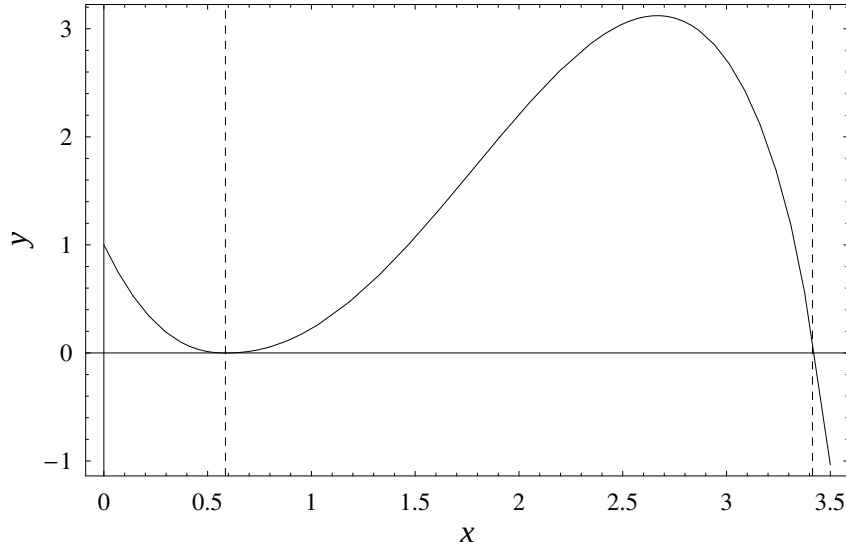


Figure 2.8 : solution de l'équation différentielle (2.5).

♣ **Exemple.** – Considérons l'équations

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6y(2y - x)}{2q^2 + 6yx + x}.$$

Elle est singulière au point O et A de coordonnées $(0, -1/2)$. En O, on trouve que $m = 0$. Pour trouver la courbe asymptotique, on cherche à approcher la solution. On suppose par $x \ll y$ pour $y \rightarrow 0$. Cela donne donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6y(2y - x)}{2q^2 + 6yx + x} \approx \frac{12y^2}{x},$$

dont l'intégrale première est une famille de courbes

$$x = K \exp\left(-\frac{1}{12y}\right),$$

avec K une constante d'intégration.

3

Les équations aux dérivées partielles du premier ordre

On rappelle quelques-uns des éléments de base du calcul différentiel qui peuvent être utiles pour la compréhension de la suite. On n'aborde pas en revanche les problèmes relatifs à la définition et au traitement des équations différentielles.

3.1 Equations linéaires

On s'intéresse à des équations de la forme $\phi(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ qui sont linéaires par rapport à l'opérateur différentiel. Autrement dit, elles peuvent se mettre sous la forme :

$$P(x, y, u)\partial_x u + Q(x, y, u)\partial_y u = R(x, y, u). \quad (3.1)$$

La solution implicite d'une telle équation peut s'écrire $\psi(x, y, u(x, y)) = c$ (avec c une constante). On a donc :

$$\begin{aligned} \partial_x \psi(x, y, u(x, y)) &= 0 = \psi_x + \psi_u u_x, \\ \partial_y \psi(x, y, u(x, y)) &= 0 = \psi_y + \psi_u u_y. \end{aligned}$$

Soit encore : $u_x = -\psi_x/\psi_u$ et $u_y = -\psi_y/\psi_u$. On obtient donc une expression plus symétrique :

$$P\psi_x + Q\psi_y + R\psi_u = 0,$$

qui peut encore se mettre sous une forme vectorielle plus facile à interpréter :

$$(P, Q, R) \cdot \nabla \psi = 0. \quad (3.2)$$

Cela veut dire qu'au point M considéré la normale de la courbe solution doit être normale au champ vectoriel (P, Q, R) . Si le point $O : (x, y, u)$ et le point voisin $O' : (x + dx, y + dy, u + du)$ appartiennent à la surface solution, alors le vecteur $\vec{OO'} : (dx, dy, du)$ doit être normal à $(P, Q, R) : \psi_x dx + \psi_y dy + \psi_u du = 0$. Comme cela doit être vrai pour tout incrément dx, dy , et du , on en tire les *équations caractéristiques* :

$$\boxed{\frac{dx}{P(x, y, u)} = \frac{dy}{Q(x, y, u)} = \frac{du}{R(x, y, u)}} \quad (3.3)$$

Chaque paire d'équations définit une courbe dans l'espace (x, y, u) . Ces courbes définissent une famille à deux paramètres (il y a 3 équations, donc 3 invariants mais seuls 2 sont indépendants) : par exemple, si p est une *intégrale première* de la première paire d'équations, une

courbe solution de la première paire est donnée par une équation de la forme : $p(x, y, u) = a$, avec a une constante. De même pour la deuxième paire : $q(x, y, u) = b$. La relation fonctionnelle $F(a, b) = 0$ définit la surface solution.

À noter que toutes les solutions ne se mettent pas nécessairement sous la forme $F(a, b) = 0$. C'est le cas, notamment, des *solutions singulières* des équations différentielles.

3.2 Equations non linéaires

3.2.1 Généralités

Nous nous intéressons à des équations faisant intervenir $z(x, y)$ et ses dérivées qu'on note $p = \partial_x z$ et $q = \partial_y z$. On veut résoudre des équations non linéaires de la forme générale (? , voir pp. 24-31) :

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \quad (3.4)$$

On sait résoudre des systèmes d'équations non linéaires :

$$\begin{aligned} F(x, y, z, p, q) &= 0, \\ G(x, y, z, p, q) &= 0. \end{aligned}$$

Admettons qu'on sache résoudre ce système et qu'on détermine p et q , on a alors : $p = \phi(x, y, z)$ et $q = \psi(x, y, z)$. On se ramène alors à résoudre l'équation différentielle totale :

$$dz = \phi(x, y, z)dx + \psi(x, y, z)dy. \quad (3.5)$$

Cela n'est possible que si la condition de compatibilité est vérifiée : $\phi_y = \psi_x$. L'idée est ensuite de considérer $p = \phi(x, y, z)$ comme une équation différentielle (ordinaire) en $z(x)$ où y est un paramètre. En l'intégrant, on obtient la relation $x(z)$ à une constante près (fonction de y). On reporte ensuite cette solution dans $q = \psi(x, y, z)$.

D'un point de vue géométrique, considérons la surface solution $z(x, y)$ en un point M : (x_0, y_0, z_0) . Toutes les surfaces solutions ont une normale en ce point de la forme $(p, q, -1)$. Ces normales constituent une famille à un paramètre (p et q constituent une famille à un paramètre puisque p et q sont reliées par $F(x, y, z, p, q) = 0$) ; les normales au point M décrivent donc un cône. Donc, *a priori*, à tout point M de l'espace, on peut associer un cône tel que les surfaces solutions au point M soient tangentes au cône.

3.2.2 Méthodes de Charpit

Pour intégrer une équation aux dérivées partielles, il faut obtenir une intégrale complète (solution particulière) (??). Il existe une méthode qui permet en théorie d'arriver à obtenir une telle intégrale. À l'équation 3.4, associons une seconde équation de la forme :

$$G(x, y, z, p, q) = \lambda, \quad (3.6)$$

qui dépend de λ . On cherche à déterminer G de telle sorte que les deux équations soient compatibles. Les solutions communes dépendent d'un paramètre μ et il s'ensuit que la solution de l'équation 3.4 dépend de fait des paramètres λ et μ .

Écrivons les dérivées de F et G par rapport à x , y et z et cherchons à déterminer les dérivées de p et q :

$$\begin{aligned}(F_p G_q - F_q G_p) \partial_y p &= (F_q G_y - F_y G_q), \\ (F_p G_q - F_q G_p) \partial_x q &= (F_x G_p - F_p G_x), \\ (F_p G_q - F_q G_p) \partial_z p &= (F_q G_z - F_z G_q), \\ (F_p G_q - F_q G_p) \partial_z q &= (F_z G_p - F_p G_z),\end{aligned}$$

or pour que p et q soient des dérivées de $z(x, y)$, il faut que la condition de compatibilité soit vérifiée, soit :

$$\partial_y p(x, y, z) = \partial_x q(x, y, z),$$

soit :

$$\partial_y p + q \partial_z p = \partial_x q + p \partial_z q.$$

On aboutit alors à l'équation aux dérivées partielles linéaire :

$$F_p \partial_x G + F_q \partial_x G + (p F_p + q F_q) \partial_z G - (F_x + p F_z) \partial_p G - (F_y + q F_z) \partial_q G = 0.$$

Les équations caractéristiques correspondantes sont :

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{p F_p + q F_q} = \frac{-dp}{F_x + p F_z} = \frac{-dq}{F_y + q F_z}.$$

Toute intégrale première de ce système contenant p ou q fournit une fonction G (il n'est pas nécessaire de connaître toutes les intégrales premières ; en revanche il faut chercher la plus commode).

♣ **Exemple.** – Considérons l'équation :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = a^2.$$

Soit encore $F(x, y, z, p, q) = p^2 + q^2 - a^2 = 0$. Le système caractéristique est :

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{a^2} = \frac{-dp}{0} = \frac{-dq}{0},$$

dont les intégrales premières sont : $p = c_1$, $q = c_2$, $x/p - y/q = c_3$, et $z/a^2 - x/p = c_4$.

Il suffit d'en considérer une : par exemple, $p = c_1$. Cela implique : $q^2 = a^2 - c_1^2$. On obtient : $z(x, y) = c_1 x + \lambda_1(y)$, que l'on reporte dans la deuxième équation : $\lambda_1'^2(y) = a^2 - c_1^2$. Soit : $\lambda_1(y) = \sqrt{a^2 - c_1^2} y + \lambda_2$. D'où finalement : $z(x, y) = c_1 x + \sqrt{a^2 - c_1^2} y + \lambda_2$.

Si on avait pris $pz/a^2 - 2x = c$, on aurait : $pz = a^2(c + 2x)$, soit encore après deux intégrations : $z^2(x, y) = a^2[(x - \mu)^2 + (y - \lambda)^2]$. $\square$

Équations différentielles linéaires du second ordre

Le problème de la classification des équations linéaires du second ordre a été traité de façon exhaustive dans plusieurs ouvrages (???). On va ici s'intéresser principalement à des équations du second ordre à deux variables et à des systèmes de deux équations différentielles du premier ordre.

4.1 Classification des équations à deux variables

La forme générique de toute équation différentielle linéaire du second ordre est la suivante

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g, \quad (4.1)$$

avec a, b, c, d, e, f , et g des fonctions réelles de x et y . On écrit également cette équation sous la forme d'un opérateur linéaire

$$L[u] + fu = g, \quad (4.2)$$

avec

$$L = a\partial_{xx} + 2b\partial_{xy} + c\partial_{yy} + d\partial_x + e\partial_y.$$

Parmi les équations linéaires du second ordre, on recense

- l'équation de Laplace avec $a = c = 1$ et les autres fonctions nulles

$$u_{xx} + u_{yy} = 0; \quad (4.3)$$

- l'équation de la chaleur (la variable y étant remplacée ici par la variable t) avec $k = -a/e = cte$ le coefficient de diffusion

$$u_t = ku_{xx}; \quad (4.4)$$

- l'équation des ondes (la variable y étant remplacée ici par la variable t) avec $\gamma = \sqrt{-a/e} = cte$ la célérité des ondes

$$u_{tt} = \gamma^2 u_{xx}. \quad (4.5)$$

En supposant que $a \neq 0$ (au moins localement), on transforme les opérateurs d'ordre 2 de la façon suivante

$$\partial_x^2 + \frac{2b}{a}\partial_x\partial_y + \frac{c}{a}\partial_y^2 = (\partial_x - \omega^+\partial_y)(\partial_x - \omega^-\partial_y) + (\partial_x\omega^- - \omega^+\partial_y\omega^-)\partial_y$$

où ω^- et ω^+ sont les racines de l'équation $a\omega^2 + 2b\omega + c = 0$

$$\omega^\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Les racines sont donc réelles sous réserve que $\Delta = b^2 - ac > 0$. Une première application de cette transformation est le passage d'une équation différentielle d'ordre 2 à un système d'équations différentielles d'ordre 1. Pour cela, posons par exemple

$$v = (\partial_x - \omega^+ \partial_y)u,$$

ce qui permet d'écrire l'équation (4.1) sous la forme

$$a(v_x - \omega^- v_y + (\partial_x \omega^- - \omega^+ \partial_y \omega^-)u_y) + du_x + eu_y + fu = g.$$

L'intérêt de cette transformation est évident quand on peut transformer l'équation de départ en deux équations du premier ordre indépendantes ou faiblement dépendantes. Par exemple, l'équation des ondes (4.5) peut se transformer en

$$\begin{cases} u_t - \gamma u_x = v, \\ v_t + \gamma v_x = 0. \end{cases}$$

Quoique le système soit couplé, on peut résoudre la seconde équation indépendamment, puis résoudre la première équation. Dans le cas général, la transformation n'amène pas de résultat qui puisse être utilisé de façon systématique et on n'en parlera donc pas plus longtemps.

On classifie les équations linéaires selon le signe de Δ :

- si $\Delta = b^2 - ac > 0$, les deux racines ω^- et ω^+ sont positives, on dit que l'équation (4.1) est *hyperbolique*. L'équation des ondes (4.5) en est un exemple. En mécanique des fluides, les équations de transport sont souvent hyperboliques. La forme *canonique* de ces équations est

$$u_{xx} - u_{yy} + \dots = 0 \text{ ou bien } u_{xy} + \dots = 0,$$

où les points de suspension représentent ici des termes liés à u ou des dérivées d'ordre 1 ;

- si $\Delta = b^2 - ac < 0$, les deux racines ω^- et ω^+ sont complexes, on dit que l'équation (4.1) est *elliptique*. L'équation de Laplace (4.3) en donne un exemple. Les équations traduisant un équilibre sont le plus souvent de nature elliptique. La forme *canonique* de ces équations est

$$u_{xx} + u_{yy} + \dots = 0$$

- si $\Delta = b^2 - ac = 0$, ω^- et ω^+ sont égales, on dit que l'équation (4.1) est *parabolique*. L'équation de la chaleur (4.4) en offre un exemple. Les équations de diffusion sont souvent paraboliques. La forme *canonique* de ces équations est

$$u_{yy} + \dots = 0.$$

Les formes canoniques vues ci-dessus peuvent être déduites de l'équation (4.1) en faisant un changement de variables de la forme

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y), \\ \eta &= \eta(x, y), \end{aligned}$$

en supposant que le jacobien de la transformation est non nul

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x.$$

On a alors

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \\ u_{xx} &= u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} + u_{\xi\xi} \xi_x^2 + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x, \end{aligned}$$

et ainsi de suite avec les ordres supérieures des dérivées partielles. On peut alors transformer l'équation (4.1) en

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Bu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \quad (4.6)$$

avec

$$\begin{aligned} A &= a\xi_x^2 + c\xi_y^2 + 2b\xi_x \xi_y, \\ B &= a\xi_x \eta_x + c\xi_y \eta_y + b(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x), \\ C &= a\eta_x^2 + c\eta_y^2 + 2b\eta_x \eta_y, \\ D &= L(\xi), \\ E &= L(\eta), \end{aligned}$$

alors que $F = f$ et $G = g$ restent inchangées. Notons que l'on a aussi $\Delta = b^2 - ac = (B^2 - AC)/J$, ce qui montre que la nature d'une équation différentielle (elliptique, parabolique, hyperbolique) ne peut pas être modifiée lors d'un changement de variables. Comme on est libre du changement de variable, on cherche des jeux de fonctions $\xi(x, y)$ et $\eta(x, y)$ telles que les fonctions A , B , ou C puissent devenir identiquement nulles. Par exemple, en choisissant ξ et η comme étant les solutions de $av_x^2 + 2bv_x v_y + cv_y^2 = 0$, on impose que $A = C = 0$ et on se ramène alors à la forme générique $u_{\xi\eta} + \dots = 0$.

4.2 Équations elliptiques

4.2.1 Formule de Green

Sous certaines conditions de comportement d'un champ continu $\mathbf{f}$, le théorème de Gauss nous dit que

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV = \int_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS,$$

avec V un volume de contrôle et $\mathbf{n}$ la normale orientée de sa surface ∂V . La formule de Green s'obtient en appliquant ce théorème à $\mathbf{f} = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}$, avec u et v deux fonctions scalaires continues et admettant des dérivées continues d'ordre 2. Puisqu'on a

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \nabla u \cdot \nabla v + v \Delta u,$$

et en introduisant la notation abrégée pour la dérivée directionnelle

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \mathbf{n},$$

on obtient

$$\int_V (\nabla u \cdot \nabla v + v \Delta u) dV = \int_{\partial V} v \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

En intervertissant u et v , puis en prenant la différence, on déduit la formule de Green, qui fait jouer un rôle symétrique aux fonctions u et v

$$\boxed{\int_V (u \Delta v - v \Delta u) dV = \int_{\partial V} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS.} \quad (4.7)$$

Cette équation est valable en dimension 2 ou 3. En dimension 2, on l'écrit sous la forme suivante (appelée lemme de Green)

$$\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_C P dx + \int_C Q dy, \quad (4.8)$$

en coordonnées cartésiennes où S est une surface de contour C , P et Q sont deux fonctions de x et y . Les deux intégrales dans le membre de droit sont des intégrales curvilignes le long du contour C . Ce lemme est directement obtenu en écrivant la relation de Green (4.7)

$$\int_S (u \Delta v - v \Delta u) dS = \int_C \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\ell,$$

et en identifiant $P = vu_y - uv_y$ et $Q = uv_x - vu_x$.

4.3 Équations hyperboliques

Nous commençons par rechercher $\xi(x, y)$ et $\eta(x, y)$ solutions de $av_x^2 + 2bv_xv_y + cv_y^2 = 0$ de telle sorte que $A = C = 0$. Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles non linéaire du premier ordre, qui peut se résoudre à l'aide de l'équation caractéristique (voir § 3.2). L'équation $av_x^2 + 2bv_xv_y + cv_y^2 = 0$ peut se mettre sous la forme

$$H(x, y, v, p, q) = ap^2 + 2bpq + cq^2 = 0, \quad (4.9)$$

avec les notations usuelles $p = v_x$ et $q = v_y$. Une des équations caractéristiques est

$$ds = \frac{dv}{pH_p + H_q},$$

qui ici nous donne $dv/ds = 0$, avec s une abscisse curviligne le long d'une courbe $\mathcal{C}$ telle que $dx/ds = H_p$ et $dy/ds = H_q$ (voir § 3.2). On a donc $v = cte$ le long de $\mathcal{C}$. On a donc

$$v_x dx + v_y dy = p dx + q dy = 0, \quad (4.10)$$

le long de cette courbe. En éliminant p et q des équations (4.10) et (4.10), on tire que

$$a dy^2 + 2b dx dy + c dx^2 = 0.$$

Cette équation quadratique a donc pour solution

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}. \quad (4.11)$$

Les intégrales premières de cette équation forment donc les fonctions $\xi(x, y)$ et $\eta(x, y)$ recherchées. Les courbes du plan $\xi(x, y) = cte$ et $\eta(x, y) = cte$ sont appelées les courbes *caractéristiques* de l'équation (4.1). Dans un plan $\xi - \eta$, ces courbes sont des lignes droites parallèles aux axes. Les variables ξ et η sont également appelées les *coordonnées caractéristiques*.

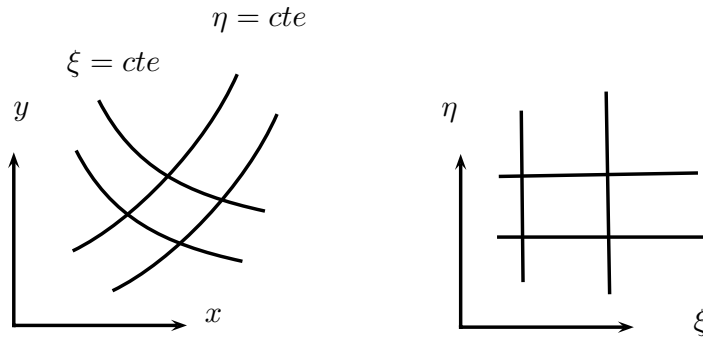


Figure 4.1 : réseau de caractéristiques.

4.3.1 Équation des ondes

Considérons l'équation des ondes sous la forme simplifiée

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

dont les équations caractéristiques sont d'après l'équation (4.11)

$$\frac{dx}{dt} = \pm c,$$

c'est-à-dire le jeu de droites (orthogonales deux à deux) $\xi = x + ct = cte$ et $\eta = x - ct = cte$. Dans le nouveau repère, l'équation des ondes devient

$$u_{\xi\eta} = 0,$$

dont la solution générale est de la forme

$$u(x, t) = \alpha(\xi) + \beta(\eta) = \alpha(x + ct) + \beta(x - ct),$$

avec α et β deux fonctions quelconques. Cette forme est connue sous le nom de *solution d'Alembert*.

4.3.2 Problème de Cauchy

Le problème de Cauchy pour une équation hyperbolique est constitué d'une équation, dont la forme canonique est

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \quad (4.12)$$

où f est une fonction qui dépend continûment de ses arguments $x, y, u, p = u_x$, et $q = u_y$. On adjoint une condition aux limites de la forme

$$u = u_0(s), p = p_0(s), q = q_0(s), \quad (4.13)$$

le long d'une courbe $\mathcal{C}$ d'équation $x = x(s)$ et $y = y(s)$, où s est une coordonnée curviligne. Notons que $u(s), p(s)$, et $q(s)$ ne peuvent être choisies indépendamment, mais doivent vérifier une condition de compatibilité

$$\frac{du}{ds} = p \frac{dx}{ds} + q \frac{dy}{ds}, \quad (4.14)$$

le long de $\mathcal{C}$. Cette courbe $\mathcal{C}$ est quelconque, mais ne peut pas coïncider avec l'une des courbes caractéristiques sous peine de perdre l'unicité de la solution (? , voir pp. 102–103); notons ici que puisque l'équation est sous sa forme canonique, les courbes caractéristiques sont les droites $x = cste$ et $y = cste$. $\mathcal{C}$ ne doit pas non plus être tangente à ces courbes. Autrement dit, $\mathcal{C}$ a pour équation cartésienne $y = y_0(x)$, avec y_0 une fonction strictement monotone de x .

Considérons tout d'abord la solution spéciale à l'équation (4.12) lorsque $f = 0$. Trivialement, on a

$$u = \phi(x) + \psi(y).$$

Les conditions aux limites imposent

$$\phi(x) + \psi(y) = u_0(x, y), \phi'(x) = p_0(x), \text{ et } \psi'(y) = q_0(y),$$

quand (x, y) décrivent la courbe $\mathcal{C}$, ce qui donne

$$u(x, y) = \frac{1}{2} (u_0(x) + u_0(y)) + \frac{1}{2} \int_{x_0(y)}^y p(x') dx' + \frac{1}{2} \int_{y_0(x)}^y p(y') dy'.$$

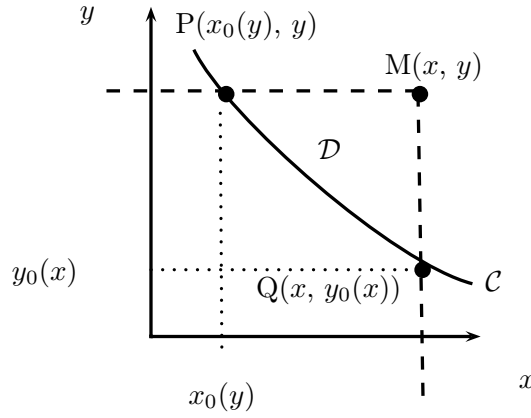


Figure 4.2 : problème de Cauchy.

L'expression se généralise aisément dans le cas d'équation non homogène de la forme

$$u_{xy} = g(x, y).$$

La linéarité de l'équation permet d'écrire la solution comme la somme d'une solution générale et d'une solution particulière, cette dernière étant obtenue par une double intégration de g

$$u(x, y) = \frac{1}{2} (u_0(x) + u_0(y)) + \frac{1}{2} \int_{x_0(y)}^y p(x') dx' + \frac{1}{2} \int_{y_0(x)}^y p(y') dy' + \int_{x_0(y)}^y \int_{x_0(y)}^y g(x', y') dy' dx',$$

que l'on peut écrire sous une forme générale

$$u(x, y) = \frac{1}{2} (u_0(P) + u_0(Q)) - \frac{1}{2} \int_P^Q (q(y') dy' - p(x') dx') + \int_D g(x', y') dy' dx'.$$

4.3.3 Fonction de Riemann

Nous examinons maintenant le problème suivant

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y), \quad (4.15)$$

avec les conditions aux limites suivantes

$$u = u_0(s), \quad p = p_0(s), \quad q = q_0(s), \quad (4.16)$$

sur une courbe $\mathcal{C}$.

L'idée est d'interpréter l'opérateur

$$L = \partial_{xy} + a\partial_x + b\partial_y + c,$$

en termes de divergence, ce qui permet d'appliquer le théorème de Green (4.8). À cet effet, on introduit un nouvel opérateur $M[v]$, que l'on appellera *opérateur adjoint*, opérant sur une nouvelle fonction v , qui reste à préciser. Cet opérateur est défini de telle sorte que

$$vL[u] - uM[v] = \nabla \cdot \mathbf{U} = U_x + V_y,$$

avec $\mathbf{U} = (U, V)$ un champ vectoriel qui reste à définir. Pour déterminer M , examinons les termes de $vL[u]$ que l'on intègre par partie

$$\begin{aligned}vu_{xy} &= (vu_x)_y - v_y u_x = (vu_x)_y + v_{xy}u - (v_y u)_x, \\vau_x &= (uav)_x - u(av)_x, \\vbu_y &= (vbu)_y - u(bv)_y,\end{aligned}$$

dont la somme est

$$\begin{aligned}vL[u] &= (vu_x)_y + v_{xy}u - (v_y u)_x + (uav)_x - u(av)_x + (vbu)_y - u(bv)_y + cuv \\&= (vu_x)_y + (vbu)_y - (v_y u)_x + (uav)_x + cuv + u(v_{xy} - (av)_x - (bv)_y).\end{aligned}$$

Par identification, on trouve

$$M[v] = v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv,$$

et

$$U = -v_y u + uav \text{ et } V = vu_x + vbu.$$

Afin de rendre symétriques les expressions de U et V , on les transforme légèrement en notant par exemple que pour U

$$\frac{1}{2}(-v_y u)_x = \frac{1}{2}(-(vu)_y + u_y v)_x,$$

et de même pour V

$$\frac{1}{2}(u_x v)_y = \frac{1}{2}((vu)_x - v_x u)_y,$$

et en sommant les deux expressions, on peut faire disparaître les termes en $(vu)_x$ et $(vu)_y$. On aboutit alors à

$$U = auv + \frac{1}{2}vu_y - \frac{1}{2}v_y u \text{ et } V = buv + \frac{1}{2}vu_x - \frac{1}{2}v_x u. \quad (4.17)$$

L'application du théorème de Green amène à

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}} (vL[u] - uM[v]) dx dy &= \int_{\mathcal{C}} \left(auv + \frac{1}{2}vu_y - \frac{1}{2}v_y u \right) dy - \left(buv + \frac{1}{2}vu_x - \frac{1}{2}v_x u \right) dx \\&= v(M)u(M) - \frac{1}{2}v(P)u(P) - \frac{1}{2}v(Q)u(Q) \\&\quad + \int_Q^M (av - v_y)u dy - \int_P^M (bv - v_x)u dx + \int_P^Q B[u, v],\end{aligned}$$

avec

$$B[u, v] = \left(auv + \frac{1}{2}vu_y - \frac{1}{2}v_y u \right) dy - \left(buv + \frac{1}{2}vu_x - \frac{1}{2}v_x u \right) dx.$$

Comme on peut choisir librement la fonction v , on peut considérer une fonction v telle que

$$M[v] = 0, v(M) = 1, v_y = av, \text{ sur } QM \text{ et } v_x = bv \text{ sur } PM.$$

L'intégration de ces équations donne

$$\begin{aligned}v(\xi, y) &= \exp \left(\int_{\eta}^y a(\xi, s) ds \right), \\v(x, \eta) &= \exp \left(\int_{\xi}^x b(s, \eta) ds \right),\end{aligned}$$

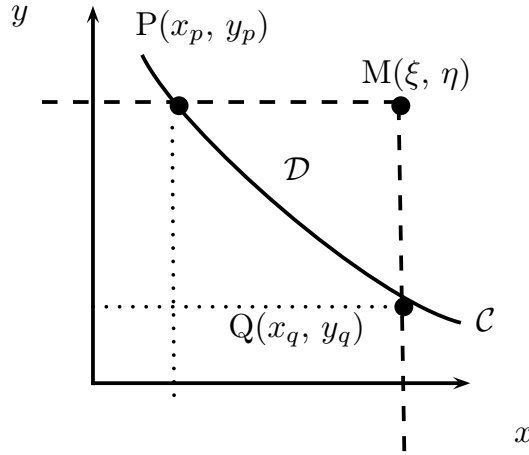


Figure 4.3 : problème de Cauchy.

où (ξ, η) désigne les coordonnées de M. La fonction v ainsi formée est appelée *fonction de Riemann*. On écrit

$$R(x, y; \xi, \eta) = v(x, y),$$

pour montrer que la fonction de Riemann dépend tout à la fois du couple (x, y) et (ξ, η) . Avec cette fonction en main, on peut maintenant écrire la solution $v(M)$ en fonction de données aux frontières et de la fonction de Riemann

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}R(P; \xi, \eta)u(p) + \frac{1}{2}R(Q; \xi, \eta)u(q) \\ &\quad - \int_P^Q B[u, R(x, y; \xi, \eta)] + \int_D f(x, y)R(x, y; \xi, \eta)dx dy. \end{aligned} \quad (4.18)$$

♣ **Exemple.** – La fonction de Riemann v peut être déterminée pour quelques problèmes (voir problème 9, § 5.1, p 150). Par exemple, pour une équation différentielle de la forme

$$u_{xy} + \frac{\lambda}{2} \frac{1}{x+y} (u_x + u_y) = 0, \quad (4.19)$$

le problème adjoint est donc

$$M[v] = 0, \text{ avec } M[v] = v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv, \text{ avec } a = b = \frac{\lambda}{2} \frac{1}{x+y},$$

et où $c = 0$. En suivant ?, on pose

$$v = \frac{(x+y)^\lambda}{(x+\eta)^{\lambda/2}(x+\eta)^{\lambda/2}} W(\zeta), \text{ avec } \zeta = \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{(x+\eta)(y+\xi)}.$$

On trouve que W vérifie l'équation

$$-\lambda^2 W(\zeta) + 4(1 - (\lambda + 1)\zeta)W'(\zeta) + \zeta(1 - \zeta)W''(\zeta) = 0,$$

dont la solution est

$$W(\zeta) = F\left[\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, 1, \zeta\right],$$

avec F la fonction hypergéométrique. On peut également se servir des propriétés de la fonction hypergéométrique pour mettre sous une forme un peu différente cette fonction. On a en effet (? , voir p. 559)

$$F(a, b, c, z) = (1 - z)^{-b} F\left(c - a, b, c, \frac{z}{z - 1}\right),$$

ce qui ici nous donne

$$F\left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1, z\right] = (1 - z)^{-\frac{3}{2}} F\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, \frac{z}{z - 1}\right].$$

Une nouvelle transformation amène à interpréter cette fonction en termes de fonction de Legendre (? , voir p. 562)

$$F\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, z\right] = P\left[\frac{1}{2}, 0, 1 - 2z\right].$$

où P désigne ici la fonction de Legendre de degré $1/2$ et d'ordre 0 . La solution finale est donc

$$u(x, y) = \frac{(x + y)^{3/2}}{(a + b)^{3/2}} P\left[\frac{1}{2}, 0, 1 - \frac{2(a - x)(b - y)}{(a + b)(x + y)}\right].$$

4.4 Solutions faibles des problèmes hyperboliques

Contrairement aux équations elliptiques et paraboliques, les équations différentielles hyperboliques ne lissent pas les discontinuités qui apparaissent dans les conditions aux limites, mais les propagent le long des caractéristiques. L'existence de discontinuité dans le domaine de calcul entre en conflit avec les hypothèses de continuité et de dérivabilité sous-jacentes au problème différentiel, ce qui amène à s'interroger sur la notion de solution.

Il faut tout d'abord se rappeler que les équations différentielles étudiées concernent des problèmes physiques et sont en général obtenues par application des lois de conservation sur un volume de contrôle : l'équation différentielle est obtenue à partir d'une hypothèse de continuité sur tout le volume de contrôle. Si une telle hypothèse n'est pas valide, il nous reste toujours la formule macroscopique originelle. Cette formulation fournit en fait des conditions de correspondance entre solutions continues de deux domaines adjacents. Une solution au problème différentiel écrit sous sa forme intégrale est appelée *solution faible* ; une solution continue est appelée en général solution régulière.

Considérons par exemple l'équation des ondes

$$L[u] = 0,$$

avec $L = \partial_{tt} - c^2 \partial_{xx}$. On considère un domaine de calcul $\mathcal{D}$ dans le plan $x - t$ et des fonctions tests v à support compact et régulières, telles que v soient nulles en dehors de $\mathcal{D}$ (cela implique notamment que v et ses dérivées sont nulles sur les frontières de $\mathcal{D}$). Calculons maintenant

$$\int_{\mathcal{D}} (vL[u] - uL[v]) dx dt.$$

En se servant de

$$\begin{aligned} \partial_t(v\partial_t u - u\partial_t v) &= v\partial_{tt} u - u\partial_{tt} v + \partial_t u \partial_t v - \partial_t u \partial_t v, \\ &= v\partial_{tt} u - u\partial_{tt} v, \end{aligned}$$

on tire

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} (vL[u] - uL[v]) dxdt &= \int_{\mathcal{D}} [\partial_t(v\partial_t u - u\partial_t v) + \partial_x(-c^2 v\partial_x u + c^2 u\partial_x v)] dxdt, \\ &= \int_{\partial\mathcal{D}} \begin{pmatrix} -c^2 v\partial_x u + c^2 u\partial_x v \\ v\partial_t u - u\partial_t v \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n} ds, \\ &= 0, \end{aligned}$$

d'après le théorème de la divergence et où $\partial\mathcal{D}$ représente le contour orienté de $\mathcal{D}$ et $\mathbf{n}$ une normale à ce contour. Comme v et sa dérivée s'annulent sur le contour de $\mathcal{D}$, on en déduit que l'intégrale est nulle. On arrive finalement à

$$\int_{\mathcal{D}} vL[u] dxdt = \int_{\mathcal{D}} uL[v] dxdt.$$

Si u est continûment différentiable et vérifie $L[u] = 0$, alors elle vérifie aussi

$$\int_{\mathcal{D}} uL[v] dxdt = 0. \quad (4.20)$$

Inversement toute fonction continue et deux fois différentiable qui vérifie cette relation intégrale doit également vérifier $L[u] = 0$. On dit alors que u est une solution classique ou régulière du problème différentiel $L[f] = 0$. Si une fonction n'est pas deux fois différentiable, mais vérifie la relation intégrale (4.20), alors on dit qu'il s'agit d'une *solution faible*.

4.5 Conditions aux limites pour les problèmes hyperboliques

On a vu que tout problème hyperbolique peut se ramener après changement de variables à une équation canonique de la forme

$$u_{xt} + a(x, t)u_x + b(x, t)u_t + c(x, t)u = f(x, t),$$

pour laquelle les droites parallèles aux axes x et t constituent les courbes caractéristiques. On va tout d'abord expliciter le problème des conditions aux limites avec l'exemple de l'équation des ondes.

4.5.1 Équation des ondes

Considérons l'équation des ondes

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

qui peut se transformer en

$$u_{\xi\eta} = 0,$$

avec $\xi = x + ct$ et $\eta = x - ct$, où c représente la vitesse caractéristique de propagation des ondes. Si on intègre cette équation sur un domaine de calcul prédéfini $\mathcal{D}$, dont le contour $\partial\mathcal{D}$ est orienté (dans le sens positif), on peut mettre en relief le rôle des conditions aux limites dans le calcul de la solution. On fera ici un usage important du théorème de la divergence (ou de façon équivalente de la formule de Green). En tout point du contour, la normale est notée $\mathbf{n}$. Le théorème de la divergence nous permet de passer d'une formulation sur un volume (ce

qui représente l'équation à résoudre) à une formulation sur un contour (ce qui fait apparaître les conditions aux limites)

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\mathcal{D}} (u_{tt} - c^2 u_{xx}) dx dt, \\
 &= \int_{\mathcal{D}} (\partial_t u_t + \partial_x (-c^2 u_x)) dx dt, \\
 &= \int_{\partial \mathcal{D}} (c^2 u_x, -u_t) \cdot \mathbf{n} ds, \\
 &= \int_{\partial \mathcal{D}} (u_t dx + c^2 u_x dt),
 \end{aligned}$$

car $\mathbf{n} ds = (dt, -dx)$. On va voir que selon le type de conditions que l'on impose, il faut imposer des contours différents; les conditions imposées sur ce contour jouent également un rôle différent, ce qui vous nous amener à distinguer les frontières temporelles (sur un axe Ot) et les frontières spatiales (sur un arc Ox).

Considérons en premier lieu le problème suivant: on cherche à résoudre l'équation des ondes, avec la condition initiale suivante sur l'axe des x

$$u(x, 0) = f(x) \text{ et } u_t(x, 0) = g(x).$$

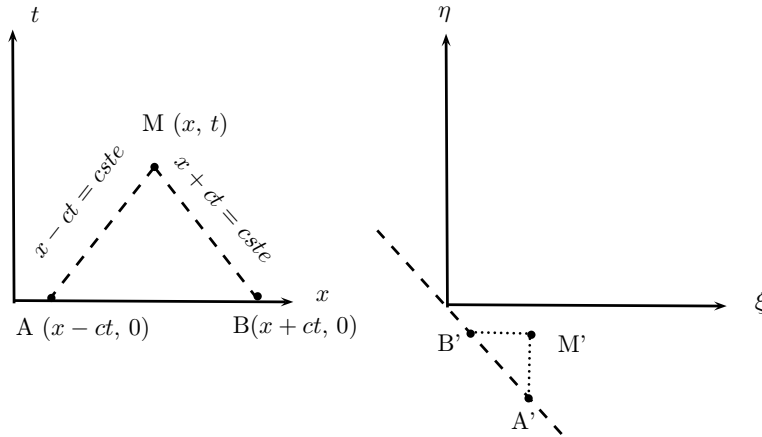


Figure 4.4 : le triangle des caractéristiques dans le plan physique $x-t$ (à gauche) et dans le plan caractéristique $\xi - \eta$ (à droite).

On cherche à calculer la solution en un point M . On peut tracer deux caractéristiques émanant des points A et B situés sur l'axe Ox . On considère alors le domaine triangulaire AMB . Calculons tout d'abord l'intégrand $u_t dx + c^2 u_x dt$ sur la caractéristique BM d'équation $x + ct = cste$

$$\int_{BM} (u_t dx + c^2 u_x dt) = \int_{BM} (-cu_t + c^2 u_x) dt,$$

or $u_t - cu_x$ est la dérivée de u selon la caractéristique BM , donc $u_t - cu_x = du/dt$ sur BM . On a donc

$$\int_{BM} (u_t dx + c^2 u_x dt) = \int_{BM} (-c) \frac{du}{dt} dt = - \int_{BM} c du.$$

On aboutit à

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{D}} (u_t dx + c^2 u_x dt) &= - \int_{BM} c du + \int_{MA} c du + \int_{AB} u_t dx, \\ &= -2cu(x,t) + cu(x+ct,0) + cu(x-ct,0) + \int_{x-ct}^{x+ct} u_t(x,0) dx, \\ &= 0, \end{aligned}$$

Soit finalement

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} u_t(x,0) dx,$$

qui est une forme spéciale de la solution d'Alembert.

Il est manifeste qu'avec ce type de conditions aux limites, où l'on fixe ce qui se passe sur un arc donné (par exemple, un segment de l'axe Ox compris entre $x = a$ et $x = b$), on ne peut renseigner que sur un domaine triangulaire, appelé *domaine d'influence*, qui est rempli par les caractéristiques $x - ct$ et $x + ct$. Un tel problème aux limites est appelé *problème de Cauchy* et la frontière où l'on a imposé les conditions aux limites est dite *frontière spatiale*.

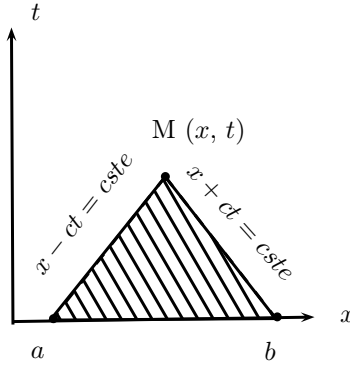


Figure 4.5 : domaine d'influence.

Si on veut remplir tout le premier quadrant, il faut fournir une condition supplémentaire sous la forme d'une condition aux limites le long de l'axe Ot . Pour cette raison, une telle frontière est appelée *temporelle*. On impose une condition aux limites de la forme suivante

$$u(0, t) = h(t);$$

c'est une condition aux limites de type *Dirichlet*. Pour calculer ce qui se passe au point M , il faut calculer ce qui se passe sur trois caractéristiques comme le schématise la figure 4.6. En faisant comme précédemment une décomposition selon les différentes caractéristiques, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{D}} (u_t dx + c^2 u_x dt) &= - \int_{BM} c du + \int_{MC} c du - \int_{CA} c du + \int_{AB} u_t dx, \\ &= -2cu(x,t) + cu(x+ct,0) + 2cu\left(0, t - \frac{x}{c}\right) - cu(ct-x,0) + \int_{ct-x}^{x+ct} u_t(x,0) dx, \\ &= 0, \end{aligned}$$

soit

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} u_t(x,0) dx + h\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

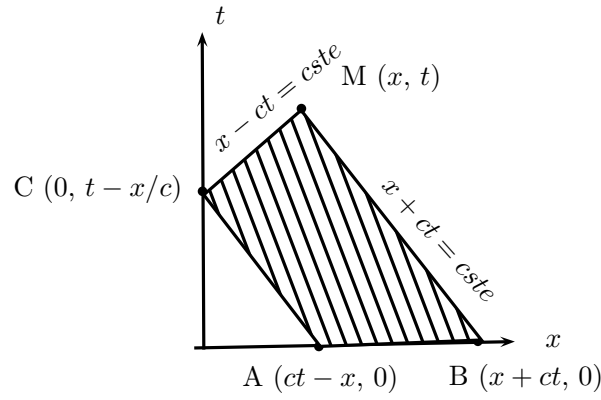


Figure 4.6 : domaine de calcul avec une frontière temporelle.

Notons que si les conditions initiales et aux limites ne se recoupent pas au point origine, c'est-à-dire si $f(0) \neq h(0)$, alors une discontinuité (appelée encore choc) se produit. Si les conditions aux limites sont un peu plus complexes, par exemple sous une forme d'une condition de *Neumann*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = h(t),$$

ou bien mixte

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + \beta u(0, t) = h(t),$$

le problème se résout de la même façon. Si l'on ajoute un terme source dans l'équation des ondes, il n'y a pas de difficulté supplémentaire: le terme source apparaît dans la solution sous la forme d'une (double) intégrale sur le domaine $\mathcal{D}$ (? voir pp. 298–299). D'une façon générale, ce que l'on voit apparaître, ce sont deux domaines dans le premier quadrant, séparés par la caractéristique $x = ct$ émanant du point origine. Le domaine I est entièrement contrôlé par les conditions initiales, alors que le domaine II nécessite de connaître les conditions aux limites comme le montre la figure 4.7.

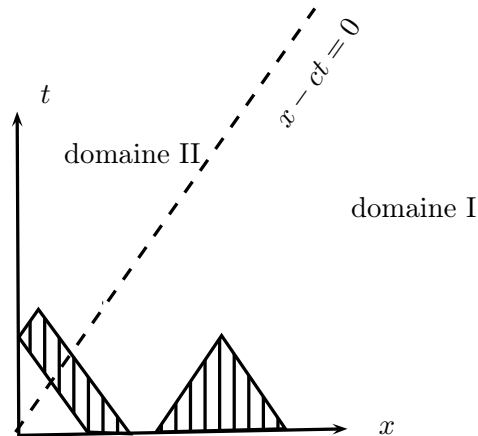


Figure 4.7 : domaine de calcul avec des conditions initiales et aux limites.

Le cas des frontières mobiles est plus intéressant. Imaginons que la frontière bouge. Sa position est donnée par $x = h(t)$ et donc sa vitesse par $u_f = \dot{h}(t)$. On cherche à résoudre

l'équation des ondes $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ avec pour conditions aux limites

$$u(x, t)|_{x=h(t)} = \dot{h},$$

et pour conditions initiales

$$u(x, 0) = f(x) \text{ et } u_t(x, 0) = g(x).$$

Si la vitesse du piston est supérieure à la vitesse caractéristique c , le problème est mal posé. Cela peut se comprendre en examinant la figure 4.8(a). Pour un point M tel que reporté sur cette figure, sa vitesse u équivaut à la vitesse de la frontière mobile et à celle impulsée initialement, ce qui n'est pas possible sauf cas exceptionnel où vitesses initiale et aux frontières seraient tout le temps égales. Une telle condition aux limites implique en fait l'apparition d'un choc. Pour le cas plus sympathique où $\dot{h} < c$, le problème est bien posé puisqu'on peut en tout point M construire une solution comme on l'a fait juste au-dessus avec le problème sur le premier quadrant.

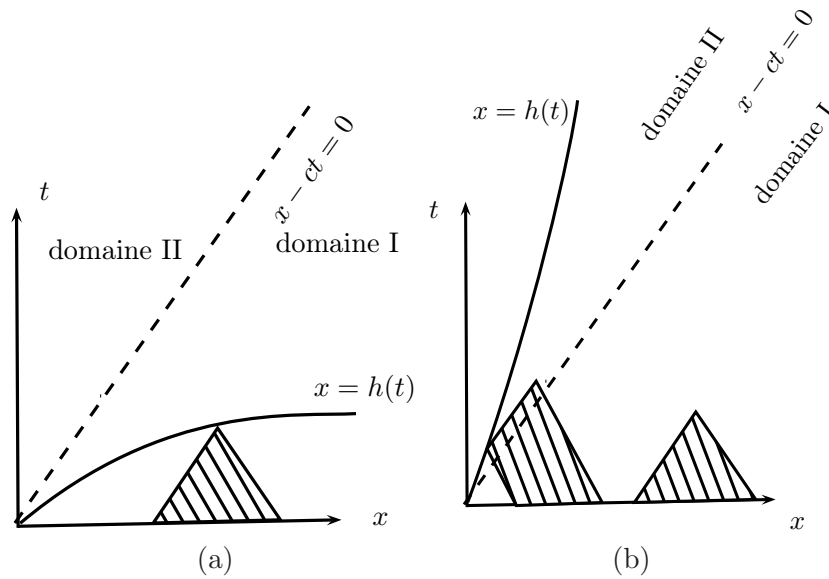


Figure 4.8 : (a) frontiere mobile avec $\dot{h} > c$; avec $\dot{h} < c$.

4.5.2 Vocabulaire

Ce qui a été dit à propos de l'équation de la chaleur peut se généraliser à tout problème différentiel hyperbolique du second ordre. Notamment, quand on étudie l'équation des ondes, on parle

- de frontière temporelle (*time-like curve*) lorsque la courbe $x = h(t)$ est au-dessus de la caractéristique $\dot{h} < c$. Toute frontière de ce type peut servir à fournir une condition aux limites;
- de frontière spatiale (*space-like curve*) lorsque la courbe $x = h(t)$ est au-dessous de la caractéristique $\dot{h} > c$. Ce type de frontière sert à donner une condition initiale.

Ces définitions se généralisent en examinant la position de la frontière dans le plan caractéristique $\xi - \eta$: si les droites caractéristiques $\xi = cste$ et $\eta = cste$ émanent de la frontière en restant dans le même domaine, on parle d'*arc spatial*. Inversement, si les droites caractéristiques sont situées de part et d'autre de l'arc, alors on parle d'*arc temporel*.

Les théorèmes d'existence ont été prouvés lorsqu'on a un problème avec une frontière spatiale, mais l'unicité de la solution est un problème beaucoup plus ardu lorsque la frontière est temporelle.

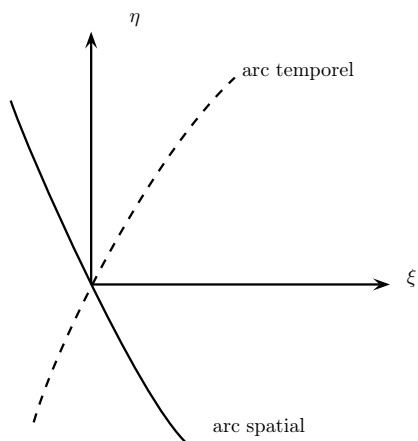


Figure 4.9 : définition d'un arc spatial/temporel selon la position des caractéristiques.

4.6 Transformation en équations linéaires du second ordre

4.6.1 Méthode de l'hodographe

L'idée est d'échanger le rôle de la variable dépendante et de la variable indépendante. Par exemple, si on a un système d'équations aux dérivées partielles impliquant les variables dépendantes $u(x, y)$ et $v(x, y)$, on peut transformer ce système en système d'équations pour $x(u, v)$ et $y(u, v)$. Par exemple, pour ce type de problème à deux variables, on pose (? , voir pp. 462-476)

$$\begin{aligned}x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v),\end{aligned}$$

ce qui en différentiant par rapport à x , donc

$$\begin{aligned}1 &= x_u u_x + x_v v_x, \\ 0 &= y_u u_x + y_v v_x,\end{aligned}$$

ce qui permet de déterminer u_x et v_x

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{y_v}{J}, \\ v_x &= -\frac{y_u}{J},\end{aligned}$$

avec $J = x_u y_v - x_v y_u$ le jacobien. En faisant de même avec y , on obtient

$$\begin{aligned}u_y &= -\frac{x_v}{J}, \\ v_y &= \frac{x_u}{J}.\end{aligned}$$

Tant que le jacobien est non nul, on peut faire l'inversion. Notons que le jacobien de la transformation inverse $\tilde{J} = u_x v_y - u_y v_x$ est non nul si J est non nul. La condition $J \neq 0$ exclut donc le cas où soit u , soit v est constant ainsi que le cas où u est une fonction univoque de v ; le dernier cas correspond au cas de l'onde simple (voir § 4.6.2).

♣ **Exemple.** – Considérons le système d'équations quasi-linéaires

$$h_t + a(h, u)h_x + b(h, u)u_x = 0, \quad (4.21)$$

$$u_t + c(h, u)h_x + d(h, u)u_x = 0. \quad (4.22)$$

Le cas $a(h, u) = u$, $b(h, u) = h$, $c(h, u) = 1$, et $d(h, u) = u$ correspond aux équations de Saint-Venant sous forme sans dimension. Le système non linéaire (4.21–4.22) peut être transformé en un système linéaire en appliquant la méthode de l'hodographe. En notant $J = x_h t_u - x_u t_h$, on fait le changement de variable

$$h_x = \frac{t_u}{J}, u_x = -\frac{t_h}{J} h_t = -\frac{x_u}{J}, \text{ et } u_t = \frac{x_h}{J}.$$

On obtient alors un système linéaire

$$\begin{aligned}-x_u + a(h, u)t_u - b(h, u)t_h &= 0, \\ x_h + c(h, u)t_u - d(h, u)t_h &= 0.\end{aligned}$$

Cela peut s'écrire sous une forme d'un système d'évolution d'un système physique

$$\begin{bmatrix} 0 & -b \\ 1 & -d \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial h} + \begin{bmatrix} -1 & -a \\ 0 & c \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial u} = 0,$$

avec $\mathbf{V} = (x, t)$. Après inversion de la première matrice et en supposant $b \neq 0$, on déduit

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial h} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial u} = 0, \text{ avec } \mathbf{B} = \frac{1}{b} \begin{bmatrix} d & bc - ad \\ 1 & -a \end{bmatrix}.$$

Examinons les courbes caractéristiques dans le plan physique $x - t$ et dans le plan de l'hodographe. Comme cela est détaillé au § ??, on cherche à écrire le système couplé (4.21–4.22) sous la forme d'équations différentielles ordinaires. Pour cela, on commence par écrire sous forme matricielle le système

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{U} = 0, \text{ avec } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

et $\mathbf{U} = (h, u)$. Les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont notées $\lambda_{1,2}$ (avec $\lambda_1 > \lambda_2$) et sont les solutions de $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$. Les valeurs propres à gauche de $\mathbf{A}$ sont notées $\mathbf{v}_{1,2}$ et celles à droite $\mathbf{w}_{1,2}$. On a [voir équations (??–??)]

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \begin{pmatrix} \frac{2c}{d - a + \sqrt{\Delta}} \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} \frac{a - d + \sqrt{\Delta}}{2c} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ associés à } \lambda_1 = \frac{a + d + \sqrt{\Delta}}{2}, \\ \mathbf{v}_2 &= \begin{pmatrix} \frac{2c}{d - a - \sqrt{\Delta}} \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} \frac{a - d - \sqrt{\Delta}}{2c} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ associés à } \lambda_2 = \frac{a + d - \sqrt{\Delta}}{2}, \end{aligned}$$

avec $\Delta = (a - d)^2 + 4bc$. Les courbes caractéristiques dans le plan physique sont les intégrales premières de $dx/dt = \lambda_i$, avec $i = 1, 2$. Dans le plan de l'hodographe, les deux courbes caractéristiques sont les intégrales premières de $du/dh = \mu_i$ avec μ_i les racines de $\det(\mathbf{B} - \mu \mathbf{1}) = 0$,

$$\mu_1 = \frac{d - a + \sqrt{\Delta}}{2b} \text{ et } \mu_2 = \frac{d - a - \sqrt{\Delta}}{2b}.$$

On note qu'on a les relations suivantes

$$\mu_2 = \frac{d - \lambda_1}{b} \text{ et } \mu_1 = \frac{d - \lambda_2}{b},$$

ce qui montre que les caractéristiques sont reliées entre elles : la 1-caractéristique du plan physique est reliée à la 2-caractéristique du plan de l'hodographe (et réciproquement).

Au § ??, on montre que le système différentiel (4.21–4.22) est équivalent à

4.6.2 Onde simple

Pour les équations homogènes, un cas important où la méthode de l'hodographe ne s'applique pas (car $J = 0$) est celui de l'*onde simple* (?). Ce cas se rencontre lorsque les fonctions u et v sont liées entre elles. Un résultat essentiel est qu'au voisinage de tout état constant (un domaine de l'espace $x - t$ où à la fois u et v sont constantes), alors il existe un domaine où

nécessairement on a une onde simple, c'est-à-dire une relation fonctionnelle entre u et v (par exemple de la forme $v = f(u)$). Voici les autres caractéristiques des ondes simples

- une des deux familles de caractéristiques est constituée de droites dans le plan $x - t$ (par exemple, la famille C_+ d'équation $dx/dt = \lambda_+^i$ sur la figure 4.10, correspondant à $\xi = cste$) ;
- l'autre famille est une courbe quelconque ;
- dans le plan de l'hodographe, une onde simple est une courbe unique puisque u et v sont liées entre elles.

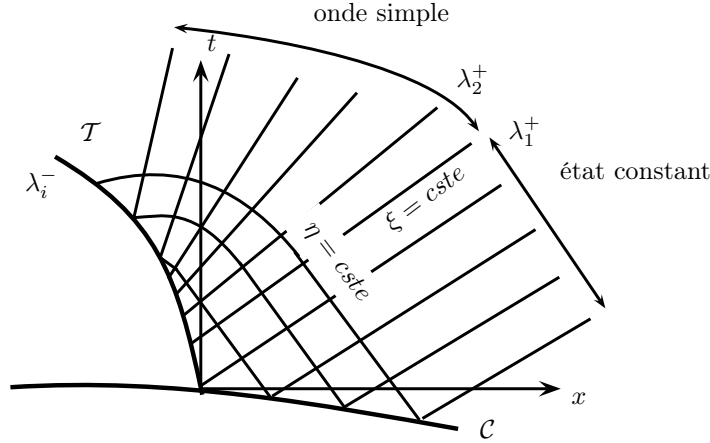


Figure 4.10 : onde simple générée par un état constant le long d'un arc spatial.

En effet, considérons un état constant $\mathcal{D}$ (par exemple, un fluide en écoulement permanent uniforme ou bien au repos) délimité par un arc (spatial) $\mathcal{C}$. Les caractéristiques dans le plan physique $x - t$ sont des droites¹ car les valeurs propres $\lambda_+(u, v)$ et $\lambda_-(u, v)$ sont constantes. Considérons un arc temporel $\mathcal{T}$ coupant l'arc $\mathcal{C}$; les familles de caractéristiques émanent donc de part et d'autre de $\mathcal{T}$. Sur la figure 4.10, on considère que la famille C_- d'équation $dx/dt = \lambda_-$ (correspondant à $\eta = cste$) pointent vers la gauche, alors que la famille C_+ d'équation $dx/dt = \lambda_+$ (correspondant à $\xi = cste$) pointent vers la droite. Il s'ensuit que, puisqu'elle pointent vers la gauche, les courbes C_- propagent l'information de la zone $\mathcal{D}$ vers l'arc $\mathcal{T}$. Le long de chaque caractéristique de cette famille, le second invariant de Riemann $r_2(u, v)$ est constant et la constante est fournie par la valeur prise par r_2 dans le domaine $\mathcal{D}$; de la relation $r_2(u, v) = cste$, on peut tirer la relation qui lie u et v , une relation qui peut s'écrire $v = f(u)$ (ou bien $f(u, v) = 0$). Par ailleurs, la seconde famille de courbes C_+ , qui pointent vers la droite, est constituée de droites dans le plan $x - t$. Le long d'une caractéristique C_+ , on a $r_1(u, v) = cste$; comme la caractéristique émane de $\mathcal{T}$, la valeur de la constante est fixée par la condition aux limites imposées sur cet arc. La caractéristique traverse une zone couverte par la famille C_- , donc en tout point on a une relation de la forme $v = f(u)$, donc puisque $r_1(u, f(u)) = cste$, u doit être constant le long de C_- , donc $\lambda(u, f(u))$ l'est également et la caractéristique C_+ est une droite. Il s'ensuit qu'à la fois u et v se propagent en gardant une valeur constante le long de C_+ et que la valeur constante est imposée par la condition aux limites sur $\mathcal{T}$.

Les conditions d'existence d'un domaine « onde simple » apparaissent assez aisément à la lecture de la figure 4.10 :

- il faut que la famille C_- pointe vers la gauche, donc $\mathcal{T}$ doit être un arc temporel ;

1. l'état est représenté par un point dans le plan de l'hodographe.

- il faut également que les valeurs de λ^+ décroissent quand ξ croît de telle sorte que les caractéristiques soient en « éventail ». Si cela n'est pas le cas, les caractéristiques (qui sont des droites) se recoupent nécessairement, ce qui implique qu'une solution continue n'est pas possible et qu'un choc apparaît.

Ces deux propriétés sont fixées par les conditions imposées sur $\mathcal{T}$.

Dans le cas particulier où l'on fixe une variable (par exemple u) sur les arcs $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned} u &= U_0 = \text{cste} \text{ sur l'arc } \mathcal{C}, \\ u &= U_1 = \text{cste} \neq U_0 \text{ sur l'arc } \mathcal{T}, \end{aligned}$$

(outre la condition pour v : $v = V_0 = \text{cste}$ sur $\mathcal{C}$) et en admettant que les caractéristiques C_+ sont en éventail (donc elles ne se croisent pas)

$$\lambda_+(U_0, V_0) > \lambda_+(U_1, f(U_1)),$$

alors, on observe un domaine d'écoulement appelé « onde simple centrée » comme l'illustre la figure 4.11.

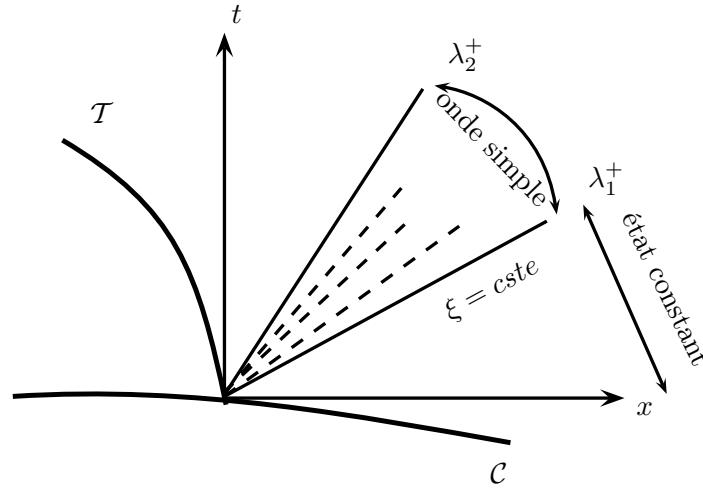


Figure 4.11 : onde simple centrée.

4.6.3 Application : équations de Saint-Venant

Rupture de barrage de volume fini sur un fond horizontal

Problème à résoudre

On considère une rupture de barrage d'un volume fini de fluide le long d'un plan horizontal. Le mouvement est décrit par les équations de Saint-Venant sous forme adimensionnelle

$$\frac{\partial}{\partial t} h + \frac{\partial}{\partial x} (hu) = 0, \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial x} h = 0. \quad (4.24)$$

Les conditions initiales et aux limites sont

- pour $-1 \leq x \leq 0$, on a $h = 1$; en dehors de ce domaine, on a $h = 0$;

- en $x = -1$, il y a un mur, donc $u = 0$;
- à l'instant $t = 0$, on supprime le mur du barrage.

On va voir que cette équation admet une solution auto-similaire dans le cas d'un volume infini (voir également § ??) :

$$u = \frac{2}{3}(\zeta + 1),$$

$$h = \frac{1}{9}(-\zeta + 2)^2,$$

avec $\zeta = x/t$. Ce système peut se mettre sous la forme matricielle

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{U} = \mathbf{0},$$

avec

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u \\ \sqrt{h} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} u & 2\sqrt{h} \\ \frac{1}{2}\sqrt{h} & u \end{bmatrix}.$$

Équations caractéristiques

Les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont $\lambda_{\pm} = u \pm \sqrt{h}$. Ce système peut donc se mettre sous la forme caractéristique

$$\frac{du \pm 2\sqrt{h}}{dt} = 0 \text{ le long des caractéristiques } \frac{dx}{dt} = u \pm \sqrt{h}. \quad (4.25)$$

Les invariants de Riemann sont $r = u + 2\sqrt{h}$ et $s = u - \sqrt{h}$. On peut écrire les valeurs propres en termes de r et s :

$$\lambda_+ = u + \sqrt{h} = \frac{3r + s}{4} \text{ et } \lambda_- = u - \sqrt{h} = \frac{3s + r}{4}.$$

Avec les variables r et s , les équations (4.25) deviennent

$$\frac{dr}{dt} = 0 \text{ le long des caractéristiques } \frac{dx}{dt} = \lambda_+ = \frac{3r + s}{4}. \quad (4.26)$$

$$\frac{ds}{dt} = 0 \text{ le long des caractéristiques } \frac{dx}{dt} = \lambda_- = \frac{3s + r}{4}. \quad (4.27)$$

Si au lieu de travailler dans le plan physique $x - t$, on travaille dans le plan $r - s$, les caractéristiques sont les droites $r = cste$ et $s = cste$ le long desquelles on a (voir § ??)

- pour la r -caractéristique,

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_+ \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{3r + s}{4} \frac{\partial t}{\partial s} \text{ le long de } r = cste, \quad (4.28)$$

car $r = cste$;

- pour la s -caractéristique,

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_- \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{3s + r}{4} \frac{\partial t}{\partial r} \text{ le long de } s = cste, \quad (4.29)$$

car $s = cste$.

On peut obtenir une seule équation gouvernant t ou x dans le plan $r - s$. On différencie l'équation (4.28) par r et l'équation (4.29) par s

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial r \partial s} &= \frac{3r + s}{4} \frac{\partial^2 t}{\partial r \partial s} + \frac{3}{4} \frac{\partial t}{\partial s}, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial r \partial s} &= \frac{3s + r}{4} \frac{\partial^2 t}{\partial r \partial s} + \frac{3}{4} \frac{\partial t}{\partial r}.\end{aligned}$$

En retranchant on obtient une équation pour t

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r \partial s} = \frac{3}{2(r - s)} \left(\frac{\partial t}{\partial r} - \frac{\partial t}{\partial s} \right). \quad (4.30)$$

Pour x , on déduit

$$\frac{2}{3}(s - r) \frac{\partial^2 x}{\partial r \partial s} = \frac{3r + s}{3s + r} \frac{\partial x}{\partial r} - \frac{3s + r}{3r + s} \frac{\partial x}{\partial s}. \quad (4.31)$$

Notons que l'équation (4.30) est une forme particulière de l'équation (4.19) avec $\lambda = 3$, $x = r$ et $y = -s$. Il existe donc une solution au problème adjoint, ce qui est fort utile pour résoudre des problèmes avec les équations de Saint-Venant. En pratique, on ne résout pas directement l'équation (4.31), mais on résout d'abord l'équation (4.30), puis on se sert de l'une des équations (4.28) ou (4.29) pour déterminer x .

Onde simple et détermination des caractéristiques

On s'intéresse tout à ce qui passe aux premiers instants; la solution est alors similaire à celle trouvée pour un volume infini. Dans le plan physique $x - t$, le demi-plan $t \geq 0$ correspond à l'état constant $h = 1$ et $u = 0$. On sait que l'on va avoir deux frontières mobiles qui délimitent le volume de fluide dans un régime d'« onde simple » et qui émanent du point origine :

- une première frontière correspondant au front $h = 0$ et $u = u_f$ (qui sera la même que pour le problème infini) ;
- une seconde frontière correspondant à l'onde régressive qui se propage dans le réservoir jusqu'à venir buter contre le mur arrière : $h = 1$ et $u = 0$.

Ce régime d'onde simple est caractérisé par la constance d'un des invariants de Riemann, ici c'est nécessairement celui rattaché aux ondes progressives, donc $r = cste$. La valeur de r est fixée par les conditions initiales, ici $r = u + 2\sqrt{h} = 2$. Dans le plan $x - t$, le domaine d'onde simple D_1 se présente comme un cône avec son sommet à l'origine, alors que dans le plan $r - s$, il s'agit d'un segment de droite le long de la verticale $r = 2$. Comme $r = 2$ partout dans D_1 , les s -caractéristiques sont des droites dans le plan $x - t$:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_- = u - \sqrt{h} = 2 - 3\sqrt{h} = cste,$$

ce qui donne $x = (2 - 3\sqrt{h})t$ et en inversant, on trouve bien $h = (-x/t + 2)^2/9$. En se servant de la valeur de r , on retrouve ensuite $u = 2(x/t - 1)/3$. Les deux frontières correspondent donc aux droites $x = -t$ (onde régressive) et $x = 2t$ (onde progressive). L'éventail de s -caractéristiques correspond à des valeurs de s compris entre $s = u - 2\sqrt{h} = -2$ (onde régressive) à $s = 2$ (front). On peut se servir de s pour paramétrer les s -caractéristiques : en effet, partant de la relation $s = u - 2\sqrt{h}$ où l'on remplace u et h par leur expression respective en fonction de x/t , on tire

$$x = \frac{1}{4}(3s + 2)t. \quad (4.32)$$

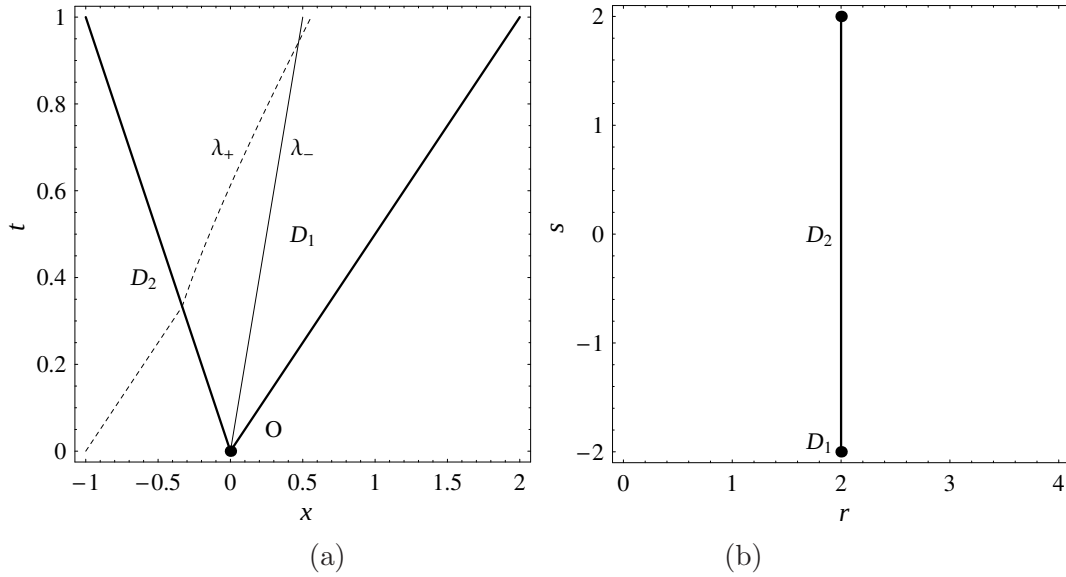


Figure 4.12 : caractéristiques dans le problème de rupture de barrage. (a) Dans le plan physique $x-t$: D_2 représente un état stationnaire ($r=2$ et $s=-2$) où la retenue n'est pas encore affectée par l'onde régressive ; D_1 est le domaine où r reste constant (onde simple), mais s augmente de -2 à 2 . Ce domaine est encadré par deux s -caractéristiques reportées en gras. La courbe à tiret représente une r -caractéristique, ici émanant du point $x_0 = -1$. (b) Dans le plan de Riemann $r-s$.

Les r -caractéristiques sont des droites dans le domaine D_2 (à gauche de D_1 dans le plan $x-t$), qui représente le domaine d'écoulement non encore concerné par l'onde régressive. Dans le domaine D_1 , les r -caractéristiques sont des courbes d'équation

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_+ = u + \sqrt{h} = 2 - \sqrt{h} = 2 - \frac{1}{3} \left(2 - \frac{x}{t} \right),$$

dont la solution est $x(t) = 2t + at^{1/3}$, avec a une constante. Notons que cette équation peut également se déterminer comme suit. Dans le plan $r-s$, on a le long de $r=2$ la relation (4.28) et en même temps la relation (4.32), on tire l'équation suivante

$$\frac{\partial t}{\partial s} = \frac{3t}{4-2s},$$

dont les solutions sont de la forme $t = (b(2-s))^{-3/2}$, avec b une constante d'intégration ; cela implique donc que $s = 2 - (bt)^{-2/3}/2$. En substituant s dans l'équation (4.32), on trouve

$$x = \frac{1}{4} \left(8 - \frac{3}{2} \frac{1}{(bt)^{2/3}} \right) t = 2t - \frac{3}{2} \frac{t^{1/3}}{b^{2/3}} = 2t + at^{1/3}, \quad (4.33)$$

qui est bien comparable à la forme trouvée plus haut. En résumé, les r -caractéristiques

- sont des droites d'équation $x = c + 2t$ dans le domaine non perturbé D_2 , avec c une constante ;
- sont des courbes d'équation $x = 2t - 3c^{2/3}t^{1/3}/8$ dans le domaine « onde simple » D_1 .

Effet de volume fini

Examinons ce qui se passe dans le plan $x-t$ lorsque l'effet de volume fini se fait sentir. Les deux s -caractéristiques délimitant le domaine d'onde simple ont pour équation : $x = 2t$ (front) et $x = -t$ (queue). Dans le système de coordonnées adimensionnelles, l'abscisse marquant la

fin de la retenue est $x_b = -1$; ce point est atteint à l'instant $t = 1$ par l'onde régressive émanant de O. Il part alors une r -caractéristique dont l'équation est donnée par la relation (4.33); son équation est : $x = 2t - 3t^{1/3}$. Cette courbe BC délimite un domaine D_3 , au-dessus de laquelle l'onde n'est plus simple. Pour calculer l'écoulement dans ce domaine « complexe », on va se servir de la fonction de Riemann et résoudre l'équation (4.30), mais pour cela il faudrait les conditions aux limites sur le domaine d'intégration D_3 , ce qui n'est pas très facile pour la courbe $x = 0$.

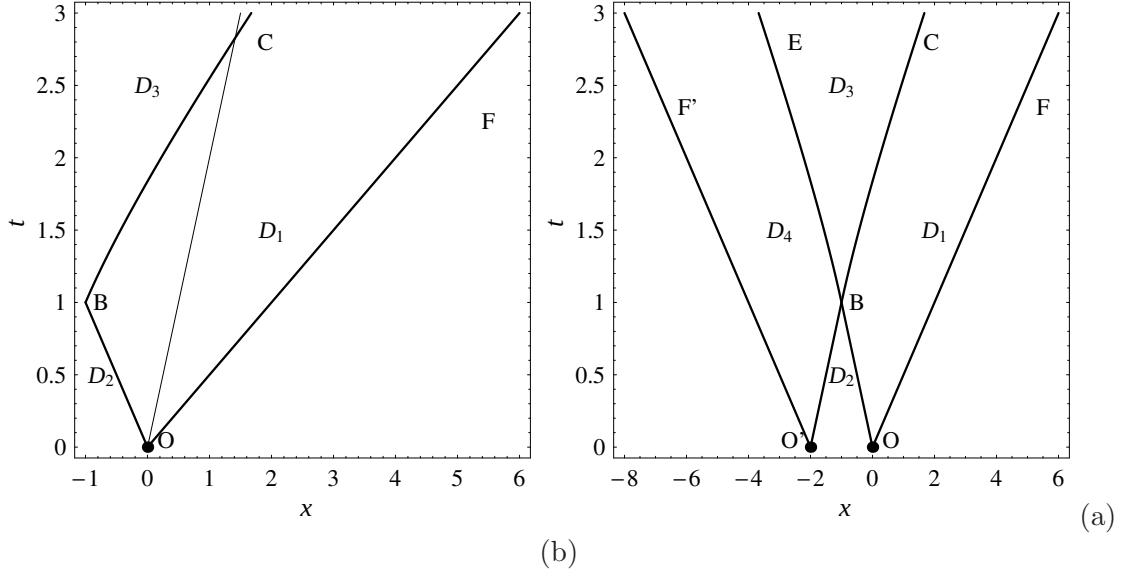


Figure 4.13 : réflexion de l'onde simple contre le mur. (a) Comportement des caractéristiques dans le plan physique. (b) Traitement du problème en considérant une rupture dans le demi-plan $x < 0$. Le domaine D_2 est délimité par la courbe frontale OF d'équation $x = 2t$ (s -caractéristique avec $s = 2$), la courbe « onde régressive » OB d'équation $x = -t$ (s -caractéristique avec $s = -2$), et la réflexion de cette onde contre le mur BC d'équation $x = -3t^{1/3} + 2t$ (r -caractéristique avec $r = 2$). Le domaine D_4 est délimité par la courbe frontale OF' d'équation $x = -2 - 2t$ (r -caractéristique avec $r = -2$), la courbe « onde régressive » O'E d'équation $x = -2 - t$ (r -caractéristique avec $r = 2$), et la réflexion de cette onde contre le mur BD d'équation $y = 3t^{1/3} - 2t - 2$ (s -caractéristique avec $s = -2$).

Pour contourner cette difficulté, on va utiliser un principe de symétrie : on considère que le problème est symétrique par rapport à l'axe $x = 0$ où la seule condition aux limites est $u = 0$. Pour cela, on suppose qu'il existe un barrage situé en O' (-2, 0). La rupture de barrage entraîne une onde progressive dans le demi-plan $x < 0$ alors qu'une onde régressive se propage vers 0. Le problème se ramène donc à trouver l'intersection de deux ondes simples (? , voir § 8.2, pp. 191–197). Dans le plan $x < 0$, le domaine D_4 représentant l'onde simple est caractérisé par $s = cste = -2$. Dans ce domaine, la solution s'écrit :

$$u = \frac{2}{3}(\zeta - 1),$$

$$h = \frac{1}{9}(\zeta + 2)^2,$$

avec $\zeta = (x + 2)/t$. Les r -caractéristiques ont pour équation : $x + 2 = (3r - 2)t/4$. Le domaine D_4 est délimité en partie supérieure par la courbe BE qui est une s -caractéristique (avec toujours $s = -2$); son équation est

$$x = 3t^{1/3} - 2t - 2.$$

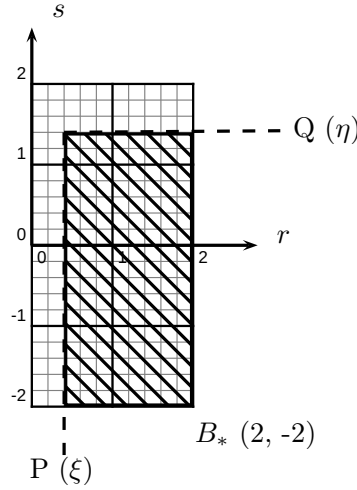


Figure 4.14 : domaine d'intégration dans le plan de l'hodographe. Le contour est orienté dans le sens positif $P \rightarrow B_* \rightarrow Q$.

On va intégrer l'équation (4.30) dans le domaine D_3 , avec pour conditions aux limites

- $t = 8(2 - s)^{-3/2}$ le long de la courbe BC dans le plan $x - t$ (segment B_*P le long de $r = 2$ dans le plan de l'hodographe) ;
- $t = 8(2 + r)^{-3/2}$ le long de la courbe BE dans le plan $x - t$ (segment B_*Q le long de $s = 2$ dans le plan de l'hodographe).

D'après la méthode de Riemann [voir équation (4.18)], la solution s'écrit pour un point $M(\xi, \eta)$

$$t(\xi, \eta) = \frac{1}{2}t(P)B[P; M] + \frac{1}{2}t(Q)B[Q; M] + \int_P^Q (Uds - Vdr),$$

où B est la fonction de Riemann trouvée précédemment [voir équation (4.19) avec $\lambda = 3$, $x = r$ et $y = -s$]. On a

$$B(r, s; \xi, \eta) = \frac{(r - s)^3}{(r - \eta)^{3/2}(s - \xi)^{3/2}} F \left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1, \frac{(r - \xi)(s - \eta)}{(r - \eta)(s - \xi)} \right].$$

Cette fonction vérifie $B(r, s; r, s) = 1$ et

$$\frac{\partial B}{\partial s} = -\frac{3}{2} \frac{B}{r - s} \text{ sur } r = \xi \text{ et } \frac{\partial B}{\partial r} = \frac{3}{2} \frac{B}{r - s} \text{ sur } s = \eta.$$

Par ailleurs, les fonctions U et V intervenant dans l'équation (4.18) sont données par

$$U = -\frac{3}{2} \frac{1}{r - s} tB + \frac{B}{2} \frac{\partial t}{\partial s} - \frac{t}{2} \frac{\partial B}{\partial s},$$

$$V = \frac{3}{2} \frac{1}{r - s} tB + \frac{B}{2} \frac{\partial t}{\partial r} - \frac{t}{2} \frac{\partial B}{\partial r}.$$

La solution est assez simple à trouver une fois qu'on a bien ordonné les termes

$$t(\xi, \eta) = \frac{1}{2}t(P)B[P; M] + \frac{1}{2}t(Q)B[Q; M] - \int_P^{B_*} Vdr + \int_Q^{B_*} Uds,$$

or

$$\int_P^{B_*} Vdr = -\frac{1}{2}[tB]_P^{B_*} + \int_P^{B_*} B \left(\frac{3}{2} \frac{t}{r - s} + \frac{\partial t}{\partial r} \right) dr,$$

$$\int_Q^{B_*} Uds = -\frac{1}{2}[tB]_Q^{B_*} + \int_Q^{B_*} B \left(-\frac{3}{2} \frac{t}{r - s} + \frac{\partial t}{\partial s} \right) ds.$$

En remarquant que sur les frontières $P \rightarrow B_*$ et $B_* \rightarrow Q$, on a $t_r = -3t/2/(r-s)$ et $t_s = 3t/2/(r-s)$, on aboutit à la solution suivante (??)

$$t(\xi, \eta) = B(2, -2; \xi, \eta).$$

On peut trouver ensuite x par intégration le long d'une caractéristique ; par exemple le long d'une r caractéristique, on a

$$x(s|r = cste) = \frac{1}{4}(3s+2)t(2, s) + \frac{1}{4} \int_{-2}^s (3r+s') \frac{\partial t}{\partial s} ds'.$$

Les figures 4.16 et 4.15 montrent le diagramme des caractéristiques et les profils de h et u en fonction de x . Pour ces profils, on a réalisé des calculs de t et x pour un domaine de calcul $2 \leq r < 0$ et $2 \leq s < -2$; on a considéré une grille de points (r_i, s_j) dans ce domaine et calcul les x_{ij} et t_{ij} correspondants. Il faut ensuite interpoler les valeurs $x_{ij}(r, s)$ et $t_{ij}(r, s)$; pour calculer $u(x, t)$ à un temps donné $t = t_0$, il suffit alors de se donner une valeur r_k , calculer s_k tel que $t(s_k|r_k) = t_0$; on stocke ensuite $\{x(s_k|r_k), r_k, s_k\}$. Les valeurs h_k et u_k correspondantes sont $h_k = (r_k - s_k)/4$ et $u_k = (r_k + s_k)/2$.

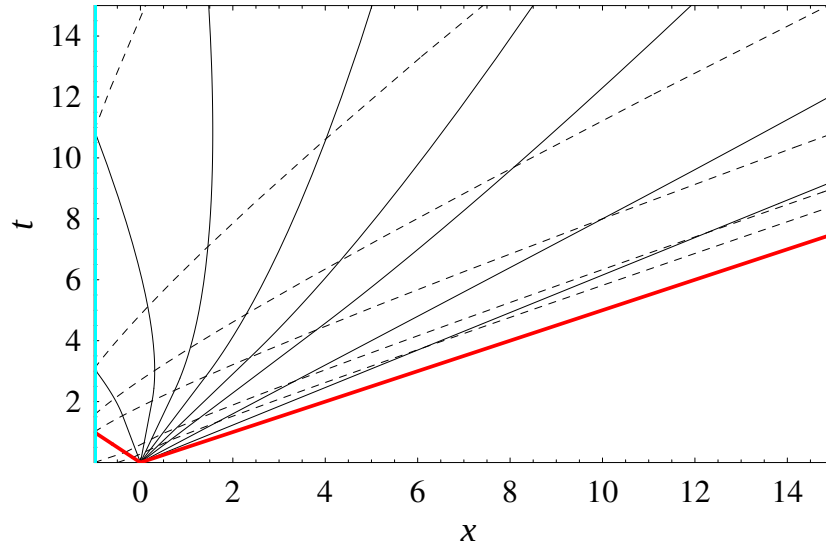


Figure 4.15 : diagramme des caractéristiques. Les s -caractéristiques sont reportées en trait continu ($s = 1,5; 1; 0,5; 0,25; 0; -0,5; -1$). Les r -caractéristiques sont en trait discontinu ($r = 2; 1,5; 0,5$). Les caractéristiques correspondant au front et à la queue de l'écoulement sont reportées en rouge et gras ($s = 2$ et $s = -2$).

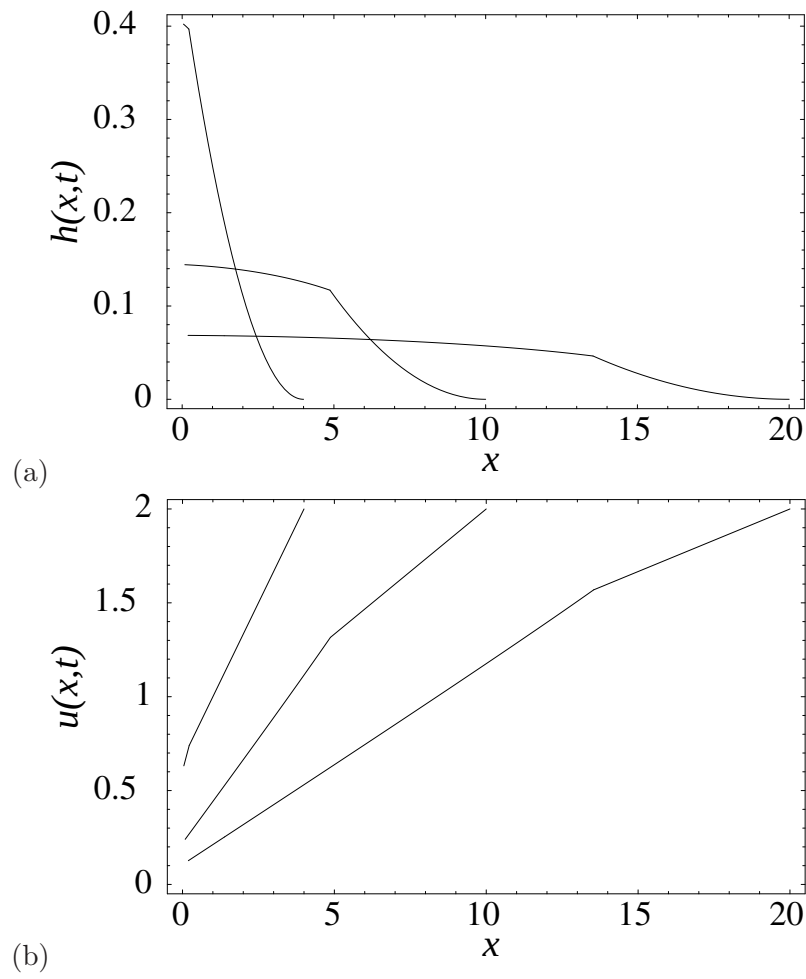


Figure 4.16 : profil $u(x,t)$ et $h(x,t)$ à $t = 2$, $t = 5$ et $t = 10$.

Rupture de barrage de volume fini sur un plan incliné

Considérons un volume fini de fluide. Le mouvement est décrit par les équations de Saint-Venant

$$\frac{\partial}{\partial t}h + \frac{\partial}{\partial x}(hu) = 0, \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u + u \frac{\partial}{\partial x}u + g \cos \theta \frac{\partial}{\partial x}h = g \sin \theta, \quad (4.35)$$

qui peuvent être rendues sous une forme sans dimension à l'aide du changement de variable

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{x}{L_0}, \\ \hat{h} &= \frac{h}{H_0}, \\ \hat{t} &= \sqrt{\frac{g \cos \theta}{H_0}} t, \\ \hat{u} &= \frac{u}{\sqrt{g H_0 \cos \theta}}, \end{aligned}$$

avec H_0 une hauteur caractéristique et $L_0 = H_0$.

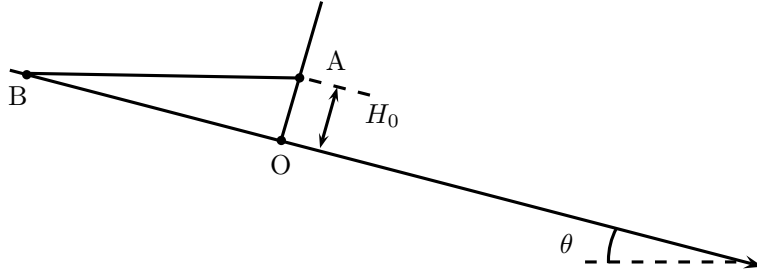


Figure 4.17 : géométrie initiale du barrage.

On alors

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} + \hat{h} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} = 0, \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} = 1. \quad (4.37)$$

Ce système peut se mettre sous la forme matricielle

$$\frac{\partial}{\partial \hat{t}} \mathbf{U} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \mathbf{U} = \mathbf{B},$$

avec

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u \\ c \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} u & h \\ 1 & u \end{bmatrix}, \text{ et } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \tan \theta \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont $\lambda_{\pm} = u \pm \sqrt{h}$. Ce système peut donc se mettre sous la forme caractéristique

$$\frac{du \pm 2c}{dt} = \tan \theta \text{ le long des caractéristiques } \frac{dx}{dt} = u \pm c,$$

avec $c = \sqrt{h}$. Dans le plan physique $x - t$, le demi-plan $t < 0$ correspond à l'état constant $h = h_0(x) = 1 - x/x_b$ et $u = 0$, avec $x_b = -1/\tan \theta$. On sait que l'on va avoir deux frontières mobiles qui délimitent le volume de fluide et qui émanent du point origine :

- une première correspondant au front $h = 0$ et $u = u_f$ (que l'on ne connaît pas encore) ;
- une seconde correspondant à l'onde régressive qui se propage dans le réservoir jusqu'à venir buter contre la fin de celui-ci : $h = h(t)$ (car la profondeur est variable ici) et $u = 0$.

Les deux caractéristiques associées ont donc pour équation : $dx/dt = u$ (front) et $dx/dt = -c$ (queue). Pour le front, on a de plus $du/dt = \tan \theta$, donc $u = t \tan \theta + 2$ car $t = 0$, on a $u = 2$ comme condition initiale² ; on déduit que $x = t^2 \tan \theta / 2 + 2t$ est la caractéristique C_+ recherchée.

Pour la queue, on a $d(-2c)/dt = \tan \theta$, ce qui donne $c = -\frac{\tan \theta}{2}t + 1$ car à $t = 0$, on a $c = 1$, donc en reportant dans l'équation caractéristique on déduit que $x = \frac{\tan \theta}{4}t^2 - t$. Dans le système de coordonnées adimensionnelles, l'abscisse marquant la fin de la retenue est $x_b = -\cotan \theta$; ce point est atteint par l'onde régressive émanant de O à l'instant $t = 2\cotan \theta$.

Une fois que la fin du réservoir est atteinte, une nouvelle onde (BC) émane du point B avec $h = 0$ ($c = 0$). Au point B, on a $x = x_b$, $t = t_b = 2\cotan \theta$, et $u = 0$. Donc l'intégration de $du/dt = \tan \theta$ donne $u = \tan \theta(t - t_b) = t \tan \theta - 2$, puis une nouvelle intégration donne

$$x = \tan \theta \left(\frac{1}{2}t^2 - tt_b + \frac{t_b^2}{2} \right) + x_b.$$

Afin de faire disparaître l'accélération de la gravité, qui rend les équations non homogènes, on procède à un nouveau changement de variables

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} &= \hat{x} - \frac{\tan \theta}{2} \hat{t}^2 \text{ et } \tilde{t} = \hat{t}, \\ \tilde{w} &= u - t \tan \theta \text{ et } \tilde{h} = \hat{h}, \end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial \hat{x}}, \\ &= \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}}, \\ \frac{\partial}{\partial \hat{t}} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial \hat{t}}, \\ &= -t \tan \theta \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}, \end{aligned}$$

on tire le jeu d'équations

$$\begin{aligned} \partial_t h + w \partial_\xi h + h \partial_\xi w &= 0, \\ \partial_t w + w \partial_\xi w + h \partial_\xi h &= 0, \end{aligned}$$

où l'on a enlevé les tildes sur les variables.

2. C'est la vitesse initiale dans le cas $\theta = 0$. La rupture de barrage induit en effet une accélération infinie à $t = 0$ et donc on a $u = 2$. Voir la résolution du cas $\theta = 0$ au § ?? ainsi qu'à l'exemple précédent.

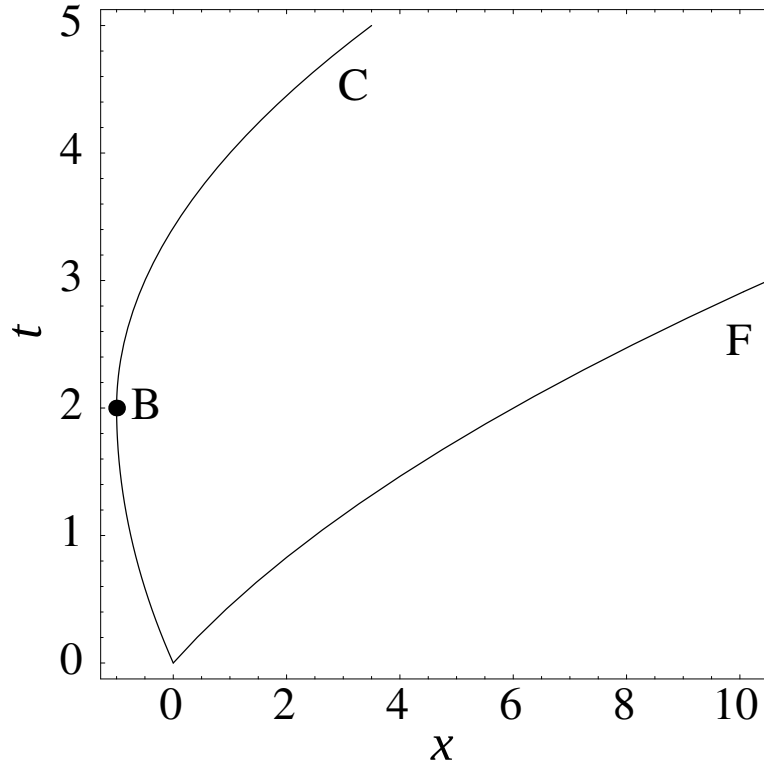


Figure 4.18 : caractéristiques de la queue et du front de l'écoulement.

Tableau 4.1 : caractéristiques des frontières du domaine d'écoulement.

	c	u	w	ξ	r	s
OF	0	$t \tan \theta + 2$	2	$2t$	2	2
OB	$1 - t \tan \theta / 2$	0	$-t \tan \theta$	$-t^2 \tan \theta / 4 - t$	$2(1 - t \tan \theta)$	-2
BC	0	$\tan \theta (t - t_b)$	-2	$-2t + \cotan \theta$	-2	-2

Tableau 4.2 : caractéristiques des frontières du domaine d'écoulement.

	x	domaine de de t
OF	$t^2 \tan \theta / 2 + 2t$	$t \geq 0$
OB	$t^2 \tan \theta / 4 - t$	$0 \leq t \leq 2 \cotan \theta$
BC	$\tan \theta (\frac{1}{2}t^2 - tt_b) + \cotan \theta$	$t \geq 2 \cotan \theta$

D'après la méthode de Riemann [voir équation (4.18) et la figure 4.20], la solution s'écrit pour un point M (ξ, η)

$$t(\xi, \eta) = \frac{1}{2}t(P)B[P; M] + \frac{1}{2}t(Q)B[Q; M] + \int_P^Q (Uds - Vdr),$$

où B est la fonction de Riemann trouvée précédemment [voir équation (4.19) avec $\lambda = 3$, $x = r$ et $y = -s$]. On a

$$B(r, s; \xi, \eta) = \frac{(r-s)^3}{(r-\eta)^{3/2}(s-\xi)^{3/2}} F\left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1, \frac{(r-\xi)(s-\eta)}{(r-\eta)(s-\xi)}\right].$$

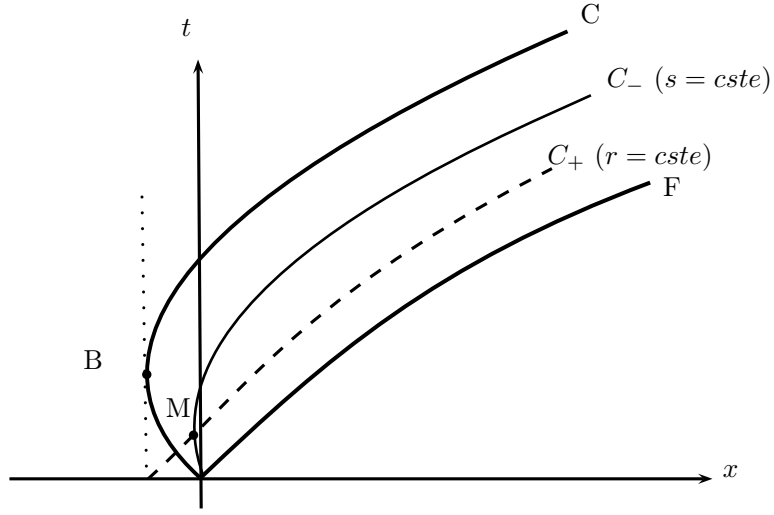
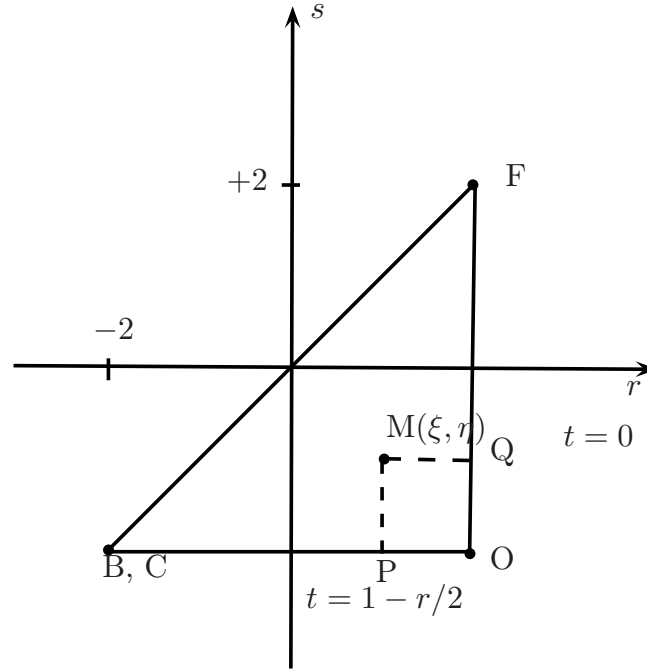


Figure 4.19 : caractéristiques de la queue et du front de l'écoulement.

Figure 4.20 : domaine de calcul dans le plan $r - s$ pour $\theta = \pi/4$.

Par ailleurs, les fonctions U et V intervenant dans l'équation (4.18) sont données par

$$U = -\frac{3}{2} \frac{1}{r-s} tB + \frac{B}{2} \frac{\partial t}{\partial s} - \frac{t}{2} \frac{\partial B}{\partial s},$$

$$V = \frac{3}{2} \frac{1}{r-s} tB + \frac{B}{2} \frac{\partial t}{\partial r} - \frac{t}{2} \frac{\partial B}{\partial r}.$$

La solution peut s'arranger de la façon suivante

$$t(\xi, \eta) = \frac{1}{2} t(P) B[P; M] + \frac{1}{2} t(Q) B[Q; M] + \int_P^O V dr + \int_Q^O U ds,$$

or

$$\begin{aligned}\int_P^O V dr &= -\frac{1}{2}[tB]_P^O + \int_P^O B \left(\frac{3}{2} \frac{t}{r+2} + \frac{\partial t}{\partial r} \right) dr, \\ \int_Q^O U ds &= -\frac{1}{2}[tB]_Q^O + \int_P^O B \left(-\frac{3}{2} \frac{t}{2-s} + \frac{\partial t}{\partial s} \right) ds = 0.\end{aligned}$$

En remarquant que sur les frontières $P \rightarrow O$ et $O \rightarrow Q$, on a respectivement $t_r = -\cotan\theta/2$ et $t_s = 0$, on aboutit à la solution suivante

$$t(\xi, \eta) = \cotan\theta \int_2^\xi B(r, -2; \xi, \eta) \frac{2-5r}{4(r+2)} dr.$$

On peut trouver ensuite x par intégration le long d'une caractéristique ; par exemple le long d'une s -caractéristique, on a

$$x(r|s = cste) = \frac{1}{4}(3s + r)t(r, s) + \frac{1}{4} \int_r^2 t(r', s) dr',$$

qui s'obtient par intégration par partie de l'équation (4.29) et en tenant compte que $x = 0$ à $t = 0$.

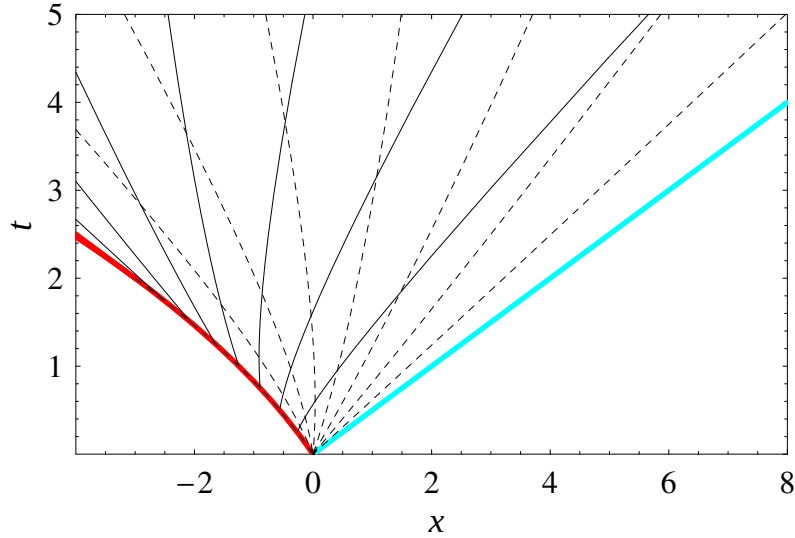


Figure 4.21 : caractéristiques dans le plan $\xi - t$. Les r -caractéristiques sont reportées en trait continu et pour les valeurs $r = 2$ à $r = -2$ avec un pas de 0,5 ; Les s -caractéristiques sont reportées en trait discontinu et pour les valeurs $s = 2$ à $s = -2$ avec un pas de 0,5. Le trait rouge représente la queue de l'écoulement ; le trait bleu représente le front.

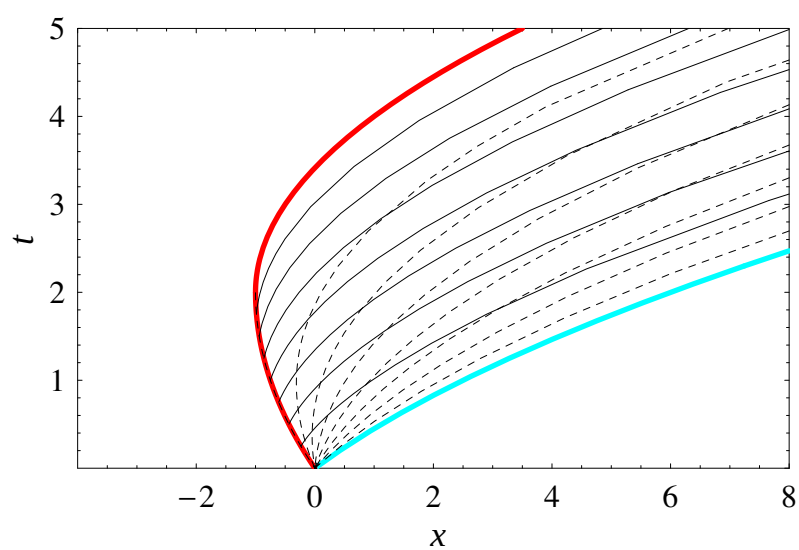


Figure 4.22 : caractéristiques dans le plan $x - t$.

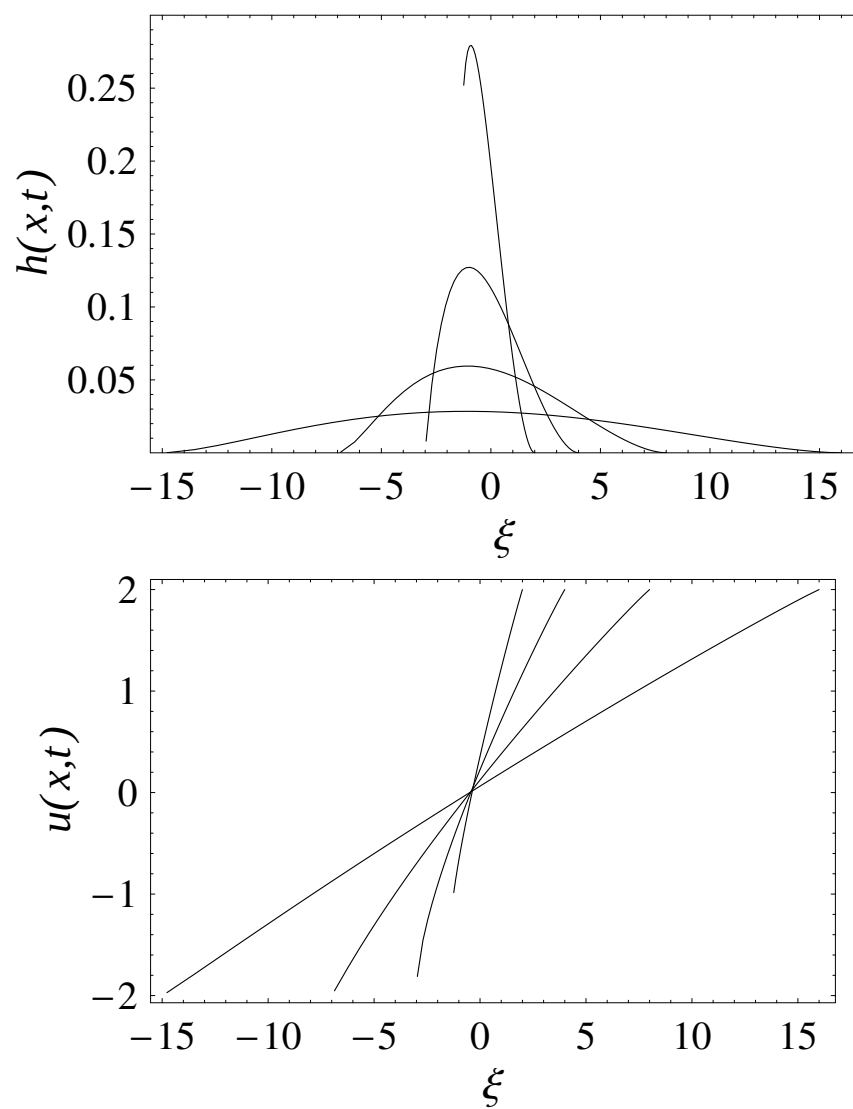


Figure 4.23 : profil de vitesse et de hauteur dans le plan $\xi - t$.

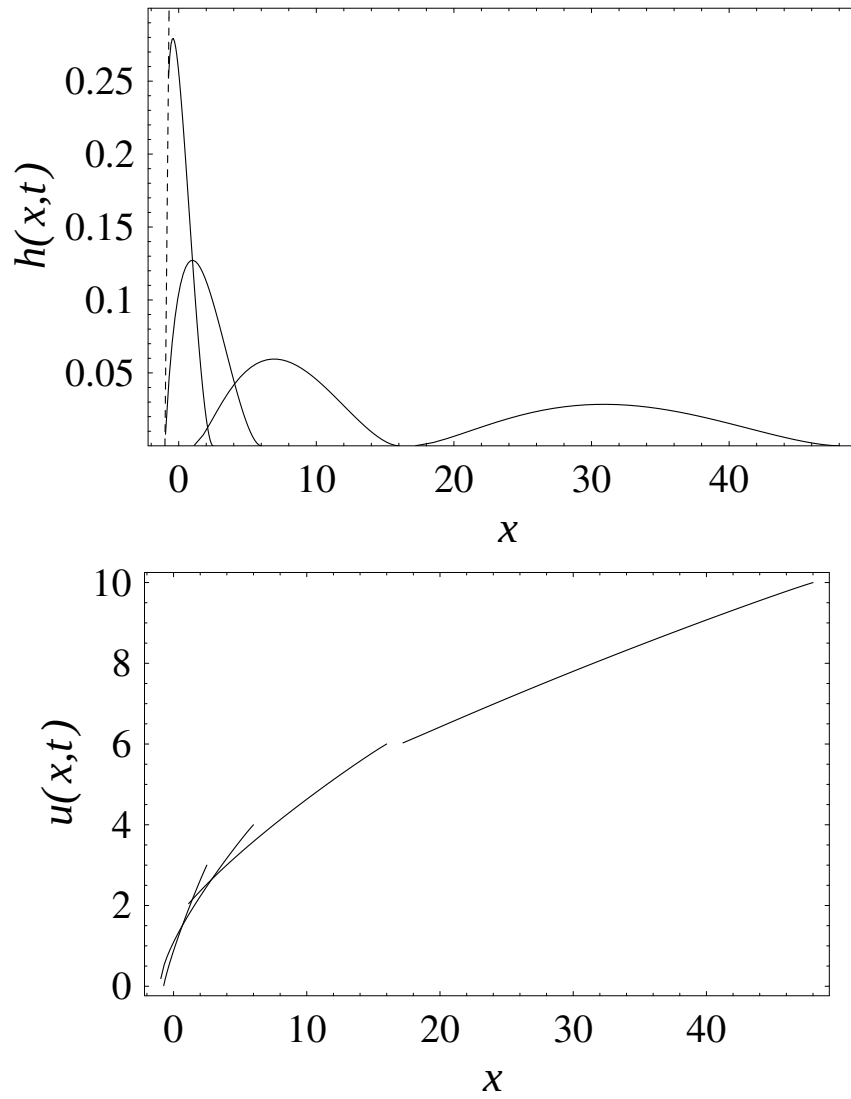


Figure 4.24 : profil de vitesse et de hauteur dans le plan $x - t$.

Les équations différentielles et leurs symétries

Parmi les méthodes analytiques pour obtenir des solutions à des problèmes différentiels, la recherche des symétries est sans doute la méthode la plus élégante et la plus efficace. Développée par le mathématicien Lie à la fin du XIX^e siècle, cette approche nécessite un bagage mathématique important et pas mal de manipulations algébriques, ce qui explique qu'elle soit tombée en désuétude au cours du XX^e siècle, surtout à cause du développement des ordinateurs auxquels aucune équation différentielle ne semblait pouvoir résister. La réalité est un peu différente et au cours des trente dernières années, on a assisté à un nouvel essor des méthodes analytiques. Ce sont principalement les solutions dites *auto-similaires* qui ont attiré l'attention à cause de leur rôle essentiel pour la bonne compréhension des phénomènes physiques de propagation (???) ; ces solutions peuvent être trouvées par des arguments dimensionnels, mais également – et de façon plus complète – par la recherche de symétrie de type « étirement ». C'est là la grande force de l'approche développée : c'est une approche très générale qui cherche à déterminer et à exploiter les transformations qui peuvent laisser une équation différentielle invariante. *Invariance* et *transformation* sont donc les deux maîtres-mots de cette approche.

?, ?, ?, ?, ?, et ? ont publié des ouvrages de référence sur ce thème, auxquels on peut se référer pour plus d'information. ? et ? ont fourni également un *package* fonctionnant sous Mathematica qui permet de faire les calculs de façon relativement simple (c'est l'une des principales difficultés de l'approche).

5.1 Définition : groupe de transformation à un paramètre

Nous commençons par introduire la notion de groupe de transformation et les conditions pour qu'une courbe ou une familles de courbes soit invariante sous l'action d'une transformation. Ces notions serviront par la suite pour construire une méthodologie de recherche des symétries pour les équations différentielles.

Il existe un grand nombre de types de transformation. Parmi les plus utilisées sont

- les transformations ponctuelles, par exemple une réflexion par rapport à l'axe x : $(x, y) \rightarrow (x, -y)$;
- les transformations à un paramètre qui dépendent continûment d'un paramètre, par exemple une rotation d'angle θ : $(r, \alpha) \rightarrow (r, \alpha + \theta)$.

On traite ici de ces dernières.

5.1.1 Généralités

Il est souvent utile d'introduire des transformations de la forme :

$$x' = A(x, y; \lambda), \quad (5.1)$$

$$y' = B(x, y; \lambda), \quad (5.2)$$

qui dépendent continûment d'un paramètre λ . Quand une telle transformation vérifie les trois propriétés suivantes :

1. deux transformations successives sont équivalentes à une transformation de la même forme,
2. il existe une valeur de λ pour laquelle cette transformation est égale à l'opérateur *identité*,
3. il existe une transformation inverse,

alors elle constitue un *groupe*; ici puisqu'il n'y a qu'un seul paramètre, il s'agit d'un *groupe à un paramètre*.

On note λ_0 la valeur de λ pour laquelle la transformation coïncide avec l'opérateur identité. En faisant un développement limité au premier ordre, on obtient :

$$x' = x + \xi(\lambda_0 - \lambda), \quad (5.3)$$

$$y' = y + \eta(\lambda_0 - \lambda), \quad (5.4)$$

où l'on a introduit : $\xi = (\partial A / \partial \lambda)_{\lambda=\lambda_0}$ et $\eta = (\partial B / \partial \lambda)_{\lambda=\lambda_0}$, les coefficients de la *transformation infinitésimale* (linéarisation du changement de variable). On parle aussi de *champ vectoriel*.

◇ **Le théorème fondamental de Lie est qu'il est équivalent de connaître (travailler avec) le groupe ou sa représentation infinitésimale.**

5.1.2 Orbites et courbes invariantes

On introduit aussi la notion d'*orbite*. C'est le lieu des points reliés au point (x, y) qui sont obtenus en faisant varier le paramètre λ depuis la valeur λ_0 ; c'est donc la trajectoire d'un point quand λ varie. C'est aussi le lieu des points invariants par toute transformation puisque point source et point image doivent se trouver sur la même courbe. Si on prend l'exemple d'une rotation centrée en O d'angle θ , l'orbite passant le point (x, y) est un cercle de rayon r (avec r tel que $r^2 = x^2 + y^2$).

Par définition, l'incrément entre le point image et le point source est donné par : $(dx, dy) = d\lambda(\xi, \eta)$. L'orbite a donc pour équation dans le plan (x, y) :

$$\boxed{\frac{dx}{\xi(x, y)} = \frac{dy}{\eta(x, y)} = d\lambda.} \quad (5.5)$$

On parle d'*invariant du groupe* pour désigner une fonction $u(x, y)$ telle que $u(x', y') = u(x, y)$. Par différentiation par rapport à λ , on tire que u doit nécessairement vérifier l'équation suivante :

$$\xi(x, y)u_x + \eta(x, y)u_y = 0. \quad (5.6)$$

On écrit cette équation sous la forme abrégée

$$\Gamma u = 0,$$

avec $\Gamma = \xi \partial_x + \eta \partial_y$ le *générateur infinitésimal* ou *opérateur du groupe*.

L'équation caractéristique associée est :

$$\boxed{\frac{dx}{\xi(x, y)} = \frac{dy}{\eta(x, y)} = \frac{du}{0}} \quad (5.7)$$

Une intégrale première de l'équation caractéristique correspond à l'orbite définie précédemment. Toute fonction (arbitraire) prenant valeur sur l'orbite est nécessairement un invariant. Cet invariant définit une courbe qui est invariante par la transformation : points source et image sont sur la même courbe. Quand on généralise à un espace de dimension n , on va former un système caractéristique en écrivant la condition d'invariance $\Gamma u = 0$, ce qui permet de définir $n - 1$ intégrales premières, donc $n - 1$ courbes invariantes (en fait, $n - 1$ familles de courbes invariantes). Chacune de ces courbes est individuellement invariante.

Nous allons voir juste après que cette invariance individuelle peut être relâchée : on peut trouver des familles de courbes qui sont invariantes globalement, c'est-à-dire la transformée d'une courbe est une courbe de la même famille. S'il est possible de représenter paramétriquement une telle famille de courbes par une équation de la forme $\phi(x, y) = c$, alors il faut que $\phi(x', y') = c'$. Par différentiation, on montre qu'une telle fonction doit vérifier l'équation différentielle :

$$\xi(x, y)\phi_x + \eta(x, y)\phi_y = 1, \quad (5.8)$$

dont l'équation caractéristique s'écrit :

$$\boxed{\frac{dx}{\xi(x, y)} = \frac{dy}{\eta(x, y)} = \frac{d\phi}{1}} \quad (5.9)$$

La valeur unitaire dans le membre de droite est arbitraire, on aurait pu prendre n'importe quelle constante non nulle comme condition¹. Il y a deux intégrales premières à cette équation caractéristique : l'une, obtenue par exemple avec les deux membres de gauche, donne $x = \int \xi(x, y)/\eta(x, y)dy + c(y)$, où $c(y)$ est une fonction arbitraire de y ; l'autre, obtenue avec les deux membres de droite, fournit : $\phi = \int dy/\eta(x, y) + e(x)$ avec $e(x)$ une fonction arbitraire de x .

Un point invariant est relié à lui-même si pour toute transformation (c'est-à-dire quelle que soit la valeur de λ), son point image coïncide avec lui. Cela n'est possible que si $\xi(x, y) = \eta(x, y) = 0$.

♣ **Exemple.** – Considérons le groupe « extension » :

$$x' = \lambda x, \quad (5.10)$$

$$y' = \lambda^\beta y, \quad (5.11)$$

qui constitue bien un groupe ($\lambda_0 = 1$). Les coefficients sont : $\xi = x$, $\eta = \beta y$. Il s'ensuit que l'orbite de ce groupe est donnée par :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{\beta y}.$$

1. Voir (? , pp. 6-7)

L'intégrale première est $p = y/x^\beta$. Toute fonction $F(p)$ est un invariant du groupe. Les familles de courbes invariantes sont données par :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{\beta y} = \frac{d\psi}{1},$$

dont les intégrales premières sont p et $\psi = \ln y^{1/\beta} + c(p)$, avec c une fonction arbitraire de p . $\square$

Le tableau 5.1 récapitule les définitions des orbites et courbes invariantes d'un groupe.

Tableau 5.1 : définition d'une orbite et d'une courbe invariante.

Nom	Définition	Équation
orbite	lieu des images d'un point (x, y) quand on fait varier λ	$\Gamma\Psi = 1$
courbe invariante	courbe qui a pour image elle-même	$\Gamma\Psi = 0$
famille invariante	l'image d'une courbe est une autre courbe de la même famille	$\Gamma\Psi = 1$
point invariant	point dont l'image est lui-même	$\xi = \eta = 0$

5.1.3 Générateur infinitésimal

L'opérateur différentiel

$$\Gamma = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}$$

est l'opérateur du groupe (ou générateur infinitésimal) et Γf est la dérivée de Lie de f . Une série de Lie peut être définie sous une forme condensée en utilisant l'application exponentielle :

$$f(x', y') = f(x, y) + s\Gamma f + \frac{s^2}{2!}\Gamma(\Gamma f) + \cdots = e^{s\Gamma} f(x).$$

L'avantage de cette formulation est de remplacer une transformation non linéaire par une série de transformations linéaires infinitésimales.

La connaissance de l'opérateur Γ (ou des coefficients infinitésimaux) permet de reconstruire la transformation puisque $\mathbf{x}' = e^{s\Gamma} \mathbf{x}$ (appelée *série de Lie*).

♣ **Exemple.** – Considérons la transformation $(\xi, \eta) = (-y, x)$. On a $\Gamma x = -y$, $\Gamma(\Gamma x) = -x$, $\Gamma^3 x = y$, etc. On montre alors qu'on a la série suivante :

$$x' = x \left(1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{4!} + \cdots \right) - y \left(s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + \cdots \right) = x \cos s - y \sin s.$$

En faisant de même avec y' , on trouve qu'il s'agit du groupe rotation. $\square$

Le tableau 5.2 fournit les principaux groupes de transformation.

Tableau 5.2 : définition des principaux groupes de transformation ponctuelle.

nom	variable x'	variable y'	générateur
translation	$x' = x + s$	$y' = y$	$X = \partial_x$
rotation	$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$	$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$	$X = y \partial_x - x \partial_y$
extension	$x' = sx$	$y' = s^\beta y$	$X = x \partial_x + \beta y \partial_y$

5.1.4 Prolongation d'un générateur infinitésimal

Une question qui se pose est la suivante : « est-ce que le groupe conserve la pente d'une courbe ? ». Considérons la forme infinitésimale d'un incrément :

$$dx' = dx + d\xi(\lambda_0 - \lambda), \quad (5.12)$$

$$dy' = dy + d\eta(\lambda_0 - \lambda). \quad (5.13)$$

La pente de la courbe image est donc :

$$\dot{y}' = \frac{dy'}{dx'} = \frac{\frac{dy}{dx} + \frac{d\eta}{dx}(\lambda_0 - \lambda)}{1 + \frac{d\xi}{dx}(\lambda_0 - \lambda)}. \quad (5.14)$$

Au premier ordre on tire :

$$\dot{y}' = \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx} + \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{dy}{dx} \frac{d\xi}{dx} \right) (\lambda_0 - \lambda). \quad (5.15)$$

On note $\eta_1 = d\eta/dx - \dot{y}d\xi/dx$, avec $d\eta/dx = \eta_x + \eta_y \dot{y}$ et $d\xi/dx = \xi_x + \xi_y \dot{y}$. Les dérivées images d'ordre supérieur s'obtiennent de même par récurrence :

$$\boxed{\eta_{k+1} = \frac{d\eta_k}{dx} - y^{(k+1)} \frac{d\xi}{dx}}, \quad (5.16)$$

que l'on peut noter sous la forme condensée :

$$\boxed{\eta_{k+1} = D_x \eta_k - y^{(k+1)} D_x \xi},$$

avec $D_x = x \partial_x + \dot{y} \partial_y + \dots$, qui est une notation abrégée de l'opérateur différentiel total. La transformation :

$$x' = x + \xi(\lambda_0 - \lambda), \quad (5.17)$$

$$y' = y + \eta(\lambda_0 - \lambda), \quad (5.18)$$

$$\dot{y}' = \dot{y} + \eta_1(\lambda_0 - \lambda) \quad (5.19)$$

constitue le groupe *une fois étendu*. On peut étendre le groupe n fois en incluant les dérivées d'ordre n . Un invariant $u(x, y, \dot{y})$ de ce groupe est défini comme étant $u(x, y, \dot{y}) = u(x', y', \dot{y}')$. Par différentiation, on obtient que u vérifie l'équation :

$$\xi u_x + \eta u_y + \eta_1 u_{\dot{y}} = 0,$$

dont les équations caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{\xi(x, y)} = \frac{dy}{\eta(x, y)} = \frac{d\dot{y}}{\eta_1(x, y, \dot{y})}. \quad (5.20)$$

Il existe plusieurs applications intéressantes, notamment l'optimisation du changement de variable pour qu'une équation différentielle devienne à variable séparable et la recherche de groupe rendant invariante une équation différentielle.

5.1.5 Prolongation du groupe pour des symétries ponctuelles

Notons que nous nous sommes restreints ici aux groupes de Lie, vus comme des transformations ponctuelles. On peut déterminer de manière plus générale pour toute transformation la condition de symétrie. Considérons un difféomorphisme quelconque :

$$\Gamma : (x, y) \rightarrow (\hat{x}, \hat{y}). \quad (5.21)$$

La transformée d'une courbe plane continue est une courbe plane continue. Γ agit également sur les dérivées $y^{(k)}$:

$$\Gamma : (x, y, y', \dots y^{(n)}) \rightarrow (\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}', \dots \hat{y}^{(n)}), \quad (5.22)$$

où :

$$\hat{y}^{(k)} = \frac{d^k \hat{y}}{d\hat{x}^k}$$

Comme précédemment, on appelle *k-prolongation* cette relation. On peut calculer de manière itérative la dérivée :

$$y^{(k)} = \frac{d\hat{y}^{(k-1)}}{d\hat{x}^k} = \frac{d\hat{y}^{(k-1)}}{dx} \frac{dx}{d\hat{x}^k} = \frac{D_x \hat{y}^{(k-1)}}{D_x \hat{x}^k},$$

où D_x est l'opérateur différentiel total² par rapport à x :

$$D_x = \partial_x + y' \partial_y + \dots + y^{(n)} \partial_{y^{(n-1)}}.$$

La condition de symétrie s'exprime ainsi :

« l'équation différentielle $y^{(n)} = \omega(x, y, y', \dots y^{(n-1)})$ est invariante vis-à-vis de la transformation Ω si $\hat{y}^{(n)} = \omega(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}', \dots \hat{y}^{(n-1)})$. Inversement Γ est dit constituer une symétrie de l'équation différentielle. »

Par exemple, si on a :

$$\begin{aligned} \hat{x} &= F(x, y), \\ \hat{y} &= G(x, y), \end{aligned}$$

alors, on a :

$$\begin{aligned} d\hat{x} &= dF(x, y) = \partial_x F dx + \partial_y F dy, \\ d\hat{y} &= dG(x, y) = \partial_x G dx + \partial_y G dy, \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \frac{\partial_x G dx + \partial_y G dy}{\partial_x F dx + \partial_y F dy} = \frac{D_x G}{D_x F},$$

avec $D_x = \partial_x + y_x \partial_y$. Une équation différentielle du premier ordre $y' = \omega(x, y)$ est invariante par rapport à $\Gamma = (F, G)$ si $\hat{y}' = \omega(\hat{x}, \hat{y})$. On dit que $G_{\{1\}}(x, y, y') = D_x G / D_x F$ est le *groupe étendu une fois*.

Si on pousse à l'ordre 2, on a :

$$\frac{d^2 \hat{y}}{d\hat{x}^2} = \frac{d\hat{y}_{\hat{x}}}{d\hat{x}} = \frac{\partial_x G_{\{1\}} dx + \partial_y G_{\{1\}} dy + \partial_y' G_{\{1\}} dy'}{\partial_x F dx + \partial_y F dy} = \frac{D_x G_{\{1\}}}{D_x F} = G_{\{2\}}(x, y, y', y'').$$

2. À propos des problèmes de notation, voir ?, pp. 193, 552–555

Ces résultats peuvent se généraliser pour d'autres ordres ainsi que pour des groupes faisant intervenir d'autres variables.

♣ **Exemple.** – Considérons la transformation :

$$\Gamma : (\hat{x}, \hat{y}) = \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x} \right).$$

On montre que c'est une symétrie pour l'équation différentielle $y'' = 0$. On a :

$$\hat{y}' = \frac{D_x \hat{y}}{D_x \hat{x}} = \frac{-y/x^2 + y'/x}{-1/x^2} = y - xy',$$

$$\hat{y}'' = \frac{D_x y - xy'}{D_x \hat{x}} = x^2 y'',$$

d'où $\hat{y}'' = 0$ quand $y'' = 0$. $\square$

Les groupes de Lie constituent un cas particulier d'application puisqu'on s'intéresse à des déformations infinitésimales, ce qui revient à écrire pour un paramètre s petit :

$$G_{\{p\}} = y^{(p)} + s\eta_{\{p\}} \text{ et } F = x + s\xi.$$

On déduit par récurrence :

$$\boxed{\eta_{\{p\}} = D_x \eta_{\{p-1\}} - y^{(p)} D_x \xi,}$$

à confronter avec l'éq. (5.16).

La force des groupes de Lie est qu'ils reposent sur une transformation infinitésimale, ce qui simplifie les calculs grandement (on n'est pas obligé comme dans l'exemple plus haut de calculer chaque dérivée et de vérifier la condition d'invariance à la main). Quand on va chercher à vérifier l'invariance d'une équation différentielle $y^{(n)} = \omega(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, on introduit la transformation :

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x + s\xi + O(s^2), \\ \hat{y} &= y + s\eta + O(s^2), \\ \hat{y}^{(k)} &= y^{(k)} + s\eta_{\{k\}} \text{ pour } 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Si l'on reporte dans l'équation $\hat{y}^{(n)} = \omega(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}', \dots, \hat{y}^{(n-1)})$, puis par un développement limité à l'ordre 1, on tire :

$$\eta_{\{n\}} = \xi\omega_x + \eta\omega_y + \eta_{\{1\}}\omega_{y'} + \dots + \eta_{\{n-1\}}\omega_{y^{(n-1)}} \quad (5.23)$$

pour que l'équation soit invariante. On appelle cette équation la condition de *symétrie linéarisée*. On l'écrit souvent sous une forme condensée en introduisant le *générateur infinitésimal prolongé* (n fois) :

$$X_{\{n\}} = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \eta_{\{1\}}\partial_{y'} + \dots + \eta_{\{n\}}\partial_{y^{(n)}}. \quad (5.24)$$

On vérifie alors que la condition d'invariance s'énonce simplement :

$$\boxed{X_{\{n\}} \left(y^{(n)} - \omega(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \right) = 0.} \quad (5.25)$$

5.2 Applications

5.2.1 Première application : le changement de variable

On introduit le changement de variables suivant :

$$\hat{x} = F(x, y), \quad (5.26)$$

$$\hat{y} = G(x, y). \quad (5.27)$$

Les nouvelles coordonnées d'une image sont :

$$\hat{x} = F(A(x, y; \lambda), B(x, y; \lambda)), \quad (5.28)$$

$$\hat{y} = G(A(x, y; \lambda), B(x, y; \lambda)). \quad (5.29)$$

Il s'ensuit que les coefficients de la transformation infinitésimale sont :

$$\hat{\xi} = F_x \xi + F_y \eta = XF = X\hat{x}, \quad (5.30)$$

$$\hat{\eta} = G_x \xi + G_y \eta = XG = X\hat{y}, \quad (5.31)$$

où X désigne l'opérateur différentiel $X = \xi \partial / \partial x + \eta \partial / \partial y$, appelé encore *générateur infinitésimal*. Le changement de variable dans le générateur X s'avère donc aisé.

Il existe plusieurs manières de rendre une équation différentielle de la forme $u(x, y, \dot{y}) = 0$ à variable séparable³. Par exemple, si l'on est capable de choisir F et G telles que $\hat{\xi} = 0$ et $\hat{\eta} = 1$, alors $\hat{\eta}_1 = 0$ et $u_{\hat{y}} = 0$. Les quantités $\hat{x}$ et $\hat{y}$ deviennent des intégrales indépendantes de l'équation caractéristique (5.20) : $\hat{y} = H(\hat{x})$, avec H une fonction arbitraire. Pour arriver à cela il faut résoudre :

$$F_x \xi + F_y \eta = 0, \quad (5.32)$$

$$G_x \xi + G_y \eta = 1, \quad (5.33)$$

sous la réserve que $F_x G_y - F_y G_x \neq 0$. On dit alors que les variables $(\hat{x}, \hat{y})$ sont des *variables canoniques*.

À noter que :

- ce résultat a une portée plus générale. Toute équation différentielle du premier ordre de la forme $\dot{y} = f(x, y)$ qui est invariante par le groupe translation $(x, y) \rightarrow (x, y + \lambda)$ permet d'aboutir à une équation différentielle à variable séparable après un changement de coordonnées convenable.
- le fait que $\hat{\xi} = 0$ (soit encore $X\hat{x} = 0$) implique que F est un invariant du groupe. Le changement de coordonnées revient en un point donné (x, y) à introduire des nouvelles coordonnées dites *canoniques* telles que $\hat{x}$ soit sur l'orbite et $\hat{y}$ soit transversale à l'orbite (à condition, bien sûr, que le point ne soit pas invariant).

Ce résultat se généralise à des problèmes à n dimensions. Considérons que l'on ait un opérateur infinitésimal $X = \xi^j \partial / \partial x^j$. On peut lui associer un système d'équations caractéristiques, dont la résolution nous donne $n - 1$ intégrales premières, c'est-à-dire $n - 1$ courbes invariantes R^i

3. On parle d'équation différentielle à variable séparable quand en partant de l'équation originelle de la forme $\dot{y} = f(x, y)$, on arrive par un changement de variable approprié à la forme $\dot{y}' = g(x')$, qui est directement intégrable : $y(x) = \int g(x) dx$.

(avec $1 \leq i \leq n-1$). Définissons une $n^{\text{ième}}$ courbe R^n telle que : $X(R^n) = 1$ (R^n définit une famille de courbes invariante globalement. Si on introduit de nouvelles variables :

$$\begin{aligned} r &= R^i(\mathbf{x}) \text{ pour } i = 1, \dots, n-1, \\ r^n &= R^n(\mathbf{x}) + s, \end{aligned}$$

alors le groupe opérateur s'exprime comme $X = \partial/\partial r^n$ dans ce nouveau système de coordonnées. Tout groupe de Lie peut s'exprimer comme une simple translation dans un repère approprié.

♣ **Exemple.** – Considérons l'équation :

$$\dot{y} = -\frac{y(y^2 - x)}{x^2}.$$

Si on applique le groupe « extension », on a :

$$\frac{\dot{y}'}{\lambda^{\beta-1}} = -\frac{y'(y'^2/\lambda^{2\beta} - x'/\lambda)}{\lambda^{\beta-2}x'^2},$$

qui n'est identique à la première équation que sous la condition : $\beta = 1/2$. Ce qui donne : $\xi = x$, $\eta = y/2$, et $\eta_1 = -\dot{y}/2$. On veut maintenant rechercher les fonctions F et G telles que $\hat{\xi} = 0$ et $\hat{\eta} = 1$:

$$\begin{aligned} F_x x + y/2 F_y &= 0, \\ G_x x + y/2 G_y &= 1. \end{aligned}$$

De la première équation, on tire que :

$$\frac{dx}{x} = 2 \frac{dy}{y} = 2 \frac{dF}{0},$$

et de la seconde équation, on obtient :

$$\frac{dx}{x} = 2 \frac{dy}{y} = \frac{dG}{1}.$$

$y/\sqrt{x}$ est une intégrale de la première équation caractéristique et, de la seconde, on tire : $G = \ln y^2 + H(y/\sqrt{x})$ où H est une fonction arbitraire. On la prendra égale à 0. On effectue donc le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} \hat{x} &= F(x, y) = y/\sqrt{x} \\ \hat{y} &= G(x, y) = \ln y^2 \end{aligned}$$

Et inversement :

$$\begin{aligned} x &= e^{\hat{y}/2} / \hat{x}^2, \\ y &= e^{\hat{y}/2}. \end{aligned}$$

On déduit :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\hat{y}}{d\hat{y}/\sqrt{x}} = \frac{e^{-\hat{y}} \hat{x}^3 \hat{y}}{2(2\hat{x}\hat{y} - 2)}$$

D'où en reportant dans l'équation originale :

$$\frac{\hat{x}^3 \hat{y}}{2\hat{x}\hat{y} - 2} = -\hat{x}^2(\hat{x}^2 - 1)$$

soit encore :

$$\hat{y} = 4 \frac{\hat{x}^2 - 1}{\hat{x}} \frac{1}{2\hat{x}^2 - 1}$$

$$\hat{y} = \ln \frac{x^4}{2x^2 - 1} + cte$$

En reprenant les variables d'origine, on obtient :

$$y(x) = \pm \frac{x}{\sqrt{2x + c}}.$$

□

On vient d'introduire la notion importante de *coordonnées canoniques* : $r = r(x, y)$ et $s = s(x, y)$ définissent localement un repère, d'où le nom de coordonnées canoniques. La propriété remarquable de ce repère est que la symétrie est équivalente à une simple translation. Notons aussi que, par définition, puisque $Xr = 0$, r est un invariant du groupe et il est donc tangent à l'orbite du groupe ; on l'appelle aussi *premier invariant fondamental*. De plus, il n'y a pas un unique jeu de coordonnées canoniques : par exemple $(F(r), s + G(r))$ (F et G étant arbitraires mais continues) définissent un jeu de coordonnées canoniques.

Un second invariant fondamental existe, ce qui implique donc un autre changement de variable possible. Il apparaît quand on s'intéresse à la résolution d'équations différentielles, donc lorsqu'on a besoin de manipuler des prolongateurs de groupe. Admettons que l'on veuille résoudre une équation de la forme :

$$y^{(n)} = \omega(x, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}),$$

et que X soit une symétrie de cette équation. Introduisons les coordonnées canoniques r et s et effectuons le changement de variable. On doit avoir quelque chose comme :

$$s^{(n)} = \Omega(r, s, \dot{s}, \dots, s^{(n-1)})$$

Or dans ce nouveau repère, on a : $X = \partial_s$ et $X(s^{(n)} - \Omega) = 0$, d'où Ω_s . On peut donc introduire $v = \dot{s}$ comme nouvelle variable et on a alors :

$$v^{(n-1)} = \Omega(r, v, \dot{v}, \dots, s^{(n-2)}).$$

On peut faire des changements plus intéressants que $v = \dot{s}$; tout changement $v = f(r, \dot{s})$ peut amener à des simplifications. On dit que v est également un *invariant fondamental* ; puisqu'il dépend de $\dot{s}$, on parle d'*invariant fondamental du premier ordre* ou de second invariant fondamental. Notons – et c'est un point important – qu'il n'est pas nécessaire de calculer s pour définir v . En effet, le second invariant apparaît comme étant aussi l'intégrale première du système caractéristique du prolongateur d'ordre 1 :

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dx}{\eta} = \frac{dy'}{\eta^{\{1\}}}$$

Le premier invariant r est déterminé à partir du premier jeu de l'égalité et v en considérant le reste de l'équation. Il n'est pas toujours évident de pouvoir résoudre l'équation caractéristique.

Une astuce qui peut marcher parfois est d'exprimer v en fonction de r comme le montre l'exemple suivant.

♣ **Exemple.** – Considérons le groupe rotation $X = -y\partial_x + x\partial_y$. Les invariants r et v vérifient :

$$Xr = 0 \text{ et } X^{\{1\}}v = 0.$$

r est donc une solution de l'équation caractéristique :

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x},$$

dont la solution est $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. De même, v est donc une solution de l'équation caractéristique :

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dy'}{1 + y'^2}.$$

Or on peut écrire $x = \sqrt{r^2 - y^2}$, donc :

$$\frac{dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \frac{dy'}{1 + y'^2},$$

dont l'intégrale première est $\arctan y' - \arcsin \frac{y}{r}$. v est une fonction arbitraire de cette intégrale première. On peut par exemple prendre la fonction tangente pour simplifier les calculs :

$$v = \tan \left(\arctan y' - \arcsin \frac{y}{r} \right) = \frac{xy' - y}{x + yy'}.$$

□

5.2.2 Seconde application : la méthode du facteur intégrant

Une autre méthode proposée par Lie et exploitant la symétrie par le groupe consiste à rechercher des solutions qui peuvent être représentées paramétriquement par $\psi(x, y) = c$ où c est une constante. Par dérivation, l'équation différentielle est :

$$\psi_x dx + \psi_y dy = 0. \quad (5.34)$$

L'invariance par le groupe implique que ψ doit également vérifier :

$$\xi\psi_x + \eta\psi_y = 1. \quad (5.35)$$

La difficulté est que l'équation différentielle se présente en général sous une forme quelconque :

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Pour revenir à la forme 5.34, il faut que l'on ait : $\psi_x = \mu M$ et $\psi_y = \mu N$. La fonction μ s'appelle le *facteur intégrant*. La substitution dans 5.35 montre que l'on doit avoir :

$$\mu = \frac{1}{\xi M + \eta N}. \quad (5.36)$$

♣ **Exemple.** – Reprenons l'exemple de l'équation : $\dot{y} = -\frac{y(y^2 - x)}{x^2}$ ou sous forme équivalente :

$$y(y^2 - x)dx + x^2 dy = 0.$$

En reprenant les coefficients de la transformation trouvée précédemment, on obtient :

$$\mu = \frac{2}{2xy^3 - x^2y}.$$

On déduit que :

$$\psi_x = \mu M = \frac{2y(y^2 - x)}{2xy^3 - x^2y}.$$

En faisant de même avec ψ_y , on retrouve la solution déterminée précédemment. $\square$

5.2.3 Troisième application : groupes laissant une équation invariante

Il existe une méthode pour déterminer les groupes qui laissent une équation invariante. En effet, pour qu'un groupe laisse invariante une équation différentielle de la forme $F(x, y, \dot{y})$, il faut que $\xi F_x + \eta F_y + \eta_1 F_{\dot{y}} = 0$, soit sous une forme différentielle raccourcie :

$$X^{(1)}F = 0,$$

avec $X^{(1)} = \xi \partial_x + \eta \partial_y + \eta_1 \partial_{\dot{y}}$ le prolongateur d'ordre 1, avec $\eta_1 = \eta_x + \dot{y}\eta_y - \dot{y}(\xi_x + \dot{y}\xi_y)$. Comme cela doit être vrai pour toute valeur de x, y , et $\dot{y}$, il est en général possible de trouver les équations que doivent vérifier les coefficients du groupe.

À noter que cela est vérifié pour les équations d'ordre supérieur. Si on appelle $X^{(k)}$ le générateur infinitésimal prolongé k fois [avec $X^{(k)} = \xi \partial_x + \eta \partial_y + \eta_1 \partial_{\dot{y}} + \eta_k \partial_{y^{(k)}}$], alors pour une équation d'ordre n : $y^{(n)} = \omega(x, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$, un groupe de symétrie laisse l'équation invariante si son générateur infinitésimal vérifie :

$$X^{(n)}(y^{(n)} - \omega(x, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})) = 0.$$

Considérons l'équation du second ordre de la forme :

$$\ddot{y} = \omega(x, y, \dot{y}).$$

On a :

$$\eta_1 = \eta_x + \eta_y \dot{y} - \dot{y}(\xi_x + \xi_y \dot{y}) = \eta_x + (\eta_y - \xi_x) \dot{y} - \xi_y \dot{y}^2,$$

$$\eta_2 = d\eta_1/dx - \ddot{y} d\xi/dx = \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx}) \dot{y} + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) \dot{y}^2 - \xi_{yy} \dot{y}^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y \dot{y}) \ddot{y}.$$

Le générateur infinitésimal 2 fois prolongé s'écrit :

$$X^{(2)} = \xi \partial_x + \eta \partial_y + \left(\eta_x + (\eta_y - \xi_x) \dot{y} - \xi_y \dot{y}^2 \right) \partial_{\dot{y}} + \left(\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx}) \dot{y} + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) \dot{y}^2 - \xi_{yy} \dot{y}^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y \dot{y}) \ddot{y} \right) \partial_{\ddot{y}}.$$

La condition $X^{(2)}(\ddot{y} - \omega) = 0$ donne :

$$\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx}) \dot{y} + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) \dot{y}^2 - \xi_{yy} \dot{y}^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y \dot{y}) \omega = \xi \omega_x + \eta \omega_y + (\eta_x + (\eta_y - \xi_x) \dot{y} - \xi_y \dot{y}^2) \omega_{\dot{y}}.$$



↗ Remarque : dans la manière de construire cette équation, on considère que $x, y, \dot{y}$, et $\ddot{y}$ sont des variables totalement indépendantes, notamment $\partial_x \ddot{y} = 0$. Quoique d'allure complexe, l'équation précédente est en fait plus simple parce que, d'une part, elle est linéaire et d'autre part les coefficients infinitésimaux sont indépendants de $\dot{y}$. L'équation peut donc se

décomposer en une série d'équations aux dérivées partielles élémentaires, appelées *équations déterminantes* en réunissant⁴ les termes devant une puissance de $\dot{y}$.

♣ **Exemple.** – Prenons l'exemple de l'équation très simple $\ddot{y} = 0$ (soit encore $w(w, y, \dot{y}) = 0$). On a alors :

$$\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})\dot{y} + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})\dot{y}^2 - \xi_{yy}\dot{y}^3 = 0.$$

Comme ξ et η sont indépendants de $\dot{y}$, cette équation induit un certain nombre d'équations à vérifier :

$$\eta_{xx} = 0, 2\eta_{xy} = \xi_{xx}, \eta_{yy} = 2\xi_{xy}, \text{ et } \xi_{yy} = 0.$$

D'où on tire : $\eta = A(x)y + B(x)$, puis $\xi = A(x)\dot{y}^2 + C(x)y + D(x)$, où A, B, C, D sont des fonctions arbitraires. En se servant des autres relations, on tire que :

$$\begin{aligned}\xi &= c_1 + c_3x + c_5y + c_7x^2 + c_8xy, \\ \eta &= c_2 + c_4y + c_6x + c_7xy + c_8y^2,\end{aligned}$$

avec c_i des constantes. Le générateur peut se décomposer en :

$$X = \sum c_i X_i,$$

avec $X_1 = \partial_x, X_2 = \partial_y, X_3 = x\partial_x, X_4 = y\partial_y$, etc. $\square$

Comme cela est apparent dans l'exemple ci-dessus, on arrive généralement à décomposer le générateur infinitésimal X en une combinaison de formes élémentaires X_i . Les coefficients de cette combinaison sont les constantes d'intégration qui sont introduites dans la résolution des équations élémentaires. Si on trouve χ constantes, cela veut dire que le générateur appartient à un espace vectoriel $\mathcal{L}$ de dimension χ et de base $(X_i)_{1 \leq i \leq \chi}$. On appelle $\mathcal{L}$ un groupe de Lie à χ paramètres ou encore groupe généré par $\mathcal{L}$. La valeur de la dimension χ dépend de l'ordre n de l'équation différentielle ; on montre que pour $n = 2$, on a $\chi = 0, 1, 2, 3$, ou 8. Pour $n > 2$, on a $\chi \leq n + 4$. Si l'équation est linéaire, alors $\chi \in \{n + 1, n + 2, n + 4\}$.

4. Il existe plusieurs astuces de calcul, voir ?, pp. 51–52.

5.3 Algèbre de Lie

5.3.1 Commutateur

Considérons deux groupes munis de leur opérateur de groupe Γ^a et Γ^b . On définit le commutateur de la façon suivante :

$$\{\Gamma^a, \Gamma^b\} = \Gamma^a(\Gamma^b) - \Gamma^b(\Gamma^a). \quad (5.37)$$

Pourquoi une telle formulation ? Si l'on compose deux opérateurs, on se retrouve avec des dérivées d'ordre 2. Avec la définition du commutateur, on retranche ces dérivées d'ordre 2 et on ne garde que les dérivées d'ordre 1. Le commutateur de dérivées de Lie est donc une dérivée de Lie. Cette opération a également d'autres propriétés qui vont permettre de conférer une structure dite d'*algèbre* à un ensemble d'opérateurs.

5.3.2 Algèbre de Lie

On dispose de r générateurs infinitésimaux $\Gamma^k = \xi^i \partial / \partial x^i$ (avec $1 \leq i \leq n$, n étant le nombre de variables indépendantes). On peut définir une algèbre de Lie Λ^r de dimension r avec les propriétés suivantes :

- Λ^r est un espace vectoriel engendré par la base $(\Gamma^k)_{1 \leq k \leq r}$;
- le commutateur est anti-symétrique : $\{\Gamma^a, \Gamma^b\} = -\{\Gamma^b, \Gamma^a\}$;
- si Γ^a et Γ^b appartiennent à Λ^r , alors $\{\Gamma^a, \Gamma^b\}$ appartient aussi à Λ^r . On peut donc écrire : $\{\Gamma^a, \Gamma^b\} = \beta_k^{ab} \Gamma^k$ (sommé sur k). Les coefficients β_k^{ab} sont les *constantes de structure de l'algèbre* Λ^r ;
- les opérateurs sont associatifs vis-à-vis de l'addition ;
- le commutateur est semi-linéaire

$$\{\alpha \Gamma^a + \beta \Gamma^b, \Gamma^c\} = \alpha \{\Gamma^a, \Gamma^c\} + \beta \{\Gamma^b, \Gamma^c\} ;$$

- les opérateurs vérifient l'identité de Jacobi :

$$\{\{\Gamma^a, \Gamma^b\}, \Gamma^c\} + \{\{\Gamma^c, \Gamma^a\}, \Gamma^b\} + \{\{\Gamma^b, \Gamma^c\}, \Gamma^a\} = 0.$$

(permutation circulaire sur les indices).

On représente souvent les relations entre générateurs à l'aide d'un tableau donnant les constantes de structure deux à deux (la diagonale du tableau est nulle puisque $\{\Gamma, \Gamma\} = 0$ et le tableau forme une matrice anti-symétrique).

♣ **Exemple.** – Considérons l'algèbre Λ^3 générée par :

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, Y = x \frac{\partial}{\partial x}, Z = x^2 \frac{\partial}{\partial x}.$$

On a la table suivante

	X	Y	Z
X	0	X	$2Y$
Y	$-X$	0	Z
Z	$-2Y$	$-Z$	0

□

On peut définir des sous-algèbres. On parle d'*idéal* pour désigner une sous-algèbre Λ^q ($q < r$) qui absorbe les autres éléments :

$$\forall X \in \Lambda^q, \forall Y \in \Lambda^r, \{X, Y\} \in \Lambda^q.$$

On parle d'*algèbre soluble* quand on peut former une chaîne croissante de sous-algèbres

$$\Lambda^0 \subset \Lambda^1 \subset \dots \subset \Lambda^{r-1} \subset \Lambda^r,$$

telle que Λ^k soit une algèbre de dimension k et Λ^{k-1} soit une sous-algèbre idéale (pour $1 \leq k \leq r$). Λ^0 désigne l'algèbre nulle $\{0\}$.

Cette notion de sous-algèbre soluble est essentielle lorsqu'on cherche à réduire l'ordre d'une équation différentielle. Notons aussi d'ores et déjà que l'existence d'une chaîne ordonnée implique qu'il existe un ordre dans lequel on doit appliquer les symétries pour réduire l'ordre d'une équation différentielle.

En pratique, quand on dispose d'une algèbre de dimension r , on recherche les constantes de structures non nulles et les commutateurs associés. On obtient un premier ensemble, qui est nécessairement un idéal. Notons-le $\mathcal{L}^{(1)}$. Si $\mathcal{L}^{(1)} = \Lambda^r$, on ne peut pas aller plus loin ; sinon, on peut rechercher s'il existe parmi les commutateurs non nuls une nouvelle sous-algèbre idéale.

♣ **Exemple.** – Considérons $\Lambda^5 = \{X_1 = \partial_y, X_2 = x\partial_y, X_3 = x^2\partial_y, X_4 = \partial_x, X_5 = x\partial_x\}$. On a la table suivante

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	0	0	0
X_2	0	0	0	$-X_1$	$-X_2$
X_3	0	0	0	$-2X_2$	$-2X_3$
X_4	0	X_1	$2X_2$	0	X_4
X_5	0	X_2	$2X_3$	$-X_4$	0

Il s'ensuit que X_5 n'apparaissant pas dans les commutateurs, on a $\mathcal{L}^{(1)} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$. Si l'on regarde dans le tableau les commutations au sein de $\mathcal{L}^{(1)}$, tous les commutateurs sont des fonctions de X_1 et X_2 , donc $\mathcal{L}^{(2)} = \{X_1, X_2\}$. On ne peut pas aller plus loin, mais on est arrivé à construire une chaîne d'idéaux, donc l'algèbre est soluble. □

5.4 Solutions invariantes des équations différentielles

Même lorsqu'on connaît les symétries d'une équation différentielle, il n'est pas toujours simple de trouver analytiquement des solutions. Dans certains cas, il est possible de trouver des solutions en recherchant les invariants du(des) groupe(s) laissant invariant l'équation différentielle. Rappelons qu'une fonction u est un invariant du groupe associé aux coefficients infinitésimaux (ξ, η) s'il s'exprime comme une fonction de l'intégrale première de l'équation caractéristique :

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{du}{0},$$

qui peut se former sous la forme condensée suivante : $Q(x, y, y') = \eta - \xi y' = 0$. Il suffit de résoudre cette équation différentielle du premier ordre et d'examiner si ses solutions peuvent être des solutions de l'équation différentielle.

♣ **Exemple.** – Considérons l'équation de Blasius :

$$y''' = -yy'',$$

invariante vis-à-vis des symétries générées par le groupe *translation* et *puissance* :

$$X_1 = \partial_x \text{ et } X_2 = x\partial_x - y\partial_y.$$

Appliquées successivement, ces symétries permettent d'aboutir à une équation d'ordre 1, mais on ne sait pas la résoudre. La seule possibilité de trouver des solutions analytiques est de rechercher les solutions invariantes. Pour X_1 , la solution invariante est la solution de l'équation caractéristique $y' = 0$, c'est-à-dire $y = c$, qui vérifie également l'équation de Blasius. Pour X_2 , l'équation caractéristique est :

$$Q = -y - xy' = 0,$$

dont les solutions sont : $y = cx^{-1}$, qui sont également solutions de l'équation de Blasius si $c = 0$ ou $c = 3$. À noter que toutes combinaisons linéaires de symétries est également une symétrie de l'équation, donc $X = kX_1 + X_2$ avec $k \neq 0$ est la forme générale des symétries à un paramètre. Son équation caractéristique est :

$$Q = -y - (x + k)y' = 0,$$

dont les solutions vérifiant l'équation de Blasius sont : $y = 0$ et $y = 3(x + k)^{-1}$. □

Une solution invariante a également d'autres propriétés intéressantes à exploiter. Introduisons la coordonnée canonique invariante $r(x, y)$. Par définition on a : $Xr = \xi r + \eta r' = 0$. On peut écrire cette équation sous la forme :

$$\xi D_x r + Q r_y = 0.$$

Si y est une solution invariante de l'équation différentielle, alors on a $Q = 0$, donc de l'équation différentielle précédente on tire que pour $\xi \neq 0$, $D_x r(x, y) = 0$. Donc une solution invariante $y(x)$ est de la forme $r(x, y(x)) = c$. On peut également rechercher les solutions invariantes vérifiant la condition $\xi(x, y) = 0$.

Enfin, une technique qui peut s'avérer intéressante quand l'équation caractéristique est difficile à résoudre est de rechercher les solutions invariantes en posant :

$$y'(x) = \frac{\xi(x, y)}{\eta(x, y)},$$

puis de calculer successivement toutes les dérivées de y , ensuite de les exprimer en fonction de y enfin de les reporter dans l'équation différentielle, qui est alors plus qu'une fonction algébrique en y et x .

♣ **Exemple.** – Considérons l'équation différentielle :

$$y'''y^3 = 1,$$

invariante sous la symétrie $X = x\partial_x + \frac{3}{4}y\partial_y$. L'équation caractéristique est :

$$Q = \frac{3}{4}y - xy'.$$

Toute courbe invariante vérifie donc :

$$y' = \frac{3}{4} \frac{y}{x}.$$

Cette équation est intégrale (on obtient $\ln y = \frac{3}{4} \ln x + c$, mais on va procéder autrement). Calculons la dérivée seconde puis troisième :

$$y'' = \frac{3}{4} \frac{y'}{x} - \frac{3}{4} \frac{y}{x^2} = -\frac{3}{16} \frac{y}{x^2},$$

$$y''' = -\frac{3}{16} \frac{y'}{x} + \frac{3}{8} \frac{y}{x^3} = \frac{15}{64} \frac{y}{x^3}.$$

En reportant dans l'équation différentielle, on trouve que les solutions invariantes par X sont :

$$y = \pm \left(\frac{64}{15} \right)^{1/4} x^{3/4}.$$

□

5.5 Cas particulier des équations du premier ordre

5.5.1 Indétermination des équations caractéristiques

Pour les équations différentielles du premier ordre, il n'existe pas de méthode systématique qui permette de déterminer les groupes laissant l'équation différentielle invariante. Il faut donc deviner ces groupes. Il est utile de disposer d'un critère permettant une vérification rapide de l'invariance d'une équation sous l'action d'un groupe.

Considérons une équation différentielle :

$$A(x, y)dy - B(x, y)dx = 0. \quad (5.38)$$

La solution $\psi(x, y)$ est invariante sous l'action du groupe⁵ (trivial) $Y = A\partial/\partial x + B\partial/\partial y$: $Y\psi = 0$. Cherchons si le groupe (non trivial) $X = \xi\partial/\partial x + \eta\partial/\partial y$ laisse l'équation invariante. Calculons le commutateur :

$$\{X, Y\} = (XA - Y\xi) \frac{\partial}{\partial x} + (XB - Y\eta) \frac{\partial}{\partial y}.$$

5. On prendra garde au changement de signe pour l'opérateur Y . Le résultat peut se montrer simplement en prenant $\psi = y - f(x)$: on a bien $-Af' + B = 0$, soit encore $y' = B/A$.



On trouve que $\{X, Y\}\psi = 0$. Donc ψ est solution de deux équations linéaires de second membre nul : $\{X, Y\}\psi = 0$ et $Y\psi = 0$. Le déterminant du système est donc nul, ce qui entraîne que l'on doit avoir l'égalité :

$$XA - Y\xi = \frac{A}{B}(XB - Y\eta). \quad (5.39)$$

Cette équation peut servir soit à tester des symétries, soit à tenter d'en deviner.

♣ **Exemple.** – On considère l'équation :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - y^2}{xy} + 1.$$

On cherche à déterminer des groupes de symétrie pour cette équation. Pour cela on considère des coefficients infinitésimaux de la forme :

$$\xi = \alpha(x) \text{ et } \eta = \beta(x)y + \gamma(x).$$

En reportant dans l'équation (5.39), on obtient une équation qui peut se comprendre comme la somme de termes indéterminés associés à une puissance de y . On aboutit alors au système :

$$\gamma = 0, \beta = \alpha', \text{ et } \alpha' + \alpha/x = 0,$$

dont la solution est $\alpha = cx^{-1}$ et $\beta = -cx^{-2}$. $\square$

5.5.2 Solutions singulières des équations différentielles du 1^{er} ordre

Lorsqu'on recherche à résoudre une équation différentielle de la forme $y' = f(x, y)$, on peut la mettre sous une forme équivalente :

$$A(x, y)dy = B(x, y)dx,$$

avec $f(x, y) = B/A$. Si on définit l'opérateur différentiel $X = A\partial/\partial x + B\partial/\partial y$, une caractéristique est une fonction $\psi(x, y)$ qui vérifie l'équation aux dérivées partielles : $X\psi = 0$. Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $y(x)$ telles que $\psi(x, y(x)) = c$, avec c une constante. Supposons que ψ soit invariante sous l'action d'un groupe dont l'opérateur est $Y = \xi\partial/\partial x + \eta\partial/\partial y$. On a donc : $Y\psi = 1$. Les caractéristiques ψ sont donc invariantes sous l'action des deux groupes représentés par X et Y . C'est la résolution des deux systèmes d'équations $X\psi = 0$ et $Y\psi = 1$ qui permet de trouver les dérivées de ψ et donc de remonter à la solution $y(x)$ (c'est une autre manière de présenter la méthode du facteur intégrant).

Dans certains cas, le groupe associé à Y ne laisse pas seulement invariante la famille de caractéristiques ψ mais également la famille de solutions. Dans ce cas, la famille de solutions possède une enveloppe, dont l'équation est également solution de l'équation différentielle originale. On l'appelle *solution singulière*.

Ces solutions sont d'une grande importance dans les problèmes pratiques (non linéaires) car elle renseigne sur l'existence de solutions « universelles » vers lesquelles le système tend indépendamment des conditions initiales.

♣ **Exemple.** – Considérons l'équation de Clairault : $xy'^2 - yy' + m = 0$. Cette équation est invariante sous la dilatation : $\tilde{x} = e^{2s}x$ et $\tilde{y} = e^s y$, dont l'opérateur est $Y = 2x\partial/\partial x + y\partial/\partial y$. On peut se ramener à la forme donnée ci-dessus en prenant : $A(x, y) = 2x$ et $B(x, y) = y \pm (y^2 - 4mx)^{1/2}$. Par la méthode du facteur intégrant, on trouve que la solution est : $y = \psi x + m/\psi$.

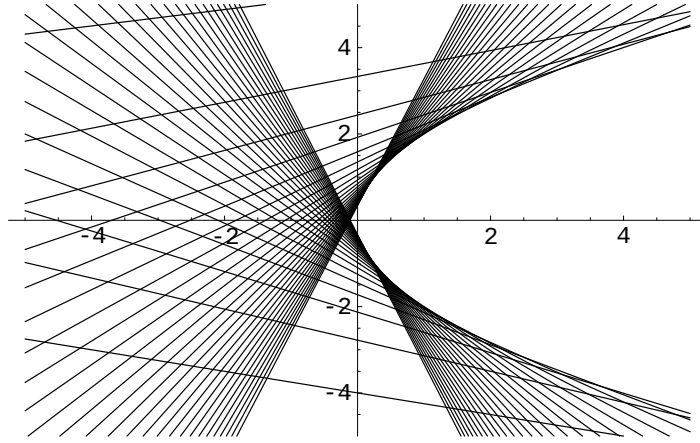


Figure 5.1 : solutions de l'équation de Clairault (avec ici $m = 1$).

Comme le montre la figure 5.1, il est visible que la famille de solutions admet une courbe enveloppe. Recherchons une courbe qui soit à la fois solution de l'équation de Clairault et invariante sous l'action de l'opérateur Y . On exprime ces deux conditions sous la forme :

$$\begin{aligned}\psi_{inv} &= y - f(x) = 0 \\ Y\psi_{inv} &= 0 \Rightarrow -2xf_x + y = 0 \\ Ady + Bdx &= 0.\end{aligned}$$

On trouve $f(x) = \pm 2\sqrt{mx}$. $\square$

5.6 Résolution des équations du second ordre : théorème de réduction de Lie

Quand on veut résoudre une équation différentielle du second ordre de la forme :

$$w(x, y, \dot{y}, \ddot{y}) = 0,$$

il est possible de réduire son ordre de la manière suivante lorsqu'on peut trouver un groupe (ξ, η) qui laisse l'équation invariante. On peut déjà faire remarquer que l'équation précédente est équivalente au système d'équations :

$$u = \dot{y},$$

$$w(x, y, u, \dot{u}) = 0.$$

Supposons que ce système soit invariant quand on le transforme à l'aide du groupe une fois étendu (ξ, η, η_1) . Cela veut dire qu'il existe des surfaces qui sont invariantes par ce groupe. Notons les $\phi(x, y, u, c)$ où c est un paramètre. L'invariance entraîne que la fonction ϕ doit vérifier l'équation :

$$\xi\phi_x + \eta\phi_y + \eta_1\phi_u = 0,$$

dont l'équation caractéristique s'écrit :

$$\frac{dx}{\xi(x, y)} = \frac{dy}{\eta(x, y)} = \frac{du}{\eta_1(x, y, u)}.$$

Il est de là possible de tirer deux intégrales : l'une, $p(x, y)$, invariant du groupe, est obtenue par intégration de la première paire d'équations. La seconde, notée $q(x, y, \dot{y})$ et appelée *premier invariant différentiel*, est obtenue à partir de la seconde paire. Il s'ensuit que la fonction ϕ doit s'écrire comme une fonction (arbitraire) G de p et q : $\phi = G(p, q)$. Lorsque p et q peuvent être déterminés explicitement, on est alors en mesure de déterminer de manière explicite G (à noter que puisque p et q sont deux invariants du groupe, G l'est également). En pratique, cela peut se faire en calculant dp/dx , dq/dx , puis en faisant leur rapport dq/dp . L'équation résultante peut parfois être résolue en utilisant les propriétés de symétrie vis-à-vis du groupe.

5.7 Résolution des équations différentielles d'ordre n (méthode des invariants)

Si une équation différentielle d'ordre n possède R symétries ($R \leq n$), on peut réduire l'ordre de R et obtenir une équation différentielle d'ordre $n - R$ (si $n = R$, on obtient une équation algébrique). L'équation différentielle s'écrit comme une fonction I de $n - R$ dérivées, chacune appelée *invariant différentiel*. Voici comme on peut obtenir un tel invariant : pour chaque k ($1 \leq k \leq R$), on exprime que I est un invariant du $k^{\text{ième}}$ groupe $X^{(k)}$:

$$X^{(k)}I = 0.$$

soit encore :

$$\xi_k I_x + \eta_k I_y + \cdots + \eta_k^{\{R\}} I_{y^{(R)}} = 0.$$

Sous une forme matricielle, cela veut dire que l'on :

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \cdots & \eta_1^{\{R\}} I_{y^{(R)}} \\ \xi_2 & \eta_2 & \cdots & \eta_2^{\{R\}} I_{y^{(R)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_R & \eta_R & \cdots & \eta_R^{\{R\}} I_{y^{(R)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ \vdots \\ I_{y^{(R)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice est de dimensions $R+2 \times R$. Sous réserve qu'elle soit de rang R , on peut dire que le système admet 2 solutions fonctionnellement indépendantes, qui peuvent être déterminées par la méthode d'élimination de Gauss (visant à former une matrice triangulaire) et la méthode des caractéristiques. On note r et v ces solutions, dites *invariants fondamentaux*. En calculant les dérivées successives dv/dr et en les exprimant en fonction des dérivées de y , on peut finalement écrire l'équation différentielle sous la forme réduite :

$$v^{(n-R)} = \Omega(r, v, \dots, v^{(n-R-1)}).$$

Si cette équation différentielle peut être résolue, on a une expression de la forme $v = F(r, c_1, \dots, c_{n-R})$. Cette équation est équivalente à une équation d'ordre R quand on exprime les invariants fondamentaux en fonction de x et y . Cette équation est elle-même invariante par les R symétries. Si l'algèbre possède une sous-algèbre solvable suffisamment grande, on peut réduire l'équation. Supposons que $X_1, \dots, X_{R-1}$ forment une sous-algèbre et gardons de côté la dernière symétrie X_R . On note (r_{R-1}, v_{R-1}) les invariants fondamentaux de sous-algèbre. Le groupe X_R admet r_R et s_R comme coordonnées canoniques, que l'on peut exprimer à l'aide des variables (r_{R-1}, v_{R-1}) :

$$(r_R, s_R) = (r_R(r_{R-1}, v_{R-1}), s_R(r_{R-1}, v_{R-1})).$$

Résumons-nous :

- On part d'une équation différentielle d'ordre $n \geq 2$

$$y^{(n)} = \omega(x, y, \dots, y^{(n-1)}),$$

invariantes sous l'action de R symétries X_i ($1 \leq i \leq R$).

- Si on introduit (r_R, v_R) les invariants fondamentaux et qu'on opère un changement de variable, on se ramène à une équation différentielle d'ordre $n - R$:

$$v^{(n-R)} = \Omega(r, v, \dots, v^{(n-R-1)}).$$

- Admettons qu'on sache résoudre cette équation on a donc :

$$v_R = F(r_R, c_1, \dots, c_{n-R}),$$

avec c_i les constantes d'intégration. Si on se ramène aux variables primitives, cette équation algébrique est en fait une équation différentielle d'ordre R .

- Si on introduit le second invariant fondamental v_R du groupe X_R , on sait que v_R doit s'exprimer comme une fonction de r_R et $\dot{s}_R = ds_R/dr_R$: $v_R = v(r_R, \dot{s}_R)$. Or, dans le même temps, on a : $v_R = F(r_R)$, d'où implicitement il doit exister une fonction G telle que :

$$\dot{s}_R = F(r_R),$$

dont l'intégration donne :

$$s_R(r_{R-1}, v_{R-1}) = \int^{r_R(r_{R-1}, v_{R-1})} G(r_R) dr_R + c_R.$$

Cette équation fournit une relation implicite entre v_{R-1} et r_{R-1} comme celle indiquée plus haut pour v_R et r_R , donc on peut itérer le procédé (en principe).

- la condition pour qu'une telle itération marche est que l'algèbre soit solvable.

♣ **Exemple.** – Considérons l'équation différentielle :

$$y^{(4)} = \frac{2}{y}(1 - y')y''',$$

dont il existe trois symétries :

$$X_1 = \partial_x, X_2 = x\partial_x + y\partial_y, \text{ et } X_3 = x^2\partial_x + 2xy\partial_y.$$

On peut donc réduire l'ordre de 3 et les invariants fondamentaux sont obtenus par la résolution de :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & y & 0 & -y'' & -2y''' \\ x^2 & 2xy & 2y & 2y' - 2xy'' & -4xy''' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_{y'} \\ I_{y''} \\ I_{y'''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Après élimination de Gauss, on a :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & -y'' & -2y''' \\ 0 & 0 & y & y' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_{y'} \\ I_{y''} \\ I_{y'''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La troisième équation donne : $yI_{y'} + y'I_{y''} = 0$, dont l'équation caractéristique est :

$$\frac{dy'}{y} = \frac{dy''}{y'},$$

dont un invariant s'écrit $2yy'' - y'^2$. I est donc une fonction de la forme $I(x, y, yy'' - y'^2, y''')$. La seconde équation donne : $yI_y - y''I_{y''} - 2y'''I_{y'''} = 0$, dont l'équation caractéristique est :

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dy''}{-y''} = -\frac{dy'''}{y'},$$

dont un invariant s'écrit y^2y''' . I est donc une fonction de la forme $I(x, yy'' - y'^2, y^2y''')$. De la première équation, on tire que $I_x = 0$, donc $I(yy'' - y'^2, y^2y''')$. Les invariants fondamentaux sont donc : $r = yy'' - y'^2$ et $v = y^2y'''$, qui sont respectivement d'ordre 0 et 1. L'invariant d'ordre 2 s'obtient par différentiation :

$$\frac{dv}{dr} = \frac{D_x v}{D_x r} = \frac{yy^{(4)}}{2y'''} + y' = 1,$$

dont la solution est : $v = r + c$. L'équation à résoudre est finalement équivalente à l'équation d'ordre 3 :

$$y''' = \frac{2yy'' - y'^2 + c}{y^2}$$

□

5.8 Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle contient également les notions de symétrie et d'invariance développées dans la théorie de Lie. Il s'agit d'un sujet central dans la modélisation, particulièrement pour la construction de solutions à des équations de type problème aux frontières (*boundary value problem*). On se reportera à l'ouvrage de ? pour une introduction plus complète à l'analyse dimensionnelle.

Le *théorème de Buckingham* ou encore théorème II énonce que si une grandeur X dépend de n paramètres ou variables W_i , dont les unités physiques font appel à m dimensions fondamentales L_j (temps, masse, longueur, température, etc.), par une relation de la forme $X = f(W_1, \dots, W_n)$, alors il existe $k = n - r$ (avec r le rang de la matrice dimensionnelle⁶ $\mathbf{B}$, en pratique $r = 2$ ou 3) nombres sans dimension π_j tel que $\pi = f(\pi_1, \dots, \pi_k)$, avec π le nombre sans dimension associé à X .

On peut utiliser ce théorème dans le cas d'équations différentielles. Considérons une équation différentielle faisant intervenir une variable dépendante u et ℓ variables indépendantes $x_1, \dots, x_\ell$ ainsi que p paramètres dimensionnels $c_1, \dots, c_p$. On a besoin de m unités fondamentales pour définir les dimensions des variables indépendantes $[x_i] = L_1^{b_{1i}} \dots L_m^{b_{mi}}$. On peut donc former une matrice dimensionnelle :

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1\ell} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2\ell} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{m\ell} \end{bmatrix}$$

On peut faire de même avec les paramètres c_i et écrire une matrice $\mathbf{B}_2$ qui est de dimension $m \times p$. La matrice dimensionnelle du problème s'écrit :

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 | \mathbf{B}_2]$$

et elle est de dimension $m \times (\ell + p)$. On cherche une formulation sans dimension du problème, ce qui permet de réduire le nombre de variables. La diminution du nombre de variables indépendantes est $\rho = r(B_1) = r(B) - r(B_2)$, où $R(B)$ désigne le rang de $\mathbf{B}$. On peut former $\ell - \rho$ variables indépendantes sans dimension ; $p - r(B_2)$ paramètres adimensionnels peuvent être formés. Si au cours de ce processus pour la recherche de nombre sans dimension, on a $\ell - \rho = 1$, alors le problème est dit *auto-similaire*.

Le problème est qu'en général on manipule des grandeurs adimensionnelles qui font appel à la fois à des variables dépendantes et à des paramètres. Lorsqu'on recherche des invariances (e.g., des groupes de Lie à un paramètre tels que le groupe extension), les grandeurs adimensionnelles construites ne sont basées que sur des variables indépendantes. ? a introduit la notion de solutions auto-similaires de première espèce et de seconde espèce selon que le processus de réduction est opérant par analyse dimensionnelle seule (les nombres sans dimension construits à partir de x_i et c_j) ou par application d'un groupe extension sur les variables x_i .

6. On peut écrire que l'unité de chaque grandeur W sous la forme $[W] = L_1^{b_1} \dots L_m^{b_m}$. La matrice $\mathbf{B}$ est une matrice $m \times n$, dont les colonnes correspondent aux vecteurs dimensions $[W_i]$. Cette matrice doit être invariante par tout changement d'unité ; voir (?), pp. 5–16

6

Exemples traités

Nous commençons par un exemple basique où les méthodes de résolution sont présentées (§ 6.1.1). Ensuite, on donne un exemple (équation d'Emden-Fowler, § 6.1.2), où une solution complètement analytique n'est pas possible ; la recherche de symétries permet néanmoins de simplifier le problème. Nous verrons aussi l'utilisation du *portrait de phase* comme technique d'étude qualitative des solutions des équations différentielles du premier ordre. On finira par l'équation de Blasius. On présentera la méthode du tir ou encore *shooting*.

6.1 Équations du second ordre

6.1.1 Résoudre l'équation $y\ddot{y} - \dot{y}^2 - a^2y^3 = 0$

Mise en forme

L'équation $y\ddot{y} - \dot{y}^2 - a^2y^3 = 0$ peut s'écrire $\ddot{y} = w(x, y, \dot{y})$, avec $w(x, y, \dot{y}) = \dot{y}^2/y + a^2y^2$. X est une symétrie de l'équation si si $X_{\{2\}}(\ddot{y} - w(w, y, \dot{y})) = 0$.

Équations déterminantes

$$-2y\eta(2,y)a^2 + y^2\eta^{(0,1)}(2,y)a^2 - 2y^2\xi^{(1,0)}(2,y)a^2 + \eta^{(2,0)}(2,y) = 0 \quad (6.1)$$

$$\eta^{(0,2)}(2,y)y^2 - 2\xi^{(1,1)}(2,y)y^2 - \eta^{(0,1)}(2,y)y + \eta(2,y) = 0 \quad (6.2)$$

$$3a^2\xi^{(0,1)}(2,y)y^3 - 2\eta^{(1,1)}(2,y)y + \xi^{(2,0)}(2,y)y + 2\eta^{(1,0)}(2,y) = 0 \quad (6.3)$$

$$\xi^{(0,1)}(2,y) + y\xi^{(0,2)}(2,y) = 0 \quad (6.4)$$

Algèbre

On résout le système en faisant l'hypothèse que $\eta = a_i x^j y^k$ et $\xi = b_i x^j y^k$ (avec ici, par exemple, l'ordre maximal $j+k$ égal à 2). On trouve : $\eta = a_{10} - b_{12}x/2$ et $\xi = b_{12}y$. Les symétries sont donc le groupe translation $X_1 = \partial_x$ et dilatation $X_2 = -\frac{x}{2}\partial_x + y\partial_y$. Les constantes de structure sont :

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= \partial_x \left(-\frac{x}{2}\partial_x + y\partial_y \right) - \left(-\frac{x}{2}\partial_x + y\partial_y \right) (\partial_x), \\ [X_1, X_2] &= -\frac{1}{2}\partial_x = -\frac{1}{2}X_1. \end{aligned}$$

On a la table suivante

$$\begin{array}{c|cc} & X_1 & X_2 \\ \hline X_1 & 0 & -\frac{1}{2}X_1 \\ X_2 & \frac{1}{2}X_1 & 0 \end{array}$$

Recherchons les prolongations à l'ordre 2. On a pour X_1 : $\xi_1 = 1$, $\eta = 0$, $\eta_1 = 0$, et $\eta_2 = 0$. Les invariants de X_1 sont : $r_1 = y$ et $v_1 = \dot{y}$.

On a pour X_2 : $\xi_1 = -\frac{x}{2}$, $\eta = y$, $\eta_1 = \frac{3}{2}\dot{y}$, et $\eta_2 = 2\ddot{y}$. Les invariants de X_2 sont donnés par :

$$\frac{dx}{-x/2} = \frac{dy}{y} = \frac{d\dot{y}}{3y\dot{y}/2}$$

soit : yx^2 et $x^3\dot{y}$ ses invariants.

On vérifie facilement que $X_i(\ddot{y} - w(w, y, \dot{y})) = 0$ quelle que soit la valeur de a . Par exemple avec X_2 :

$$X_{\{2\}} = -\frac{x}{2}\partial_x + y\partial_y + \frac{3}{2}\dot{y}\partial_{\dot{y}} + 2\ddot{y}\partial_{\ddot{y}}.$$

Donc :

$$X_{\{2\}}(\ddot{y}) = 2\ddot{y} \times 1 = \ddot{y},$$

$$X_{\{2\}}(w) = -y\frac{\dot{y}^2}{y^2} - 2a^2y + \frac{3}{2}\dot{y}\frac{2\dot{y}}{y} = 2w.$$

On a donc bien $X_2(\ddot{y} - w(w, y, \dot{y})) = 2(\ddot{y} - w(w, y, \dot{y})) = 0$. L'algèbre est solvable et la chaîne de sous algèbre est $\{\{0\}, \{X_1\}, \{X_1, X_2\}\}$.

Invariants fondamentaux

Les invariants fondamentaux sont obtenus par la résolution de :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x/2 & y & 3/2\dot{y} & 2\ddot{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_{\dot{y}} \\ I_{\ddot{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On aboutit à l'équation caractéristique :

$$\frac{dy}{y} = \frac{d\dot{y}}{\frac{3}{2}\dot{y}} = \frac{d\ddot{y}}{2y}$$

Les invariants fondamentaux sont donc $r = \dot{y}/y^{3/2}$ et $v = \ddot{y}/y^2$. L'équation différentielle s'écrit donc :

$$v = a^2 + r^2$$

Pour résoudre cette équation, nous allons utiliser que l'algèbre $\{X_1, X_2\}$ contient la sous-algèbre $\{X_1\}$. On se sert donc d'abord du groupe restant X_2 qu'on cherche à exprimer dans la base des invariants de X_1 . On a $X_2 = -\frac{x}{2}\partial_x + y\partial_y$ en faisant le changement de variable $(x, y) \rightarrow (r_1, v_1)$. Ses coefficients infinitésimaux sont : $\hat{\xi} = X_2r_1 = y = r_1$ et $\hat{\eta} = X_2^{(1)}v_1 = \frac{3}{2}\dot{y} = \frac{3}{2}v_1$. Donc : $X_2 = r_1\partial_{r_1} + \frac{3}{2}v_1\partial_{v_1}$. Si on prolonge à l'ordre 1, on a : $\hat{\eta}_1 = D_{r_1}\hat{\eta} - \dot{v}_1 d\hat{\xi}/dr_1 = \dot{v}_1/2$. Dans cette base, les invariants sont :

$$\frac{dr_1}{r_1} = \frac{dv_1}{3v_1/2} = \frac{d\dot{v}_1}{\dot{v}_1/2},$$

c'est-à-dire : $r_2 = v_1/r_1^{3/2}$ et $v_2 = \dot{v}_1/r_1^{1/2}$.

Calculons maintenant les coordonnées canoniques :

$$X_2 r_2 = 0 \Rightarrow r_2 = \frac{v_1}{r_1^{3/2}},$$

$$X_2 s_2 = 1 \Rightarrow s_2 = \ln r_1.$$

On en déduit que :

$$\frac{ds_2}{dr_2} = \frac{D_{r_1} s_2}{D_{r_1} r_2} = \frac{\frac{1}{r_1}}{-\frac{3}{2} \frac{v_1}{r_1^{5/2}} + \frac{\dot{v}_1}{r_1^{3/2}}} = \frac{1}{-\frac{3}{2} \frac{v_1}{r_1^{3/2}} + \frac{\dot{v}_1}{r_1^{1/2}}} = \frac{2}{-3r_2 + v_2}$$

Il faut maintenant exprimer r_2 et v_2 en fonction de v et r . On sait qu'il existe une relation entre eux puisque v et r sont les invariants fondamentaux de $\{X_1, X_2\}$, donc de X_2 . On trouve tout de suite que $r_2 = r$. Pour v_2 , notons que :

$$v_2 = \frac{\dot{v}_1}{v_1^{1/2}} = \frac{1}{v_1^{1/2}} \frac{dv_1}{dx} \frac{dx}{dr_1} = \frac{1}{y^{1/2}} \frac{\dot{y}}{\dot{y}} = \frac{v}{r_2}.$$

En reportant dans ds_2/dr_2 , on tire :

$$\frac{ds_2}{dr_2} = \frac{2}{-3r_2 + \frac{a^2+r^2}{r_2}} = \frac{2r_2}{a^2 - 2r_2^2}.$$

En intégrant, on trouve :

$$s_2 = \tilde{c}_2 - \ln(2r_2^2 - a^2),$$

où $\tilde{c}_2$ est une constante d'intégration. Exprimons ce résultat en termes de r_1 et v_1 :

$$\ln r_1 = \tilde{c}_2 - \ln \left(2 \frac{v_1^2}{r_1^3} - a^2 \right),$$

ou encore

$$2v_1^2 = r_1^2(c_2 + a^2 r_1),$$

avec $c_2 = e^{\tilde{c}_2}$. On réitère le procédé. On considère le groupe X_1 . Ses coordonnées canoniques sont $(r_1, s_1) = (y, x)$, son second invariant fondamental $v_1 = \dot{y}$, et on a :

$$\frac{ds_1}{dr_1} = \frac{1}{\dot{y}} = \frac{1}{v_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{r_1 \sqrt{c_2 + a^2 r_1}}$$

dont la primitive est :

$$s_1 = c_1 - \frac{2}{\sqrt{c_2}} \operatorname{arctanh} \sqrt{1 + \frac{a^2}{c_2} r_1},$$

avec c_1 une constante d'intégration. Soit encore

$$x = c_1 - \frac{2}{\sqrt{c_2}} \operatorname{arctanh} \sqrt{1 + \frac{a^2}{c_2} y},$$

Soit après inversion :

$$y = \frac{c_2}{a^2} \left(\tanh^2 \left[(x - c_1) \frac{\sqrt{c_2}}{2} \right] - 1 \right).$$

Variante : résolution successive

On peut procéder différemment en faisant des réductions d'ordre successives. Comme $[X_1, X_2] = 0$. Commençons par X_1 . Ses invariants sont : $r_1 = y$ et $v_1 = \dot{y}$. D'où on tire :

$$\frac{dv_1}{dr_1} = \frac{\ddot{y}}{\dot{y}},$$

et on tire :

$$r_1 v_1 \dot{v}_1 - v_1^2 - a^2 r_1^3 = 0.$$

C'est une équation de degré 1, dont la primitive est :

$$v_1 = \frac{c_1 r_1}{c_1 a^2 r_1 - 1}.$$

Si l'on remplace $r_1 = y$ et $v_1 = \dot{y}$, on tombe sur une intégrale du premier ordre, qu'on ne sait pas intégrer commodément. On peut utiliser la deuxième symétrie X_2 . Exprimé dans les coordonnées (r_1, v_1) , ce groupe prend la forme : $X_2 = r_1 \partial_{r_1} + \frac{3}{2} v_1 \partial_{v_1}$, dont les invariants sont : $r_2 = v_1 / r_1^{3/2}$ et $v_2 = \dot{v}_1 / r_1^{1/2}$. L'équation différentielle devient : $r_2 v_2 - r_2^2 = a^2$, soit :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{v}_1}{r_1^{1/2}} &= \frac{a^2 + \frac{v_1^2}{r_1^3}}{v_1 / r_1^{3/2}}, \\ v_1 &= \frac{a^2 r_1^2}{v_1} + \frac{v_1}{r_1}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\dot{y}^2 = (2a^2 y + c_2) y,$$

dont une primitive est :

$$c_1 - \frac{2}{\sqrt{c_2}} \operatorname{arctanh} \sqrt{1 + \frac{a^2}{c_2} y}.$$

On retrouve le résultat précédent :

$$y = \frac{c_2}{a^2} \left(\tanh^2 \left[(x - c_1) \frac{\sqrt{c_2}}{2} \right] - 1 \right).$$

6.1.2 Résoudre l'équation $\ddot{y} + 2\dot{y}/x + y^n = 0$ (Emden-Fowler)**Mise en forme**

L'équation d'Emden Fowler peut s'écrire $\ddot{y} = w(x, y, \dot{y})$, avec $w(x, y, \dot{y}) = -2\dot{y}/x - y^n$. X est une symétrie de l'équation si si $X_{\{2\}}(\ddot{y} - w(x, y, \dot{y})) = 0$.

Équations déterminantes

$$\begin{aligned} nx\eta(x, y)y^n - x\eta^{(0,1)}(x, y)y^{n+1} + 2x\xi^{(1,0)}(x, y)y^{n+1} + 2\eta^{(1,0)}(x, y)y + x\eta^{(2,0)}(x, y)y &= 0 \\ 3x^2\xi^{(0,1)}(x, y)y^n - 2\xi(x, y) + 2x\xi^{(1,0)}(x, y) + 2x^2\eta^{(1,1)}(x, y) - x^2\xi^{(2,0)}(x, y) &= 0 \\ 4\xi^{(0,1)}(x, y) + x\eta^{(0,2)}(x, y) - 2x\xi^{(1,1)}(x, y) &= 0 \\ \xi^{(0,2)}(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

La seule solution trouvée est le groupe « extension » : $X = x\partial_x + \beta y\partial_y$ avec ici $\beta = 2/(1-n)$.

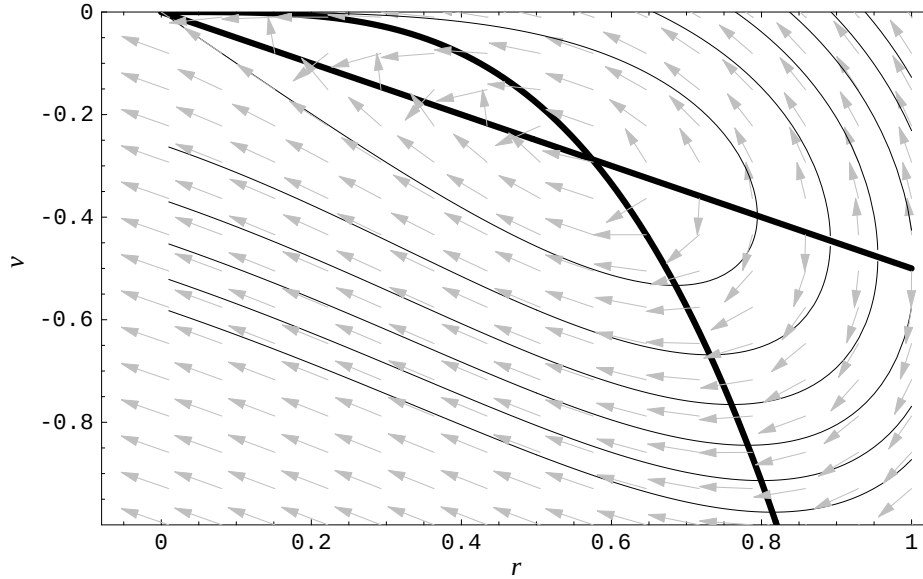


Figure 6.1 : Solutions de l'équation d'Emden-Fowler [avec ici $\beta = -1/2$ ($n = 5$)] dans l'espace des invariants (r, v) .

Invariants

La prolongation à l'ordre 2 de ce groupe est :

$$X_{\{2\}} = x\partial_x + \beta y\partial_y + (\beta - 1)\dot{y}\partial_{\dot{y}} + (\beta - 2)\ddot{y}\partial_{\ddot{y}}.$$

Les invariants sont : $r = y/x^\beta$ et $v = \dot{y}/x^{\beta-1}$. On déduit que :

$$\frac{dv}{dr} = \frac{-(\beta - 1)\frac{\dot{y}}{x^\beta} + \frac{\ddot{y}}{x^{\beta-1}}}{-\beta\frac{y}{x^{\beta+1}} + \frac{\dot{y}}{x^\beta}}.$$

En reportant dans l'équation originale on aboutit à :

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{r^{\beta-2/\beta} + (\beta + 1)v}{v - \beta r}.$$

Résolution numérique

On a pu réduire l'ordre de 1, mais l'équation résultante n'est pas facile à résoudre. Il faut procéder numériquement et pour cela il faut connaître les conditions initiales. On va examiner deux petits problèmes. Pour cela on peut tracer les comportements de la solution en regardant ce qui se passe dans le plan (r, v) , c'est-à-dire en dressant un *portrait de phase*.

L'équation se met sous la forme

$$\frac{dv}{dr} = \frac{f(r, v)}{v - \beta r}$$

On peut tracer deux courbes importants :

- le lieu $f(r, v) = 0$ où la solution $v(r)$ admet une tangente nulle ;
- le lieu $v - \beta r = 0$ où la solution $v(r)$ admet une tangente infinie ;

Il y a deux points singuliers pour lesquels on a les deux conditions réunies (ce sont les intersections des deux courbes). Comme reporté sur la figure suivante, on peut aussi tracer le champ tangent correspondant aux pentes que doit prendre localement la solution.

L'équation étant invariante par le groupe extension, une question naturelle qui vient à se poser est de savoir s'il existe un comportement asymptotique de la solution. Une équation différentielle est invariante pour le groupe extension si elle peut s'exprimer en fonction des invariants de ce groupe, c'est-à-dire si on peut écrire :

$$\phi\left(\frac{y}{x^\beta}, \frac{\dot{y}}{x^{\beta-1}}, \frac{\ddot{y}}{x^{\beta-2}}\right) = 0.$$

Il doit donc exister des solutions de la forme $y = Ax^\beta$ solution de cette équation. La constante A doit par ailleurs vérifier : $\phi(A, \beta A, (\beta-1)A) = 0$ et quand il y a plusieurs racines on montre que c'est la plus petite qu'il convient de prendre. Notons que l'on recherche des solutions admettant $y = Ax^\beta$ pour asymptote, on fixe la limite en ∞ : $y \rightarrow 0$ (pour $\beta < 0$). S'agissant d'une équation différentielle du second ordre, il faut une autre condition aux limites, en général en $x = 0$ (par exemple en fixant $f(0) = a$). On parle alors de *problème aux conditions aux limites en deux points*. Ce type de problème pose des difficultés dans les résolutions numériques ; une méthode couramment employée est celle du tir (*shooting method*), qui consiste à deviner la valeur de la dérivée au point origine, à résoudre numériquement, puis à vérifier que la second condition aux limites est vérifiée.

Revenons maintenant au plan (r, v) . Dans ce plan la solution asymptotique $y = Ax^\beta$ est représentée par un point P ($r = A, v = \beta A$). Comme A vérifie également $f(A, \beta A) = 0$, cela veut dire que le point-solution P est singulier puisqu'en P, $dv/dr = 0/0$; c'est donc une forme indéterminée. L'indétermination peut être levée en utilisant la règle de L'Hôpital qui stipule que :

Si $f(a) = g(a) = 0$, si g' ne s'annule pas, et si f'/g' admet une limite λ en a , alors f/g admet aussi λ comme limite en a (ce résultat vient du théorème des accroissements finis).

Une conséquence est que, si m désigne $(dv/dr)_P$ alors m est la solution de l'équation :

$$m = \frac{D_r f(A, \beta A)}{m - \beta},$$

avec $D_r = \partial_r + m\partial_v$. Le comportement autour d'un point critique (r_P, v_P) est examiné en linéarisant chacun des membres du rapport. On a ainsi :

$$\begin{aligned} x \frac{dv}{dx} &= f(r, v) = 0 + (r - r_P)\partial_r f + (v - v_P)\partial_v f + o(r - v) \\ x \frac{dr}{dx} &= (v - v_P) - \beta(r - r_P). \end{aligned}$$

Si on cherche une solution localement de la forme $r = r_P + Re^{\lambda x}$ et $v = v_P + Ve^{\lambda x}$, alors λ doit être une valeur propre de la matrice :

$$\begin{bmatrix} -\beta & 1 \\ \partial_r f & \partial_v f \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire , on a :

$$\lambda = \frac{\partial_v f - \beta}{2} \pm \frac{\sqrt{(\beta + \partial_v f)^2 + 4\partial_r f}}{2}.$$

- Si les deux valeurs sont réelles et de même signe (ou égales), il s'agit d'un *nœud*. Les trajectoire se dirigent vers le nœud. Les axes de symétrie sont les vecteurs propres de la matrice.

- Si les deux valeurs sont réelles et de signe opposé, il s'agit d'une *selle*.
- Si les valeurs sont imaginaires, les trajectoires forment des spirales ou des ellipses autour du point critique.

Revenons à notre exemple, on a : $f(r, v) = -r^{\beta-2/\beta} - (\beta+1)v$. Le point P est déterminé par : $r^{\beta-2/\beta}/(\beta+1) = -\beta r$, soit : $r_P = (-\beta(1+\beta))^{\beta/(\beta^2-\beta-2)} = 1/4^{2/5}$.

$$\begin{bmatrix} -\beta & 1 \\ \partial_r f & \partial_v f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ -7/8 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Les deux valeurs propres sont complexes. Le point P est donc un centre (les trajectoires tournent autour) et il ne peut donc pas être considéré comme un point limite. Regardons maintenant ce qui passe pour le point origine O. On trouve deux valeurs propres réelles de signe opposé. Il s'agit donc d'un point selle ; les trajectoires sont déviées à l'approche du point hormis pour les trajectoires suivant l'un des deux axes de symétrie représentés par les vecteurs propres $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ et $\mathbf{e}_2 = (1, -1)$. Notons que par la règle de L'Hôpital on trouve également que la pente des trajectoire à l'origine est $m = 0$ ou $m = -1$.

Les trajectoires en O passent nécessairement le long des axes $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ et $\mathbf{e}_2 = (1, -1)$, ce qui permet de déduire le comportement asymptotique de la solution. En effet, on a au premier ordre :

$$v - v_p = m(r - r_p),$$

or comme : $x dr/dx = v - \beta r$, on tire que :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dr}{(m - \beta)(r - r_P)},$$

d'où par intégration :

$$x \approx (r - r_p)^{1/(m-\beta)},$$

soit après ré-arrangement des termes, on a :

$$y(x) \approx (r_p + x^{m-\beta}) x^\beta.$$

On tire notamment que si $m > \beta$ alors x tend vers l'infini quand $r \rightarrow r_P$. Au contraire, si $m < \beta$ alors x tend vers l'0 quand $r \rightarrow r_P$. Ici on a une valeur plus petite ($m = -1$) et une plus grande ($m = 0$). Il s'ensuit qu'initialement, on doit avoir $m = 0$ puisque $x = 0$ alors qu'asymptotiquement, quand $x \rightarrow \infty$ alors $m \rightarrow -1$. Dans l'espace (r, v) la solution décrit une des courbes tracées dans la figure 6.1 dans le sens rétrograde (aiguille d'une montre). Il s'ensuit qu'asymptotiquement, quand $x \rightarrow \infty$ on a : $y(x) \propto x^m \approx x^{-1}$.

6.1.3 Résoudre l'équation $4\ddot{y} + 9x\dot{y}^{5/3} = 0$ (hélium super-fluide)

Mise en forme

L'équation peut s'écrire $\ddot{y} = w(x, y, \dot{y})$, avec $w(x, y, \dot{y}) = -9\dot{y}^{5/3}x/4$. X est une symétrie de l'équation si $X_{\{2\}}(\ddot{y} - w(x, y, \dot{y})) = 0$.

Équations déterminantes

$$\begin{aligned}
3\xi(x, y) + 2x\eta^{(0,1)}(x, y) + x\xi^{(1,0)}(x, y) &= 0 \\
12x\xi^{(0,1)}(x, y) &= 0 \\
\eta^{(0,2)}(x, y) - 2\xi^{(1,1)}(x, y) &= 0 \\
-4\xi^{(0,2)}(x, y) &= 0 \\
15x\eta^{(1,0)}(x, y) &= 0 \\
2\eta^{(1,1)}(x, y) - \xi^{(2,0)}(x, y) &= 0 \\
4\eta^{(2,0)}(x, y) &= 0
\end{aligned}$$

Il y a deux groupes, dont le groupe « extension » : $X_1 = x\partial_x + \beta y\partial_y$ avec ici $\beta = -2$; le second groupe est : $X_2 = \partial_y$. On a $[X_1, X_2] = 2X_2$.

Invariants

Les invariants fondamentaux $I(x, y, \dot{y}, \ddot{y})$ sont obtenus par la résolution de :

$$\begin{bmatrix} x & -2y & -3\dot{y} & -4\ddot{y} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_{\dot{y}} \\ I_{\ddot{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De la dernière équation, on tire que $I(x, \dot{y}, \ddot{y})$. De la première on tire que les invariants sont $p = \dot{y}x^3$ et $q = \ddot{y}x^4$: $I(p, q)$.

Résolution

L'algèbre étant de dimension 2 comme l'ordre de l'équation différentielle, on aboutit à une équation algébrique :

$$4q + 9p^{5/3} = 0.$$

La sous-algèbre de $\{X_1, X_2\}$ est $\{X_2\}$. On cherche à exprimer X_1 dans la base des invariants de X_2 ($r_2 = x$ et $v_2 = \dot{y}$). On a $\hat{\xi}_1 = X_1 r_2 = x = r_2$ et $\hat{\eta}_1 = X_1^{(1)} v_2 = -3\dot{y} = -3v_2$. Donc : $X_1 = r_2 \partial_{r_2} - 3v_2 \partial_{v_2}$. Dans cette base les invariants sont :

$$\frac{dr_2}{r_2} = \frac{dv_2}{-3v_2} = \frac{d\dot{v}_2}{-4\dot{v}_2}$$

Les invariants sont donc : $r_1 = v_2 r_2^3$ et $v_1 = \dot{v}_2 r_2^4$. Les coordonnées canoniques sont :

$$\begin{aligned}
X_1 r_1 &= 0 \Rightarrow r_1 = v_2 r_2^3, \\
X_1 s_1 &= 1 \Rightarrow s_1 = \ln r_2
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{ds_1}{dr_1} = \frac{D_{r_2} s_1}{D_{r_2} r_1} = \frac{\frac{1}{r_2}}{\frac{dv_2}{dr_2} r_2^3 + 3v_2 r_2^2} = \frac{1}{v_1 + 3r_1}.$$

Notons que dans le cas présent, on a : $r_1 = \dot{y}x^3 = p$ et $v_1 = \ddot{y}x^4 = q$. D'où :

$$\frac{ds_1}{dr_1} = \frac{1}{v_1 + 3r_1} = \frac{1}{q + 3p} = \frac{1}{-\frac{9}{4}r_1^{5/3} + 3r_1},$$

dont la solution est :

$$s_1 = -\frac{1}{2} \ln(-4 + 3r_1^{2/3}) + \frac{1}{3} \ln r_1 + \tilde{a},$$

avec $\tilde{a}$ une constante d'intégration. Soit encore : $\ln r_2 = -\frac{1}{2} \ln(-4 + 3(v_2 r_2^3)^{2/3}) + \frac{1}{3} \ln(v_2 r_2^3) + \tilde{a}$. Après remise en forme : $v_2 = (\frac{3}{4}r_2^2 + \frac{1}{4}a^2)^{-3/2}$.

On réitère le procédé en s'intéressant maintenant au groupe X_2 . Ses coordonnées canoniques sont : $(r_2, s_2) = (x, y)$; son second invariant est $v_2 = \dot{y}$. On a donc :

$$\frac{ds_2}{dr_2} = \frac{ddy}{dx} = v_2 \Rightarrow s_2 = b - \frac{8}{a^2} r_2 \sqrt{\frac{1}{a^2+3} r_2^2}$$

avec b une nouvelle constante d'intégration. La solution s'écrit donc :

$$y = b - \frac{8}{a^2} x \sqrt{\frac{1}{a^2+3} x^2}.$$

Comportement asymptotique

Cherchons b telle que : $y(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \infty$:

$$y(+\infty) = \frac{-8}{\sqrt{3} a^2} + b \Rightarrow b = \frac{8}{\sqrt{3} a^2},$$

d'où :

$$y = \frac{8}{\sqrt{3} a^2} \left(1 - x(x^2 + a^2/3)^{-1/2}\right).$$

6.2 Équations du troisième ordre

6.2.1 Résoudre l'équation $\ddot{y} + y\ddot{y} = 0$ (Blasius)

Mise en forme

L'équation $\ddot{y} + y\ddot{y} = 0$ peut s'écrire $\ddot{y} = w(x, y, \dot{y}, \ddot{y})$, avec $w(x, y, \dot{y}, \ddot{y}) = -y\ddot{y}$. X est une symétrie de l'équation si si $X_{\{3\}}(\ddot{y} - w(w, y, \dot{y}, \ddot{y})) = 0$.

On considère de plus les équations supplémentaires pour les conditions aux limites :

$$y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0, \text{ et } \dot{y}(\infty) = 1.$$

Équations déterminantes

$$\begin{aligned}
 \eta(x, y) + y\xi^{(1,0)}(x, y) + 3\eta^{(1,1)}(x, y) - 3\xi^{(2,0)}(x, y) &= 0 \\
 y\xi^{(0,1)}(x, y) + 3\eta^{(0,2)}(x, y) - 9\xi^{(1,1)}(x, y) &= 0 \\
 -3\xi^{(0,1)}(x, y) &= 0 \\
 y\eta^{(0,2)}(x, y) - 2y\xi^{(1,1)}(x, y) + 3\eta^{(1,2)}(x, y) - 3\xi^{(2,1)}(x, y) &= 0 \\
 -y\xi^{(0,2)}(x, y) + \eta^{(0,3)}(x, y) - 3\xi^{(1,2)}(x, y) &= 0 \\
 -6\xi^{(0,2)}(x, y) &= 0 \\
 -\xi^{(0,3)}(x, y) &= 0 \\
 2y\eta^{(1,1)}(x, y) - y\xi^{(2,0)}(x, y) + 3\eta^{(2,1)}(x, y) - \xi^{(3,0)}(x, y) &= 0 \\
 y\eta^{(2,0)}(x, y) + \eta^{(3,0)}(x, y) &= 0
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Algèbre

On résout le système en faisant l'hypothèse que $\eta = a_i x^j y^k$ et $\xi = b_i x^j y^k$ (avec ici, par exemple, l'ordre maximal $j + k$ égal à 3). On trouve : $\eta = -by$ et $\xi = a + bx$. Les symétries sont donc le groupe translation $X_1 = \partial_x$ et dilatation $X_2 = x\partial_x - y\partial_y$.

Les constantes de structure sont :

$$\begin{aligned}
 [X_1, X_2] &= \partial_x (x\partial_x - y\partial_y) - (x\partial_x - y\partial_y) (\partial_x), \\
 [X_1, X_2] &= \partial_x = X_1.
 \end{aligned}$$

On a la table suivante

	X_1	X_2
X_1	0	X_1
X_2	$-X_1$	0

Recherchons les prolongations à l'ordre 3.

- On a pour X_1 : $\xi_1 = 1$, $\eta = 0$, $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$, et $\eta_3 = 0$. Les invariants de X_1 sont : $r_1 = y$ et $v_1 = \dot{y}$.
- On a pour X_2 : $\xi_1 = x$, $\eta = -y$, $\eta_1 = -2\dot{y}$, $\eta_2 = -3\ddot{y}$, et $\eta_3 = -4\ddot{\ddot{y}}$. Les invariants de X_2 sont donnés par :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{d\dot{y}}{-2\dot{y}} = \frac{d\ddot{y}}{-3\ddot{y}},$$

soit : $r_2 = yx$ et $v_2 = x^2\dot{y}$ ses invariants.

L'algèbre est solvable et la chaîne de sous algèbre est $\{\{0\}, \{X_1\}, \{X_1, X_2\}\}$

6.2.2 Méthode 1 : résolution par itération successive

Il s'agit d'une variante de la suivante. Nous commençons par l'idéal X_1 , dont les deux premiers invariants sont : $r_1 = y$ et $v_1 = \dot{y}$. En dérivant on obtient :

$$\frac{dv_1}{dr_1} = \frac{\ddot{y}}{\dot{y}}$$

en dérivant encore une fois

$$\frac{d^2 v_1}{dr_1^2} = \frac{1}{\dot{y}} \left(\frac{\ddot{y}}{\dot{y}} - \frac{\dot{y}^2}{\dot{y}^2} \right) = -\frac{y\dot{y}\ddot{y} + \dot{y}^2}{\dot{y}^3}.$$

D'où :

$$v_1 \frac{d^2 v_1}{dr_1^2} + \left(\frac{dv_1}{dr_1} \right)^2 + r_1 \frac{dv_1}{dr_1} = 0.$$

On a réduit l'ordre d'une fois. Considérons maintenant le second groupe. L'expression de X_2 dans la base $(r_1 \ v_1)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\hat{\xi} &= X_2 r_1 = -y = -r_1, \\ \hat{\eta} &= X_2^{\{1\}} v_1 = -2\dot{y} = -2v_1.\end{aligned}$$

La prolongation donne : $\hat{\eta}_1 = -\dot{v}_1$. Les invariants dans cette base sont obtenus en examinant :

$$\frac{dr_1}{r_1} = \frac{dv_1}{2v_1} = \frac{d\dot{v}_1}{v_1}.$$

Les invariants sont donc : $r_2 = v_1/r_1^2$ et $v_2 = \dot{v}_1/r_1$. Par différentiation on obtient :

$$\frac{dv_2}{dr_2} = \frac{r_1^2 \ddot{v}_1 - r_1 \dot{v}_1}{r_1 \dot{v}_1 - 2v_1}.$$

Soit encore :

$$\frac{dv_2}{dr_2} = \frac{-\frac{r_1^2}{v_1} \left(\left(\frac{dv_1}{dr_1} \right)^2 + r_1 \frac{dv_1}{dr_1} \right) - r_1 \dot{v}_1}{r_1 \dot{v}_1 - 2v_1}$$

D'où après arrangement des termes :

$$\frac{dv_2}{dr_2} = \frac{r_2 v_2 + v_2^2 + v_2}{2r_2^2 - r_2 v_2}$$

On ne sait pas résoudre cette équation analytiquement. Étudions donc la fonction :

$$\frac{dv}{dr} = \frac{f(r \ v)}{g(r \ v)}$$

avec $f(r \ v) = rv + v + v^2$ et $g(r \ v) = 2r^2 - rv$. Les zéros respectifs de ces fonctions sont les courbes :

- zéros de f : $v = 0$ ou $v = -1 - r$
- zéros de g : $r = 0$ ou $v = 2r$

Il y a trois points critiques où les deux fonctions f et g s'annulent simultanément : $(0,0)$, $(0,-1)$, $(-1/3, -2/3)$. Écrivons la fonction sous la forme matricielle et introduisons une variable muette s ; un développement de Taylor à l'ordre 1 nous conduit à :

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(r \ v) \\ f(r \ v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ f \end{bmatrix}_P + \begin{bmatrix} \partial_r g & \partial_v g \\ \partial_r f & \partial_v f \end{bmatrix}_P \begin{bmatrix} r - r_P \\ v - v_P \end{bmatrix} + \dots$$

Si le point P est un point critique, alors le premier terme est nul. Si l'on recherche des solutions de la forme $r = r_P + Re^{\lambda s}$ et $v = v_P + Ve^{\lambda s}$:

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_r g & \partial_v g \\ \partial_r f & \partial_v f \end{bmatrix}_P \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$$

Donc λ est une valeur propre du gradient de (g, f) au point P . Le comportement de la solution va dépendre du signe de λ . Au point P , on a :

$$\begin{bmatrix} \partial_r g & \partial_v g \\ \partial_r f & \partial_v f \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} 4r - v & -r \\ v & r + 2v + 1 \end{bmatrix}$$

On en déduit :

- en $P = (0, 0)$, les racines sont réelles et de même signe (il s'agit d'un nœud), mais il s'agit aussi d'un point critique *singulier* ou *dégénéré* car le déterminant de la matrice $\nabla(g, f)$ est nul en P ;
- en $P = (-1/3, -2/3)$, les racines sont complexes, les trajectoires forment des spirales autour du point critique ;
- en $P = (0, -1)$, les valeurs sont réelles de signe opposé, il s'agit d'une selle. Les vecteurs propres sont $(0, 1)$ et $(-2, 1)$ et ils donnent les axes des trajectoires qui passent par la selle.

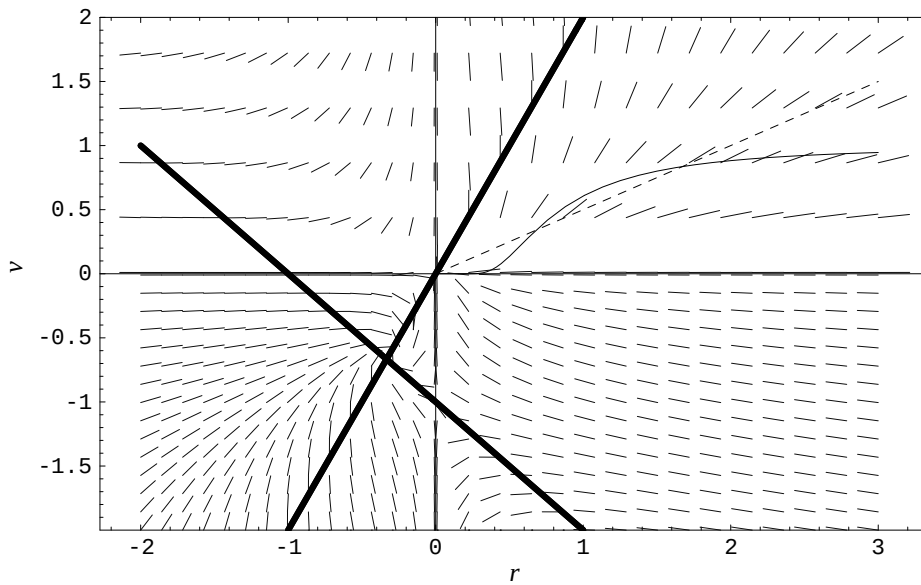


Figure 6.2 : Portrait de phase de l'équation réduite de Blasius dans l'espace des invariants (r, v) . La courbe en trait fin représente la courbe asymptotique près du point origine : $v_0(r) = e^{-\frac{1}{2r}}$; la courbe en pointillé donne le comportement asymptotique en l'infini : $v_\infty = r/2$. Les courbes en gras représentent $f = 0$ et $g = 0$.

Au point origine $P = (0, 0)$, qui est ici un point singulier, plusieurs trajectoires sont possibles *a priori* d'après le portrait phase reporté sur la figure 6.2. Comment déterminer si une trajectoire solution de l'équation passe par le point origine et si c'est le cas comment se comporte-t-elle ? Il y a en fait trois types de comportement possible, qui sont des possibilités exclusives : soit $v \gg r$, soit $v \sim r$, soit $v \ll r$. Examinons chacune d'elle :

- $v \gg r$, alors $f(r) \sim v$ et $g(r) \sim -rv$, d'où $\dot{v} \sim -1/r$ et la solution locale est $v(r) = a - \ln r$. Or le problème est que quand $r \rightarrow 0$, on a $v(r) \rightarrow -\infty$, ce qui n'est pas compatible avec une solution passant par l'origine ;
- $v \sim r$, alors $f(r) \sim r$ et $g(r) \sim r^2$, d'où $\dot{v} \sim 1/r$ et la solution locale est $v(r) = a + \ln r$, ce qui n'est pas compatible avec une solution passant par l'origine ;
- $v \ll r$, alors $f(r) \sim v$ et $g(r) \sim 2r^2$, d'où $\dot{v} \sim v/(2r^2)$ et la solution locale est $v(r) = ae^{-1/2r}$. On vérifie que quand $r \rightarrow 0$, on a $v(r) \rightarrow 0$ et $v \ll r$.

Il s'ensuit que seule la troisième possibilité est la bonne. La courbe résultante (avec arbitrairement $a = 1$) est représentée sur la figure 6.2.

On peut également chercher ce qui se passe vers l'infini $((v, r) \rightarrow \infty)$. Il existe trois méthodes pour y parvenir.

1. *Recherche du comportement de $\dot{v}$ quand $(v, r) \rightarrow \infty$.*

De nouveau, trois possibilités s'offrent : $v \gg r$, $v \sim r$, ou $v \ll r$.

- $v \gg r$, alors $f(r) \sim v^2$ et $g(r) \sim -rv$, d'où $\dot{v} \sim -v/r$ et la solution locale est $v(r) = a/r$. Or le problème est que quand $r \rightarrow \infty$, on a $v(r) \rightarrow 0$, ce qui n'est pas compatible avec une solution passant par l'origine ;
- $v \sim r$, alors $f(r) \sim 2r^2$ et $g(r) \sim r^2$, d'où $\dot{v} \sim 2$ et la solution locale est $v(r) \sim r$, ce qui est possible. Affinons : posons $v = ar$, en reportant dans l'équation approchée, on trouve $a = 1/2$ qui est bien de l'ordre de 1 ;
- $v \ll r$, alors $f(r) \sim rv$ et $g(r) \sim 2r^2$, d'où $\dot{v} \sim v/(2r)$ et la solution locale est $v(r) = a/\sqrt{r}$, ce qui n'est pas compatible avec une solution passant allant vers l'infini.

C'est donc la deuxième solution qui représente le comportement asymptotique de la solution : $v = r/2$ quand $r \rightarrow \infty$. On peut trouver ce résultat différemment.

2. *Recherche de familles de courbes invariantes*

Considérons l'équation réduite et approchons là quand $(v, r) \rightarrow \infty$. On a alors :

$$\frac{dv}{dr} \approx \frac{v}{r} \frac{r+v}{2r-v}$$

Cette équation est invariante pour un grand nombre de symétries, dont la plus simple est la dilatation $Y = r\partial_r + v\partial_v$. Appliquons la méthode du facteur intégrant pour résoudre cette équation, on a : $Ndv + Mdr = 0$, avec $N = r(2r - v)$ et $M = -v(r + v)$. On recherche la solution sous la forme $\psi(r, v) = c$; un facteur intégrant est donc :

$$\mu = \frac{1}{-rv(r+v) + vr(2r-v)} = \frac{1}{rv(r-2v)}.$$

On en déduit :

$$\psi_r = -\frac{1}{rv(r-2v)}v(r+v),$$

$$\psi_v = \frac{1}{rv(r-2v)}r(2r-v).$$

Par intégration on trouve que la solution s'écrit : $\psi : cv^4r = (2v - r)^3$. On note que la solution déterminée précédemment $v_\infty = r/2$ correspondant à $c = 0$ est également solution et correspond à la « ligne » de partage entre les courbes (paramétrées par c) avec $c > 0$ et celles avec $c < 0$ (voir figure 6.3) ; on l'appelle la *séparatrice*.

3. *Recherche de courbe invariante*

Notons que le groupe « dilatation » X_2 est la symétrie de l'équation intermédiaire $v_1\ddot{v}_1 + \dot{v}_1^2 + r_1\dot{v}_1 = 0$. Un invariant est $r_2 = v_1/r_1^2$. On peut donc se demander s'il existe des solutions asymptotiques de la forme $v_1 = Ar_1^2$. En reportant dans l'équation précédente, on trouve $A = 0$ ou bien $A = -1/3$. Dans les nouvelles coordonnées, cela donne $v = r/2$. Donc la solution de l'équation différentielle du premier ordre doit asymptotiquement se raccorder à la droite $v = \frac{1}{2}r$.

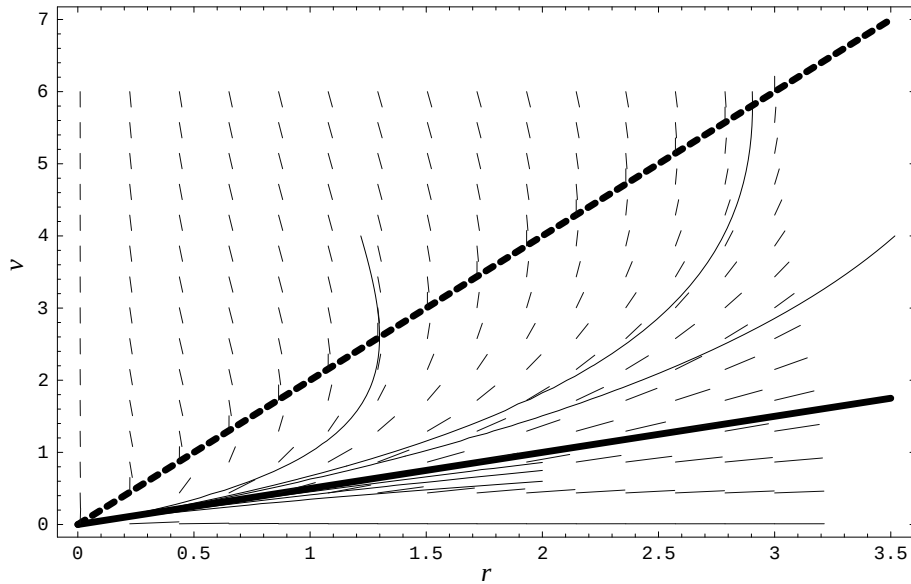


Figure 6.3 : Comportement asymptotique de l'équation de Blasius. La courbe en gras représente la courbe asymptotique $v = r/2$ alors que les courbes à trait fin représentent la famille de courbes $\psi : v^4 r = c(2v - r)^3$. La courbe à tiret gras représente la droite $v = 2r$ pour laquelle $g = 0$.

En résumé, on a trouvé deux approximations de la solution :

- quand $r \rightarrow 0$, alors $v \sim v_0(r) = ae^{-\frac{1}{2r}}$ (a une constante d'intégration inconnue) ;
- quand $r \rightarrow \infty$, alors $v \sim v_\infty(r) = r/2$.

Compte tenu du problème étudié (couche limite), on s'attend à ce que la solution soit contenue dans le premier quadrant (quadrant de droit en haut). Quelles sont les conditions aux limites à appliquer ? Si on regarde celles du problème initial, on note que les conditions à l'origine $y(0) = 0$ et $\dot{y}(0) = 0$ donnent ici : $r \rightarrow \infty$ et $v \rightarrow \infty$. La courbe solution tend vers l'infini quand $x \rightarrow 0$. L'analyse du portrait de phase nous dit que la solution doit tendre vers le point singulier $P = (0, 0)$. On vient voir que la solution approche la courbe $v_0(r) = e^{-\frac{1}{2r}}$, de tangente $m = 0$ à l'origine.

Le problème est que les codes (commerciaux comme Mathematica) de résolution numérique des équations différentielles ne savent pas résoudre cette équation compte tenu de la singularité. Une idée est de se placer un peu plus loin, puis de résoudre l'équation. En se servant du fait que l'on connaît m en P , on peut partir du point $P' = (0 + \varepsilon, 0 + 0 + m'\varepsilon)$ (on ne peut pas prendre $m' = m = 0$ sinon on tombe sur la solution triviale $v = 0$). La figure 6.4 donne un exemple de résolution. On note la sensibilité des résultats selon le choix de m' (cela donne la même chose si on fait varier ε).

Il faut donc procéder différemment. Pour cela il faut utiliser l'information acquise sur le comportement asymptotique de la solution, ici le fait que $v \sim v_\infty = r/2$. Cela fournit un moyen de déterminer la valeur de m' : on se fixe une valeur de ε , on fait un choix de m' , on résout l'équation différentielle numériquement et on examine la valeur de v/r ; on itère jusqu'à ce que $v/r \approx 1/2$. Par exemple, ici avec $\varepsilon = 0.2$, on trouve $m' = 0,06518996$. Avec $\varepsilon = 0.05$, on trouve $m' = 0,000067215$.

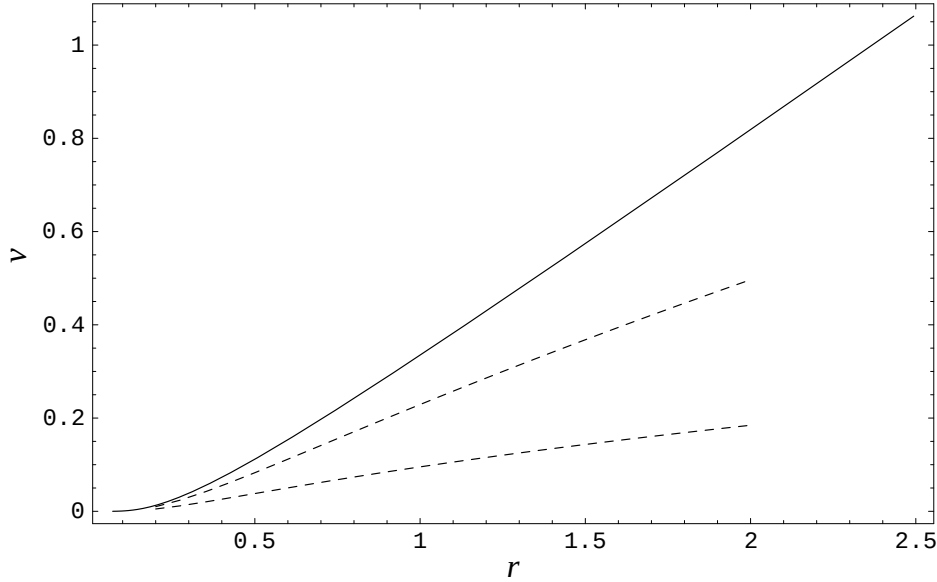


Figure 6.4 : Tentative de résolution de l'équation (r, v) . Courbe continue est la solution $F(r)$ tandis que les courbes à tirets représentent les essais pour $\varepsilon = 0.2$ et $m' = 0.025$ ou $m' = 0.05$.

Maintenant, nous avons donc intégré l'équation et avons déterminé $v(r) = F(r)$ (voir figure 6.4). La seconde étape est de déterminer $v_1(r_1)$. On a :

$$\frac{\dot{v}_1}{r_1} = F\left(\frac{v_1}{r_1^2}\right).$$

En faisant le changement de variable $u = v_1/r_1^2$, on tire :

$$\frac{dr_1}{r_1} = \frac{du}{F(u) - 2u}.$$

On peut tenter de résoudre numériquement cette équation. La difficulté viendra des erreurs numériques possibles. On pourra vérifier la pertinence de la résolution numérique en regardant ce qui se passe asymptotiquement :

- quand $r_2 \rightarrow \infty$, on a : $\dot{v}_1/v_1 = \frac{1}{2}1/r_1$, d'où la solution asymptotique attendue : $v_1 = \alpha r_1$, avec α une constante d'intégration ;
- quand $r_2 \rightarrow 0$, on a : $\dot{v}_1 = ar_1 e^{-\frac{r_1^2}{2v_1}}$. Comme v_1 est tel que $v_1(\infty) = 1$, on peut faire l'hypothèse que $\dot{v}_1 \approx ar_1 e^{-\frac{r_1^2}{2}}$ quand $r_1 \rightarrow \infty$. Cette dernière forme s'intègre pour donner : $v_1 = 1 - ae^{-\frac{r_1^2}{2}}$, avec a une constante d'intégration.

À noter que numériquement il peut être plus intéressant de résoudre numériquement l'équation de Blasius en se donnant une valeur initiale pour $\ddot{y}(0)$, puis d'utiliser l'invariance sous le groupe X_2 pour déterminer la bonne solution. Par exemple, si on résout :

$$\ddot{y} + y\ddot{y} = 0 \text{ avec } y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0, \text{ et } \ddot{y}(0) = 0,2$$

alors on trouve que $\lim_{x \rightarrow \infty} \dot{y}(x) = 0,566067$. Or la solution doit être invariante par le groupe X_2 , donc par une transformation de $x \rightarrow \tilde{x} = e^b x$, $y \rightarrow \tilde{y} = e^{-b} y$, $\dot{y} \rightarrow \tilde{\dot{y}} = e^{-2b} \dot{y}$, etc. Donc le paramètre b nécessaire pour trouver la bonne condition aux limites $y'(\infty) = 1$ est :

$$1 = e^{-2b} 0,566067 \Rightarrow b = -0,284521.$$

On appelle *exact shooting* cette méthode.

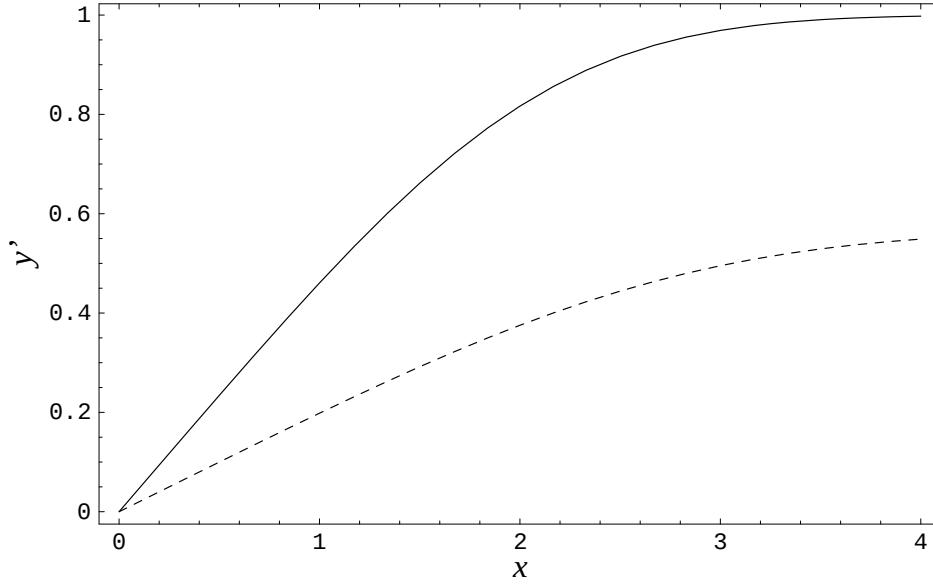


Figure 6.5 : Tentative de résolution directe de l'équation de Blasius: trait en tiret, essai avec $\ddot{y}(0) = 0,2$, trait continu: solution de Blasius. On reporté ici $y'(x)$.

6.2.3 Méthode 2 : invariants fondamentaux

Les invariants fondamentaux sont obtenus par la résolution de :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & -y & -2\dot{y} & -3\ddot{y} & -4\ddot{\dot{y}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_{\dot{y}} \\ I_{\ddot{y}} \\ I_{\ddot{\dot{y}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On aboutit à l'équation caractéristique :

$$\frac{dy}{y} = \frac{d\dot{y}}{2\dot{y}} = \frac{d\ddot{y}}{3\dot{y}}$$

Les invariants fondamentaux sont donc $r = \dot{y}/y^2$ et $v = \ddot{y}/y^3$. Le second invariant s'obtient par différentiation : $dv/dr = (dv/dx)/(dr/dx) = (\ddot{\dot{y}}y^{-4} - 3rv)/(v - 2r^2)$. L'équation différentielle s'écrit donc :

$$\dot{v}(v - 2r^2) + v(1 + 3r) = 0.$$

Les conditions aux limites pour cette équation sont : $v(0) = 0$ (correspondant à $y'(\infty) = 1$) et quand $r \rightarrow \infty$, $v \rightarrow \infty$. On ne sait pas résoudre analytiquement cette équation. De plus, comme le montre le portrait de phase (voir figure 6.6), le point O est singulier. On peut procéder comme pour la méthode 1 et chercher des solutions asymptotiques. Ici on trouve que :

- quand $r \rightarrow 0$, alors $v \sim e^{-1/r}$;
- quand $r \rightarrow \infty$, alors $v \sim r^{3/2}$.

Admettons qu'on ait trouvé une solution numérique à l'équation et appelons-la $v = F(r)$.

Pour résoudre cette équation, nous allons utiliser que l'algèbre $\{X_1, X_2\}$ contient la sous-algèbre $\{X_1\}$. On se sert donc d'abord du groupe restant X_2 qu'on cherche à exprimer dans

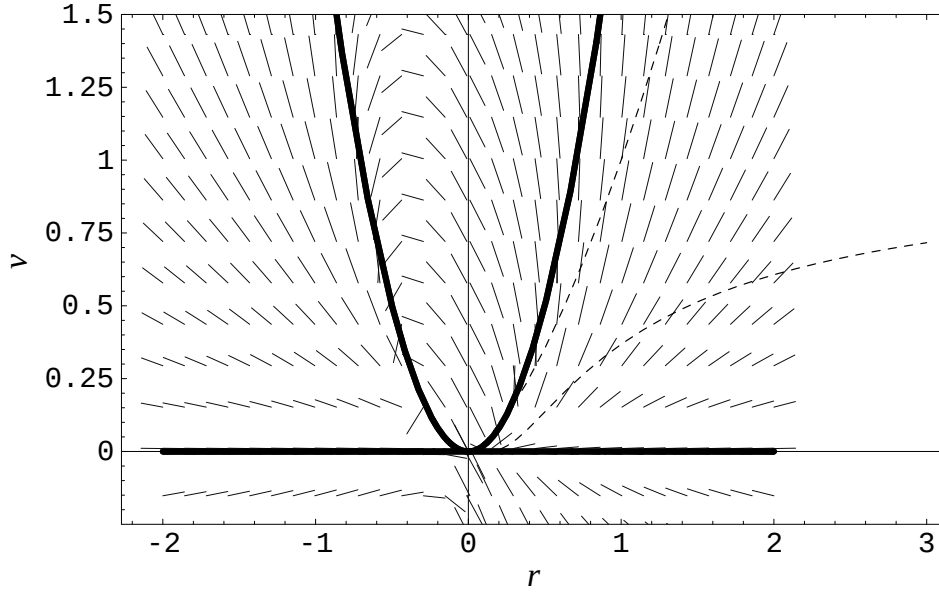


Figure 6.6 : Portrait de phase de l'équation réduite.

la base des invariants de X_1 . On a $X_2 = x\partial_x - y\partial_y$. Ses coefficients infinitésimaux sont : $\hat{\xi} = X_2 r_1 = -y = -r_1$ et $\hat{\eta} = X_2^{(1)} v_1 = -2\dot{y} = -2v_1$. Donc : $X_2 = -r_1\partial_{r_1} - 2v_1\partial_{v_1}$. Si on prolonge à l'ordre 1, on a : $\hat{\eta}_1 = D_{r_1}\hat{\eta} - \dot{v}_1 d\hat{\xi}/dr_1 = -\dot{v}_1$. Dans cette base, les invariants sont :

$$\frac{dr_1}{r_1} = \frac{dv_1}{2v_1} = \frac{d\dot{v}_1}{\dot{v}_1},$$

c'est-à-dire : $r_2 = v_1/r_1^2$ et $v_2 = \dot{v}_1/r_1$.

Calculons maintenant les coordonnées canoniques :

$$X_2 r_2 = 0 \Rightarrow r_2 = \frac{v_1}{r_1^2},$$

$$X_2 s_2 = 1 \Rightarrow s_2 = \ln 1/r_1$$

On en déduit que :

$$\frac{ds_2}{dr_2} = \frac{D_{r_1}s_2}{D_{r_1}r_2} = \frac{1}{2r_2 - v_2}$$

Il faut maintenant exprimer r_2 et v_2 en fonction de v et r . On sait qu'il existe une relation entre eux puisque v et r sont les invariants fondamentaux de $\{X_1, X_2\}$, donc de X_2 . On trouve tout de suite que $r_2 = r$. Pour v_2 , notons que :

$$v_2 = \frac{\dot{v}_1}{v_1} = \frac{1}{v_1} \frac{dv_1}{dx} \frac{dx}{dr_1} = \frac{1}{y} \frac{\dot{y}}{\dot{y}} = \frac{v}{r_2} = \frac{F(r_2)}{r_2}.$$

En reportant dans ds_2/dr_2 , on tire :

$$\frac{ds_2}{dr_2} = \frac{r_2}{2r_2^2 - F(r_2)}$$

On réitère le procédé. Comme on le voit ici, cette deuxième méthode n'est pas très performante.

7

Les équations aux dérivées partielles et leurs symétries

7.1 Transformations finies de dérivées partielles

7.1.1 Notations

Précisons tout d'abord les notations : on s'intéresse à la résolution d'une équation différentielle comme l'équation de la chaleur, de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

que l'on écrit sous la forme condensée : $\Psi(u_t, u_{xx}) = 0$. Ici l'indice renvoie à la variable servant à la différentiation ; u s'appelle la *variable dépendante* alors que (x, t) sont les *variables indépendantes*. On va considérer des problèmes très généraux où la fonction dépendante est un vecteur $\mathbf{y} = (y^i)$ avec $i = 1 \dots m$. On note que la variable i mise en exposant indique la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur et elle a été mise en exposant pour ne pas confondre avec l'indice qui indique ici systématiquement une différentiation. De même, on suppose que, pour la variable indépendante, le cas général est un vecteur $\mathbf{x} = (x^j)$ avec $j = 1 \dots n$. Dans l'équation de la chaleur on a : $m = 1$ et $n = 2$. On notera par la suite, de manière indifférente, la dérivée partielle : $y_j = \partial y / \partial x_j = y_{x_j}$. La convention d'Einstein (deux indices identiques dans le même groupe) indique tacitement une sommation : $x_i z_i = \sum_j x_j z_j$. D_k est l'opérateur différentiel total vu précédemment (voir § 5.1.5).

On introduit le changement de variable suivant qui dépend d'un seul paramètre s :

$$\tilde{x}^j = F^j[\mathbf{x}, \mathbf{y}, s] \quad (7.1)$$

$$\tilde{y}^i = G^i[\mathbf{x}, \mathbf{y}, s] \quad (7.2)$$

Les dérivées partielles de la transformée $\tilde{y}^i$ vérifient :

$$D\tilde{y}^i = \tilde{y}_j^i d\tilde{x}^j,$$

or on a aussi :

$$d\tilde{x}^j = D_k F^j[\mathbf{x}, \mathbf{y}, s] dx^k \quad (7.3)$$

$$d\tilde{y}^i = D_k G^i[\mathbf{x}, \mathbf{y}, s] dx^k \quad (7.4)$$

$D_k F^j[\mathbf{x}, \mathbf{y}, s]$ et $D_k G^i[\mathbf{x}, \mathbf{y}, s]$ sont deux matrices $m \times n$. Si le jacobien de la transformation n'est pas nul ($\det D_k F^j[\mathbf{x}, \mathbf{y}, s] \neq 0$), alors on tire :

$$\tilde{y}_j^i = (D_k G^i)(D_j F^k)^{-1} \quad (7.5)$$

On peut comme précédemment définir le groupe une fois étendu (qui est une matrice) :

$$\tilde{x}^j = F^j[\mathbf{x}, \mathbf{y}, s]$$

$$\tilde{y}^i = G^i[\mathbf{x}, \mathbf{y}, s]$$

$$\tilde{y}_j^i = G_{\{j\}}^i[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}_1, s]$$

avec $G_{\{j\}}^i = (D_k G^i)(D_j F^k)^{-1}$. On a employé la notation indicielle $\{j\}$ non pas pour montrer que l'opérateur agissait comme une différentiation par rapport à x^j , mais pour désigner le rang de la fonction (rappelons que $(D_k G^i)(D_j F^k)^{-1}$ est une matrice). La grandeur $\mathbf{y}_1$ est un vecteur composé de toutes les dérivées partielles du premier ordre de $\mathbf{y}$: $\mathbf{y}_1 = (\mathbf{y}_{x_1} \cdots \mathbf{y}_{x_n})$.

7.1.2 Transformations infinitésimales

Admettons que le paramètre s soit très petit, alors on a au premier ordre :

$$\tilde{x}^j = F^j[\mathbf{x}, \mathbf{y}, s] = x^j + s\xi^j[\mathbf{x}, \mathbf{y}] + o(s)$$

$$\tilde{y}^i = G^i[\mathbf{x}, \mathbf{y}, s] = y^i + s\eta^i[\mathbf{x}, \mathbf{y}] + o(s)$$

avec $\xi^j[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = (\partial F^j / \partial s)_{s=0}$ et $\eta^i[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = (\partial G^i / \partial s)_{s=0}$. D'où :

$$\tilde{y}_j^i = (D_k(y^i + s\eta^i))(D_j(x^k + s\xi^k))^{-1} = (y_k^i + sD_k\eta^i)(\delta_j^k + sD_j\xi^k)^{-1} \approx y_j^i + s(D_j\eta^i - y_k^i D_k\xi^k)$$

$$\tilde{y}_j^i \approx y_j^i + s(D_j\eta^i - y_k^i D_k\xi^k)$$

On tire les relations pour le groupe une fois étendu :

$$\tilde{x}^j = x^j + s\xi^j$$

$$\tilde{y}^i = y^i + s\eta^i$$

$$\tilde{y}_j^i = y_j^i + s\eta_{\{j\}}^i$$

avec $\eta_{\{j\}}^i[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}_1] = D_j\eta^i - y_k^i D_k\xi^k$.

On peut généraliser à des dérivées d'ordre supérieur :

$$\tilde{x}^j = x^j + s\xi^j$$

$$\tilde{y}^i = y^i + s\eta^i$$

$$\tilde{y}_j^i = y_j^i + s\eta_{\{j\}}^i$$

$$\tilde{y}_{j_1 j_2}^i = y_{j_1 j_2}^i + s\eta_{\{j_1 j_2\}}^i$$

avec $\eta_{\{j_1 j_2\}}^i[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2] = D_{j_2}\eta_{\{j_1\}}^i - y_k^i D_k\xi^k$, $\mathbf{y}_2$ désigne le vecteur de toutes les dérivées d'ordre 2, et rappelons que :

$$D_{j_2}\eta_{\{j_1\}}^i = \frac{\partial \eta_{\{j_1\}}^i}{\partial x^{j_2}} + y_{j_2}^k \frac{\partial \eta_{\{j_1\}}^i}{\partial y^k} + y_{\ell j_2}^k \frac{\partial \eta_{\{j_1\}}^i}{\partial y_\ell^k}$$

7.1.3 Condition d'invariance pour les EDP

Un système différentiel d'ordre p composé de q équations de la forme $\Psi^i = \Psi^i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_p)$ ($1 \leq i \leq q$) peut se décomposer en une série de Lie :

$$\begin{aligned} & \Psi^i(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{y}}_1, \tilde{\mathbf{y}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_p) = \\ & \Psi^i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_p) + sX_{\{p\}}\Psi^i + \frac{s^2}{2}X_{\{p\}}(X_{\{p\}}\Psi^i) + \dots \end{aligned} \quad (7.6)$$

avec $X_{\{p\}}$ le groupe p fois étendu :

$$X_{\{p\}} = \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \eta^i \frac{\partial}{\partial y^i} + \eta_{\{j_1\}}^i \frac{\partial}{\partial y_{\{j_1\}}^i} + \dots \quad (7.7)$$

On dit que le système Ψ^i est invariant par le groupe (ξ^j, η^i) si et seulement si :

$$\boxed{X_{\{p\}}\Psi^i = 0, \text{ pour } i = 1, \dots, m} \quad (7.8)$$

Les équations caractéristiques correspondant à cette condition sont :

$$\boxed{\frac{dx^j}{\xi^j} = \frac{dy^i}{\eta^i} = \frac{dy_{\{j_1\}}^i}{\eta_{\{j_1\}}^i} = \dots = \frac{dy_{\{j_1 j_2 \dots j_p\}}^i}{\eta_{\{j_1 j_2 \dots j_p\}}^i}}$$

7.2 Équations scalaires à deux variables dépendantes

7.2.1 Changement de variables et condition de symétrie

Comme exemple d'application, intéressons-nous à des équations scalaires à deux variables dépendantes ($m = 1, n = 2$). Une transformation ponctuelle est donc un difféomorphisme :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \tilde{x}(x, t, u(x, t)) \\ \tilde{t} &= \tilde{t}(x, t, u(x, t)) \\ \tilde{u} &= \tilde{u}(x, t, u(x, t)) \end{aligned} \quad (7.9)$$

On introduit les opérateurs « dérivée totale » afin de pouvoir différentier 7.9 par rapport à x et t . Ces opérateurs traitent u comme une fonction *dépendante* des variables *indépendantes* x et t :

$$\begin{aligned} D_x &= \partial_x + u_x \partial_u + u_{xx} \partial_{u_x} + u_{xt} \partial_{u_t} + \dots \\ D_t &= \partial_t + u_t \partial_u + u_{tt} \partial_{u_t} + u_{xt} \partial_{u_x} + \dots \end{aligned} \quad (7.10)$$

On veut inverser les deux premières équations de (7.9) pour obtenir x et t en fonction de $\tilde{x}$ et $\tilde{t}$. Cela est réalisable localement si le jacobien de la transformation est non nul :

$$J = \begin{vmatrix} D_x \tilde{x} & D_x \tilde{t} \\ D_t \tilde{x} & D_t \tilde{t} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (7.11)$$

Sous cette condition, on peut écrire : $\tilde{u} = \tilde{u}(x, t, u(x, t)) = \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t})$. La dérivée par rapport à une des variables indépendantes est donc : $D_x \tilde{u} = \tilde{u}_{\tilde{x}} D_x \tilde{x} + \tilde{u}_{\tilde{t}} D_t \tilde{t}$ ou sous forme condensée :

$$\begin{bmatrix} D_x \tilde{u} \\ D_t \tilde{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x \tilde{x} & D_x \tilde{t} \\ D_t \tilde{x} & D_t \tilde{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\tilde{x}} \\ u_{\tilde{t}} \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

On en déduit directement (loi de Cramer¹) :

$$\tilde{u}_{\tilde{x}} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} D_x \tilde{u} & D_x \tilde{t} \\ D_t \tilde{u} & D_t \tilde{t} \end{vmatrix} \quad \tilde{u}_{\tilde{t}} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} D_x \tilde{x} & D_x \tilde{u} \\ D_t \tilde{x} & D_t \tilde{u} \end{vmatrix} \quad (7.13)$$

En itérant la procédure, on peut obtenir les dérivées d'ordre supérieur. On dit qu'une équation différentielle $\Psi(x, t, u) = 0$ est invariante pour une transformation si l'on a :

$$\Psi(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u}) = 0$$

quand $\Psi(x, t, u) = 0$ est vérifiée.

7.2.2 Condition de symétrie pour les groupes de Lie

Si l'on s'intéresse aux groupes de Lie (par exemple pour trouver les groupes laissant invariante une équation différentielle), alors on écrit le changement de variable (7.9) sous la forme infinitésimale :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + \epsilon \xi(x, t, u(x, t)) + O(\epsilon^2) \\ \tilde{t} &= t + \epsilon \tau(x, t, u(x, t)) + O(\epsilon^2) \\ \tilde{u} &= u + \epsilon \eta(x, t, u(x, t)) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (7.14)$$

Le générateur infinitésimal est donc :

$$X = \xi \partial_x + \tau \partial_t + \eta \partial_u$$

Une surface $u = u(x, t)$ est invariante sous l'action du groupe si $Xu = 0$ ou bien encore si :

$$Q = 0 \text{ quand } u(x, t) = 0,$$

avec Q la fonction caractéristique du groupe : $Q = \eta - \xi u_x - \tau u_t$.

La prolongation de la transformation ponctuelle (7.14) à l'ordre 1 s'écrit :

$$\tilde{u}_{\tilde{x}} = u_x + \epsilon \eta_{\{x\}}(x, t, u, u_x, u_t) + O(\epsilon^2)$$

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} = u_t + \epsilon \eta_{\{t\}}(x, t, u, u_x, u_t) + O(\epsilon^2)$$

En comparant avec le résultat précédent (7.13), on peut identifier les prolongations à l'ordre 1 :

$$\eta_{\{x\}} = D_x \eta - u_x D_x \xi - u_t D_x \tau \quad (7.15)$$

$$\eta_{\{t\}} = D_t \eta - u_x D_t \xi - u_t D_t \tau \quad (7.16)$$

1. La loi de Cramer dit que l'on veut résoudre un système linéaire de la forme :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = B,$$

avec $X = (x_i)$ avec $1 \leq i \leq n$, alors $\mathbf{X}$ est obtenu en calculant :

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det \mathbf{A}}$$

où A_i est une matrice identique à $\mathbf{A}$ si ce n'est que l'on a remplacé à $i^{\text{ème}}$ colonne par le vecteur $\mathbf{B}$.

et ainsi de suite pour les ordres supérieurs. On peut aussi définir les fonctions $\eta_{\{ \cdot \}}$ à l'aide de la caractéristique Q :

$$\eta_{\{x\}} = D_x Q + \xi u_{xx} + \tau u_{xt} \quad (7.17)$$

$$\eta_{\{t\}} = D_t Q + \xi u_{xt} + \tau u_{tt} \quad (7.18)$$

De manière générale, on montre que la prolongation à l'ordre j portant sur une différentiation à l'ordre j_1 sur x et j_2 sur t (avec bien sûr $j = j_1 + j_2$) donne :

$$\boxed{\eta_{\{j\}} = D_j Q + \xi D_j u_x + \tau D_j u_t} \quad (7.19)$$

où D_j signifie $D_j = D_x^{j_1} D_t^{j_2}$. L'opérateur infinitésimal est prolongé à l'ordre désiré :

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= X + \eta_{\{x\}} \partial_{u_x} + \eta_{\{t\}} \partial_{u_t}, \\ X^{(2)} &= X^{(1)} + \eta_{\{xx\}} \partial_{u_{xx}} + \eta_{\{xt\}} \partial_{u_{xt}} + \eta_{\{tt\}} \partial_{u_{tt}}. \end{aligned}$$

7.2.3 Exemple : équation linéaire de diffusion

Considérons l'équation :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (7.20)$$

qui correspond à l'équation de la chaleur. Pour simplifier, on pose $\lambda = 1$. On recherche les groupes qui laissent invariante cette équation. On fait le changement de variables :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + \epsilon \xi(x, t, u(x, t)), \\ \tilde{t} &= t + \epsilon \tau(x, t, u(x, t)), \\ \tilde{u} &= u + \epsilon \eta(x, t, u(x, t)), \\ \tilde{u}_{\tilde{x}} &= u_x + \epsilon \eta_{\{x\}}(x, t, u, u_x, u_t), \\ \tilde{u}_{\tilde{t}} &= u_t + \epsilon \eta_{\{t\}}(x, t, u, u_x, u_t), \\ \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} &= u_{xx} + \epsilon \eta_{\{xx\}}(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}), \\ \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{t}} &= u_{xt} + \epsilon \eta_{\{xt\}}(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}), \\ \tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{t}} &= u_{tt} + \epsilon \eta_{\{tt\}}(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}). \end{aligned} \quad (7.21)$$

La condition d'invariance s'écrit :

$$X^{(2)}[\Psi] = 0,$$

soit encore :

$$(\eta \partial_x + \eta \partial_t + \eta_{\{x\}} \partial_{u_x} + \eta_{\{t\}} \partial_{u_t} + \eta_{\{xx\}} \partial_{u_{xx}} + \eta_{\{xt\}} \partial_{u_{xt}} + \eta_{\{tt\}} \partial_{u_{tt}}) \Psi = 0.$$

On trouve finalement : $\eta_{\{t\}} = \eta_{\{xx\}}$ qui ressemble à l'équation originale parce qu'elle est linéaire. Calculons les extensions de η :

$$\begin{aligned} \eta_{\{x\}} &= D_x \eta - u_x D_x \xi - u_t D_x \tau, \\ \eta_{\{t\}} &= D_t \eta - u_x D_t \xi - u_t D_t \tau, \\ \eta_{\{xx\}} &= D_x \eta_x - u_{xx} D_x \xi - u_{xt} D_x \tau. \end{aligned}$$

En résolvant les équations déterminantes, on trouve 6 groupes :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = t \frac{\partial}{\partial x} - \frac{xu}{2} \frac{\partial}{\partial u}, X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} - 2t \frac{\partial}{\partial t},$$

$$X_4 = xt \frac{\partial}{\partial x} + t^2 \frac{\partial}{\partial t} + u \left(\frac{x^2}{4} + \frac{t}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x}, X_5 = \frac{\partial}{\partial t}, \text{ et } X_6 = u \frac{\partial}{\partial u}.$$

On a la table suivante

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_1	0	$-X_6/2$	X_1	X_2	0	0
X_2	$X_6/2$	0	$-X_2$	0	$-X_1$	0
X_3	$-X_1$	X_2	0	$2X_4$	$-2X_5$	0
X_4	$-X_2$	0	$-2X_4$	0	$-X_3 + X_6/2$	0
X_5	0	X_1	$2X_5$	$X_3 - X_6/2$	0	0
X_6	0	0	0	0	0	0

7.2.4 Exemple : équation non linéaire de diffusion

Considérons l'équation :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (7.22)$$

qui correspond à l'équation de la chaleur $\partial_t = \partial_x(\kappa \partial_x T)$ dans laquelle le coefficient de diffusivité de la chaleur κ varie linéairement avec la température T : $\kappa = \lambda T$.

Cette équation est invariante pour quatre groupes :

$$X_1 = \partial_x, X_2 = \partial_t, X_3 = x\partial_x + 2t\partial_t, \text{ et } X_4 = x\partial_x + 2T\partial_T$$

On considère les conditions initiales :

$$T(x,0) = 0, \text{ pour } x > 0,$$

$$T(0,t) = T_0, \text{ pour } t > 0.$$

Intéressons-nous au groupe dilatation $X_3 = x\partial_x + 2t\partial_t$, qui laisse également les conditions aux limites et initiales invariantes. Les invariants du groupe sont :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{2t} = \frac{dT}{T}$$

soit donc T et $x/\sqrt{t}$. Pour utiliser des variables adimensionnelles, on introduit :

$$T = T_0 g(\theta) \text{ et } \theta = \frac{x}{\sqrt{2\lambda t_0 t}}.$$

On est amené à résoudre l'équation différentielle :

$$gg_{\theta\theta} + \theta g_{\theta} + g_{\theta}^2 = 0 \quad (7.23)$$

avec les conditions aux limites : $g(0) = 1$ et $g(\infty) = 0$. On trouve que cette équation est invariante uniquement pour le groupe $Y = \theta\partial_{\theta} + 2g\partial_g$, dont les invariants sont :

$$r = \frac{g}{\theta^2} \text{ et } v = \frac{g_{\theta}}{\theta}.$$

On retombe sur l'équation résolue précédemment pour l'équation de Blasius, à savoir :

$$\frac{dv}{dr} = \frac{rv + v + v^2}{2r^2 - rv} \quad (7.24)$$

Le portrait de phase de cette équation a été donnée à la figure 6.2. La trajectoire est nécessairement dans le quadrant $r > 0, v < 0$. Si on admet que la solution loin du mur ($x \gg 1$, donc $r \rightarrow 0$) admet des dérivées qui ne sont pas infinies, notamment $g_{\theta\theta}$ prend une valeur finie, alors quand la température s'annule $g = 0$, on a $r = 0$. L'équation 7.23 renseigne alors sur v : quand $g = 0$, $\theta g_{\theta}(\theta + g_{\theta}) = 0$, soit la dérivée s'annule soit elle prend la valeur finie $\theta_0 = \theta_{g=0}$. Donc les points solutions dans le plan des phases sont $(r, v) = (0, 0)$ et $(r, v) = (0, -1)$. Or le portrait de phase montre que les trajectoires issues du point origine s'incurvent rapidement donc $v \rightarrow cst$ quand $r \rightarrow \infty$ alors qu'on s'attend à $v \rightarrow \infty$. En revanche, cela semble marcher pour le point $(r, v) = (0, -1)$. Une analyse du point singulier montre que la pente locale doit être $-1/2$. On déduit donc les conditions initiales pour résoudre l'équation 7.24 : quand $r = 0, v = -1$ et $v_r = -1/2$. Près de ce point critique, la solution se comporte :

$$v = -\frac{1}{2}r - 1,$$

et par intégration on tire que :

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} g = \frac{2}{5} \left(\frac{\theta_0^{5/2}}{\sqrt{\theta}} - \theta^2 \right).$$

Il s'ensuit que la solution $T = T_0 g(\theta)$ diminue sur l'intervalle $[0, \theta_0]$ entre T_0 et 0. En $\theta = \theta_0$, il se produit donc un choc puisque la solution n'est pas uniformément continue : la dérivée de g prend la valeur $-\theta_0$ à gauche du choc et 0 à droite (voir figure 7.1).

Numériquement, on résout l'équation 7.23 par la méthode du tir en faisant varier $g'(0)$ jusqu'à ce que la dérivée au point θ_0 où g s'annule soit égale à -1. On trouve ainsi que $g'(0) = -0,6275549$ et que $\theta_0 = 1,14277$. Comme le montre la figure 7.1, il y a un choc en θ_0 . Si on reprend les coordonnées physiques, on trouve que ce choc se déplace comme : $x = \theta_0 \sqrt{2\lambda T_0 t}$.

7.2.5 Exemple : équation de couche limite avec gradient de pression

L'équation générale d'une couche limite soumise à un gradient de pression est :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - U_e \frac{dU_e}{dx} - \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = 0,$$

avec $U_e = U_e(x)$. Les transformations infinitésimales sont :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + \epsilon \xi(x, y, \psi(x, y)) + O(\epsilon^2) \\ \tilde{y} &= y + \epsilon \tau(x, y, \psi(x, y)) + O(\epsilon^2) \\ \tilde{\psi} &= \psi + \epsilon \eta(x, y, \psi(x, y)) + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

On trouve que les coefficients infinitésimaux doivent vérifier :

$$\begin{aligned} \xi(x, y, \psi) &= a \frac{4U_e U_e'}{U_e'^2 + U_e U_e''} \\ \tau(x, y, \psi) &= -ay + g(x) \\ \eta(x, y, \psi) &= a\psi + b \end{aligned}$$

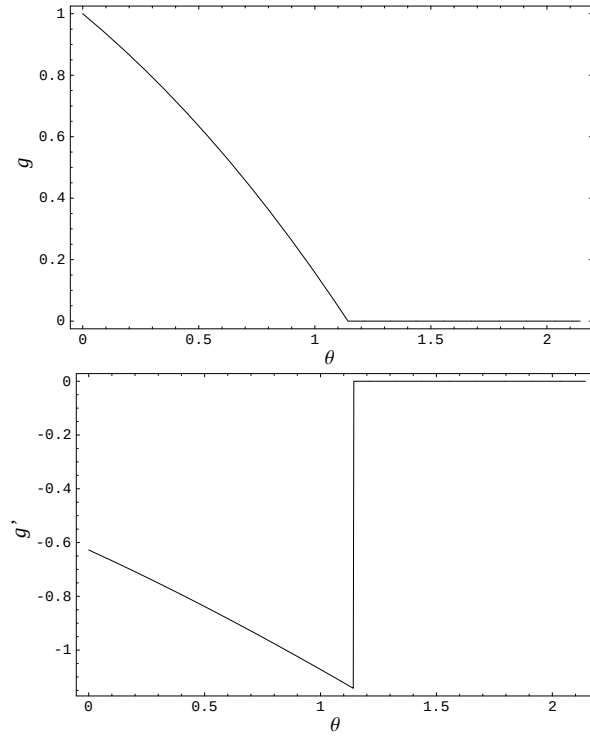


Figure 7.1 : Solution de l'équation 7.23.

où a et b sont deux constantes, g une fonction arbitraire. L'équation est d'ordre $p = 3$ a pour opérateur infinitésimal prolongé :

$$X^{(3)} = \xi \partial_x + \tau \partial_y + \eta \partial_\psi + \eta_{\{x\}} \partial_{\{u_x\}} + \eta_{\{y\}} \partial_{\{u_y\}} + \eta_{\{xx\}} \partial_{\{u_{xx}\}} + \eta_{\{yy\}} \partial_{\{u_{yy}\}} + \eta_{\{xy\}} \partial_{\{u_{xy}\}} + \eta_{\{xxx\}} \partial_{\{u_{xxx}\}} + \eta_{\{yyy\}} \partial_{\{u_{yyy}\}} + \eta_{\{x^2y\}} \partial_{\{u_{xxy}\}} + \eta_{\{xy^2\}} \partial_{\{u_{xyy}\}}$$

Comme l'équation à résoudre est indépendante d'un certain nombre de termes, il est possible de simplifier cette équation en :

$$X^{(3)} = \xi \partial_x + \eta_{\{x\}} \partial_{u_x} + \eta_{\{y\}} \partial_{u_y} + \eta_{\{yy\}} \partial_{u_{yy}} + \eta_{\{xy\}} \partial_{u_{xy}} + \eta_{\{yyy\}} \partial_{u_{yyy}}$$

où les termes $\tau \partial_y$, $\eta \partial_\psi$, etc. ont disparu parce qu'il n'y avait pas de termes fonctions explicites de y , ψ , etc.

Dans le cas présent, on calcule chacun des coefficients infinitésimaux ci-dessus, puis on forme $X^{(3)}(\psi_{yyy} - \omega(x, y, \psi))$. On trouve :

$$\left(U_e'^4 - U_e U_e'^2 U_e'' + U_e^2 U_e''^2 - U_e^2 U_e' U_e^{(3)} \right) \left(\psi^{(0,2)} \psi^{(1,0)} - \psi^{(0,1)} \psi^{(1,1)} \right) = 0$$

Pour que la condition de symétrie soit vérifiée, il faut que U_e vérifie l'équation :

$$U_e'^4 - U_e U_e'^2 U_e'' + U_e^2 U_e''^2 - U_e^2 U_e' U_e^{(3)} = 0$$

dont la solution est de la forme $U_e = \alpha + \beta e^{\gamma x}$.

Un autre résultat remarquable est que si $\psi(x, y)$ est solution de l'équation originelle pour un profil plat (c'est-à-dire, $y = 0$) et un champ de vitesse U_e , alors $\tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y} - g(\tilde{x}))$ est solution du problème sur une surface de la forme $\tilde{y} = g(\tilde{x})$ et $U_e(x) = U_e(\tilde{x})$.

7.3 Solutions similaires pour les équations aux dérivées partielles

7.3.1 Généralités : passage EDP $\rightarrow$ EDO

Considérons une équation aux dérivées partielles de la forme $F(c, z, t)$ avec c la variable dépendante, z et t les variables indépendantes. Nous considérons le groupe « extension » à un paramètre λ :

$$c \rightarrow c' = \lambda^\alpha c, \quad (7.25)$$

$$t \rightarrow t' = \lambda^\beta t, \quad (7.26)$$

$$z \rightarrow z' = \lambda z. \quad (7.27)$$

où α et β sont deux paramètres de la famille. Toutes les valeurs de α et β ne sont pas admissibles ; pour chaque équation aux dérivées partielles et pour des conditions aux limites données, on peut trouver un jeu de constantes L , M , et N tel que $M\alpha + N\beta = L$. Une équation différentielle invariante par le groupe donne une solution, dite solution similaire, qui peut se mettre sous la forme :

$$c(z, t) = t^{\alpha/\beta} f(z/t^{1/\beta}) \quad (7.28)$$

Quand on injecte cette expression dans l'équation aux dérivées partielles, on aboutit à une équation différentielle ordinaire de f . Notons que tous les problèmes différentiels ne permettent pas d'aboutir à une solution même s'ils sont invariants, notamment parce que les conditions aux limites et initiales ne peuvent pas être choisies n'importe comment ; au contraire, l'équation 7.28 montre qu'en $z = 0$, on doit avoir $c(0, t) \propto t^{\alpha/\beta}$. On appelle *équation différentielle principale* une telle équation. On montre que cette équation est elle-même invariante au groupe extension suivant :

$$x' = \lambda x \quad (7.29)$$

$$y' = \lambda^{L/M} y \quad (7.30)$$

7.3.2 Comportement asymptotique

Quand une équation différentielle est invariante pour un groupe extension donné, ce groupe peut être utilisé afin de déterminer la forme asymptotique de certaines solutions. Écrivons ce groupe dans le cas de deux variables x et y :

$$x' = \lambda x \quad (7.31)$$

$$y' = \lambda^\beta y \quad (7.32)$$

(par la suite on reprendra $\beta = L/M$). Les coefficients de la transformation infinitésimale sont : $\xi = x$, $\eta = \beta y$, $\eta_1 = (\beta - 1)\dot{y}$, et $\eta_2 = (\beta - 2)\ddot{y}$. Il s'ensuit que le système caractéristique associé à l'équation différentielle principale (invariante par ce groupe) s'écrit :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{\beta y} = \frac{d\dot{y}}{(\beta - 1)\dot{y}} = \frac{d\ddot{y}}{(\beta - 2)\ddot{y}}$$

les intégrales premières sont y/x^β , $\dot{y}/x^{\beta-1}$, et $\ddot{y}/x^{\beta-2}$. La solution générale de cette équation s'écrit donc sous la forme :

$$\phi\left(y/x^\beta, \dot{y}/x^{\beta-1}, \ddot{y}/x^{\beta-2}\right) = 0$$

Une fonction puissance $y = Ax^\beta$ est solution si la constante A vérifie $\phi(A, A\beta, A\beta(\beta - 1)) = 0$. Une de ces solutions donne le comportement des solutions de l'équation aux dérivées partielles telles que $y \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \infty$. De manière générale, les solutions de l'équation différentielle principale peuvent être classées par leur ordonnée à l'origine $y(0)$ et elles sont toutes les images les unes des autres. Comme l'image de $(0, y(0))$ est $(0, \lambda^\beta y(0))$, il est toujours possible de déterminer une valeur de λ telle que $\lambda^\beta y(0) = a$. Ces solutions sont telles que :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x^\beta} = B$$

où B est quelconque et identique pour toutes les solutions puisqu'elles sont images les unes des autres. Quand $\beta < 0$, on peut montrer que $B = A_*$, où A_* est la plus petite racine de $\phi(A, A\beta, A\beta(\beta - 1)) = 0$.

Revenons maintenant à l'équation différentielle principale. Si $L/M < 0$, alors les solutions positives similaires sont asymptotiques à la solution $y(x) = A_* x^{L/M}$, soit encore : $c = A_* z^{L/M} t^{-N/M}$.

♣ **Exemple.** – Les équations de Saint Venant s'écrivent de manière simplifiée et adimensionnelle sous la forme :

$$\partial_t h + \partial_x(uh) = 0,$$

$$\partial_t u + u\partial_x u + \partial_x h = 0,$$

Ce système d'équations est invariant à la famille de groupes à un paramètre :

$$u' = \lambda^\alpha u$$

$$h' = \lambda^\delta h$$

$$t' = \lambda^\beta t$$

$$x' = \lambda x$$

à la condition que les paramètres α , β , et δ vérifient le système :

$$\alpha + \beta = 1$$

$$\delta + 2\beta = 2$$

Un invariant de ce groupe vérifie donc le système caractéristique suivant :

$$\frac{du}{\alpha u} = \frac{dh}{\delta h} = \frac{dt}{\beta t} = \frac{dx}{x}$$

Il doit y avoir trois intégrales premières. Une intégrale première est obtenue à partir des troisième et quatrième égalités $z = x/t^{1/\beta}$; pour u et h , on tire comme intégrale $u/t^{\alpha/\beta}$ et $h/t^{\delta/\beta}$. Ces deux intégrales premières doivent s'écrire comme des fonctions arbitraires de la première, soit :

$$u(x, t) = t^{\alpha/\beta} U(x/t^{1/\beta})$$

$$h(x, t) = t^{\delta/\beta} H(x/t^{1/\beta})$$

Si on considère une rupture de barrage, on doit avoir comme conditions initiales :

pour la vitesse	$-\infty < x < \infty$	$u(x, 0) = 0$
pour la hauteur	$x > 0$	$h(x, 0) = h_0$
	$x < 0$	$h(x, 0) = 0$

A $t = 0$, le barrage lâche. Les conditions initiales impliquent $\alpha = 0$ et $\delta = 0$, soit $\beta = 1$. On trouve alors que U et H vérifient le système dit *principal*:

$$\begin{aligned} (-z + U(z)) H'(z) + H(z) U'(z) &= 0 \\ H'(z) + (-z + U(z)) U'(z) &= 0 \end{aligned}$$

Ce système est invariant au groupe associé qui prend la forme :

$$\begin{aligned} U' &= \mu U \\ H' &= \mu^2 H \\ z' &= \mu z \end{aligned}$$

Il s'ensuit que le système caractéristique s'écrit :

$$\frac{dU}{U} = \frac{dH}{2H} = \frac{dz}{z}.$$

Il possède deux intégrales premières : $p = U/z$ et $q = H/z^2$. On s'attend à avoir une relation entre p et q : $p = F(q)$. À noter ici qu'on a :

$$\begin{pmatrix} H & U - z \\ U - z & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U' \\ H' \end{pmatrix} = 0$$

ce qui n'est possible que si le déterminant est nul soit si : $H = (U - z)^2$. Reportant dans l'équation ci-dessus, on tire $U' = 2/3$, soit $U = 2/3(\zeta + a)$ où a est une constante à déterminer et $H = 4(a - \frac{1}{2}\zeta)^2/9$. Retournant aux variables originelles, on déduit :

$$\bar{u}(x, t) = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} + a \right), \quad (7.33)$$

$$h(x, t) = \frac{1}{9} \left(-\frac{x}{t} + 2a \right)^2. \quad (7.34)$$

Déterminons maintenant la constante a . La solution que l'on vient de trouver représente l'écoulement résultant de la rupture du barrage ; elle n'est pas valable pour n'importe quel couple (x, t) car on s'attend à ce que :

- à l'amont, elle se raccorde à la courbe représentant les conditions initiales $h(x_a, t_a) = h_0$ et $\bar{u}(x_a, t_a) = 0$ (où l'indice a désigne les valeurs prises à la frontière en l'écoulement et le niveau d'eau non perturbé) ;
- à l'aval, elle soit délimitée par un front où la hauteur s'annule $h(x_f, t_f) = 0$ (où l'indice f désigne les valeurs prises au front de l'écoulement).

L'équation $H = (U - \zeta)^2$ nous indique immédiatement que les conditions amont sont rencontrées pour $\zeta = |\zeta_a| = \sqrt{h_0}$. Injectant cette valeur dans l'expression de H et en considérant que $H = h_0$ en $\zeta = \zeta_a$, on trouve que $a = \sqrt{h_0}$. De même, au front, on doit avoir $U(\zeta_f) = \zeta_f$, d'où $\zeta_f = 2a$. En synthèse, nous avons trouvé une solution analytique :

- quand $-a \leq x/t - mt/2 \leq 2a$, u et h sont données par le système d'équations (7.33–7.34) ;
- quand $x/t - mt/2 < -a$, on a $u = 0$ et $h = h_0$ (zone non perturbée) ;
- quand $x/t - mt/2 > 2a$, l'écoulement n'est pas encore parvenu en x au temps t .

□

8

Quelques équations classiques

8.1 Équation non linéaire de diffusion $h_t = h_x^2$

8.1.1 Caractéristiques d'une équation non linéaire du premier ordre

Nous nous intéressons à l'équation $h_t = h_x^2$. Nous sommes en présence d'une équation non linéaire du premier ordre. Des méthodes similaires à celle des caractéristiques utilisée pour les équations quasi-linéaires du premier ordre peuvent être employées (?). Considérons que la fonction h soit une fonction de n variables indépendantes $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et qu'elle satisfasse une équation différentielle de la forme :

$$H(h, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0, \quad (8.1)$$

avec $p_i = \partial h / \partial x_i$ pour $1 \leq i \leq n$. Nous cherchons à construire une courbe $\mathcal{C}$ d'équation paramétrique $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi)$ le long de laquelle on puisse facilement spécifier les variations de h . La dérivée de h le long de $\mathcal{C}$ est :

$$\frac{dh}{d\xi} = \sum_j p_j \frac{dx_j}{d\xi}.$$

On cherche à définir une courbe $\mathcal{C}$ pour laquelle $dx_j/d\xi$ a une signification particulière quant à la solution de l'équation (8.1). Considérons la dérivée de p_i le long de $\mathcal{C}$:

$$\frac{dp_i}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \frac{\partial h}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} \frac{dx_j}{d\xi},$$

tandis que si l'on dérive l'équation (8.1) par rapport à x_i , on obtient :

$$\frac{\partial H}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0.$$

On définit la *courbe caractéristique* en posant :

$$\boxed{\frac{dx_j}{d\xi} = \frac{\partial H}{\partial p_j}}. \quad (8.2)$$

Le long de cette courbe on a :

$$\frac{dp_i}{d\xi} = -p_i \frac{\partial H}{\partial h} - \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (8.3)$$

$$\frac{dh}{d\xi} = \sum_j p_j \frac{\partial H}{\partial p_j}. \quad (8.4)$$

Ainsi, par rapport à l'équation quasi-linéaire, une équation non linéaire est associée à une courbe caractéristique $\mathcal{C}$ le long de laquelle les variations de h et de ses dérivées sont fixées.

8.1.2 Problème avec conditions aux limites et initiales

Considérons le problème suivant :

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \left(\frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \right)^2, \quad (8.5)$$

avec pour condition initiale :

$$h(x, 0) = f(x) \text{ sur un intervalle } I. \quad (8.6)$$

Pour ce type de problème, il doit exister une interface ou un *front* (?) en une (ou des) abscisses $x_f(t)$, pour lequel il faut donner la condition aux limites de la forme :

$$h(x_f(t), t) = g(t) \quad (8.7)$$

ou (condition de flux de type Neuman)

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x_f(t), t) = g(t). \quad (8.8)$$

On peut mettre le problème sous forme caractéristique en notant $p = h_x$ et $q = h_t$:

$$\frac{dp}{d\xi} = 0,$$

$$\frac{dq}{d\xi} = 0,$$

$$\frac{dh}{d\xi} = 2p^2 - q = p^2,$$

le long d'une courbe paramétrée par :

$$\frac{dx}{d\xi} = 2p \text{ et } \frac{dt}{d\xi} = -1.$$

On a donc $p = p_0$ et $q = q_0$, d'où $h = (2p_0^2 - q_0)\xi + h_0$, $x = 2p_0\xi + x_0$, et $t = -\xi$. En tenant compte des conditions initiales, on a $\xi = -t$, $p_0 = f'(x_0)$, $q_0 = p_0^2$, $\mathcal{C}$ d'équation dans le plan $x - t$:

$$x = x_0 - 2f'(x_0)t,$$

et h prenant pour valeur le long d'une de ces courbes caractéristiques :

$$h(x, t) = f(x_0) - f'^2(x_0)t. \quad (8.9)$$

8.1.3 Propriétés des équations

Les équations non linéaires du premier ordre de la forme $h_t = h_x^2$ ont deux propriétés intéressantes (??) :

- L'existence de solution avec un « temps d'attente » (*waiting-time solution*) : l'interface ne se met pas à bouger immédiatement (à $t = 0$), mais après un certain temps¹. Ici ce

1. On a observé expérimentalement par exemple que, dans certains cas, l'écoulement d'une poche de gaz dans un milieu poreux ne débutait pas immédiatement, mais après une redistribution de la concentration de gaz dans la poche.

temps peut se calculer ainsi : si $x = x_f$ est la position de l'interface, le temps d'attente correspond à la solution donnée à l'équation (8.9) avec $h = 0$, soit pour² :

$$t_c = \frac{f(x_0)}{f'^2(x_0)},$$

avec x_0 vérifiant³ : $f'(x_0)(x_0 - x_f) = 2f(x_0)$. Cela implique trois comportements possibles si l'on considère que $f(x) \sim k(x - x_f)^\alpha$ quand $x \rightarrow x_f$, c'est-à-dire $t_c \sim (x - x_f)^{2-\alpha}/(k\alpha)^2$:

1. Si $0 < \alpha < 2$, alors $t_c = 0$ et le front se met en mouvement immédiatement.
 2. Si $\alpha = 2$, alors $t_c = (k\alpha)^{-2}$ et le front se met en mouvement après un temps fini.
 3. Si $\alpha > 2$, alors $t_c = \infty$ et le front ne pourrait se mettre en mouvement qu'après un temps infini. Il peut toutefois se mettre en mouvement si, derrière lui, le fluide se met en mouvement.
- L'existence de solution avec des « chocs en coin » (*corner shock*) : il s'agit de solutions pour lesquelles h est continue localement, mais pas ses dérivées. La solution se présente sous la forme d'un raccordement en un point, avec des tangentes à droite et à gauche différentes.

8.1.4 Développement asymptotique aux temps petits

Considérons le cas (1) ($t_c = 0$, c'est-à-dire $\alpha < 2$). La solution (8.9) peut être développée sous la forme suivante pour $x \rightarrow x_f$:

$$h(x, t) = k(x - x_f)^\alpha - k^2\alpha^2(x - x_f)^{2\alpha-2}t + \dots,$$

et

$$x(x_0, t) = x_0 - 2k\alpha(x - x_f)^{\alpha-1}t + \dots.$$

Quand $x - x_f$ et t sont petits, on introduit la variable

$$\eta = \frac{x - x_f}{t^{1/(2-\alpha)}}$$

de telle sorte que $\eta = O(1)$ quand $t \rightarrow 0$. On déduit :

$$h \sim kt^{\alpha/(2-\alpha)} \left(\eta^\alpha - k\alpha^2\eta^{2(\alpha-1)} + o(1) \right),$$

$$x \sim t^{1/(2-\alpha)} \left(\eta - 2k\alpha^2\eta^{\alpha-1} + o(1) \right).$$

On en déduit que les formes de similitude quand $t \rightarrow 0$ sont :

$$h(\eta, t) = t^{\alpha/(2-\alpha)} f(\eta),$$

$$x_f(t) = \frac{\alpha - 2}{\alpha} \left(\frac{1}{k\alpha^2} \right)^{1/\alpha-2} t^{1/(2-\alpha)},$$

cette dernière équation est trouvée en recherchant la variable η telle que $h = 0$, puis en la reportant dans l'expression de x .

2. Si $f(x_0)$ et $f'(x_0)$ sont nuls, il faut appliquer la règle de l'Hôpital.

3. Cette équation peut admettre plusieurs solutions, qu'il faut examiner pour déterminer quelle est la plus petite afin de déterminer le temps d'attente.

8.1.5 Développement asymptotique aux temps grands

D'autres formes auto-similaires peuvent être trouvées pour de grands temps. En effet, les équations sont invariantes par la transformation de groupe :

$$h = t^{(n-2)/n} H(\xi),$$

avec $\xi = x/t^n$. Si l'on rajoute une condition supplémentaire de type « conservation de la masse », c'est-à-dire :

$$\int h(x, t) dx = Q,$$

alors $n = 3$, d'où $h(x, t) = t^{1/3} H(x/t^3)$.

8.2 Équation non linéaire de diffusion $h_t = (h^n h_x)_x$

8.2.1 Propriétés des équations

Nous nous intéressons à l'équation non linéaire :

$$\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^n \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right), \quad (8.10)$$

ou à sa forme équivalente (?) :

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \left(\frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \right)^2 + nh \frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2}, \quad (8.11)$$

avec $h = u^n$ et $\tau = nt$. On considère dans le traitement mathématique la forme (8.11). On lui adjoint les conditions initiales suivantes :

$$h(x, 0) = f(x),$$

pour $-a < x < 0$ avec $f(x) > 0$. Près de $x = 0$, f admet le développement asymptotique suivant $f(x) \sim k(-x)^\alpha$. Compte tenu de la discussion précédente, on s'attend à deux cas de figure (?) :

- le front x_f pour lequel $u = 0$ se met en mouvement tout de suite ;
- le front x_f pour lequel $u = 0$ se met en mouvement après un temps d'attente.

Nous nous intéressons ici au premier cas ; dans ce cas, le mouvement est entièrement dicté par les conditions initiales et de façon locale (voir (?) pour des solutions avec un temps d'attente).

8.2.2 Conditions aux limites

Outre les conditions initiales, il faut adjoindre deux conditions aux limites pour le front (définition du front) :

$$h(x_f(t), t) = 0, \quad (8.12)$$

et (condition aux limites de Stefan)

$$h \frac{\partial h^{1/n}}{\partial x}(x_f(t), t) = -L \frac{dx_f}{dt}, \quad (8.13)$$

où L est un coefficient (c'est la chaleur latente dans le problème de Stefan). Ici on prendra $L = 0$. En effet, il faut ici fixer deux conditions aux limites car l'équation est cette fois-ci du second ordre. La forme de la condition aux limites est imposée ici pour qu'il y ait existence d'une solution (au sens faible) au front (?).

Une autre façon d'introduire des conditions aux limites est possible lorsque le problème fait intervenir une condition sur la masse de la forme :

$$M = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} h(x, t) dx = At^\alpha,$$

avec $\alpha \geq 0$ un paramètre. Le cas $\alpha = 0$ correspond au lâcher d'une masse finie tandis que le cas $\alpha = 1$ correspondrait à un écoulement injecté avec un débit constant. On peut transformer cette équation de la façon suivante :

$$\frac{dM}{dt} = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} dx + h(x_2, t)\dot{x}_2 - h(x_1, t)\dot{x}_1 = A\alpha t^{\alpha-1},$$

soit encore :

$$\frac{dM}{dt} = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} n \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h^{1/n}}{\partial x} \right) dx + h(x_2, t)\dot{x}_2 - h(x_1, t)\dot{x}_1 = A\alpha t^{\alpha-1},$$

$$\frac{dM}{dt} = n \left[h \frac{\partial h^{1/n}}{\partial x} \right]_{x_1(t)}^{x_2(t)} + h(x_2, t)\dot{x}_2 - h(x_1, t)\dot{x}_1 = A\alpha t^{\alpha-1}.$$

Il y a plusieurs cas de figure :

- écoulement avec une source à l'amont et un front à l'aval : en $x_1(t) = 0$, $h = h_1$ est fixé ; en $x_2(t)$ (position du front), on a $h(x_2(t), t) = 0$. Dans ce cas :

$$\frac{dM}{dt} = n h \frac{\partial h^{1/n}}{\partial x} \Big|_{x_2(t)} = A\alpha t^{\alpha-1}.$$

- écoulement sans une source, avec un front à l'amont et un front à l'aval : en $x_1(t)$ et $x_2(t)$, on a $h = 0$. Dans ce cas, on a nécessairement $\alpha = 1$ car :

$$A\alpha t^{\alpha-1} = n \left[h \frac{\partial h^{1/n}}{\partial x} \right]_{x_1(t)}^{x_2(t)} + h(x_2, t)\dot{x}_2 - h(x_1, t)\dot{x}_1 = 0.$$

- on peut également imaginer une situation où, par exemple, le volume est constant, le point aval x_1 (resp. x_2) est mobile mais h y admet une discontinuité : $h(x_1) = h_1 > 0$ (resp. $h(x_2) = h_2 > 0$). Dans ce cas, on a :

$$n \left[h \frac{\partial h^{1/n}}{\partial x} \right]_{x_1(t)}^{x_2(t)} + h_2 \dot{x}_2 - h_1 \dot{x}_1 = 0,$$

ce qui conduit à poser :

$$h \frac{\partial h^{1/n}}{\partial x} \Big|_{x_i(t)} = -h_i \dot{x}_i$$

(condition de Stefan).

8.2.3 Solutions auto-similaires aux temps courts

Mise en équations

L'analyse des formes auto-similaires de l'équation $h_t = (h_x)^2$ est applicable ici aussi car le terme supplémentaire h_{xx} se comporte comme $(h_x)^2$ du point de vue des formes auto-similaires. On pose alors pour $t > 0$:

$$h = t^{\alpha/(2-\alpha)} H(\eta),$$

avec $\eta = x/t^{1/(2-\alpha)} = O(1)$. Pour $t < 0^4$, on prend $\eta = -x/(-t)^{1/(2-\alpha)}$ et $h = -(-t)^{\alpha/(2-\alpha)} H(\eta)$. Le signe négatif permet d'avoir la même équation différentielle pour H indépendamment du signe de t .

On obtient l'équation différentielle :

$$\frac{1}{2-\alpha}(\alpha H - \eta H') = H'^2 + n H H''.$$

Cette équation est invariante par la transformation $\Gamma = \frac{\eta}{2}\partial_\eta + H\partial_H$, dont la prolongation à l'ordre 1 est $\Gamma^{(1)} = \frac{\eta}{2}\partial_\eta + H\partial_H + \frac{H'}{2}\partial_{H'}$. Les deux invariants sont : $p = H/\eta^2$ et $q = H'/\eta$. On a :

$$\eta \frac{dp}{d\eta} = q - 2p,$$

$$\eta \frac{dq}{d\eta} = \frac{1}{np} (m(\alpha p - q) - q^2 - npq),$$

avec $m = 1/(2-\alpha)$. On peut ainsi transformer l'équation différentielle d'ordre 2 en une équation du premier ordre :

$$\frac{dq}{dp} = \frac{\alpha mp - q(m + np) - q^2}{np(q - 2p)},$$

Il peut être plus avantageux de mettre cela sous la forme :

$$\frac{dp}{dq} = \frac{np(q - 2p)}{(\alpha m - nq)p - mq - q^2}.$$

On a de plus :

$$\frac{d \ln \eta}{dp} = \frac{1}{q - 2p}.$$

Par intégration de cette dernière équation, on tire

$$\ln |\eta| = \int^p \frac{dp}{q - 2p} = \int^{H/\eta^2} \frac{dp}{q - 2p},$$

à une constante d'intégration près. Connaissant une trajectoire $p(q)$, on est donc à même de déduire la fonction H à une constante près (on forme donc une famille à un paramètre de courbes).

4. On considère ce cas-là dans l'éventualité d'un temps d'attente ; le début de l'expérience correspond alors à un temps $t_1 < 0$ (le matériau est alors dans $-a \leq x \leq 0$) et le début de mise en mouvement du front est à $t = 0$.

Singularités et comportement de la solution

On s'intéresse aux solutions dans le quadrant $p > 0$ et $q < 0$ pour avoir ce qui se passe au front ; le domaine $q > 0$ correspond à ce qui se passe à gauche du point $x = 0$. Compte tenu des conditions aux limites, le front correspond au point $(q, p) = (b, 0)$, avec $b \leq 0$ non encore déterminé. Les points critiques sont donnés par l'intersection de la courbe Γ , d'équation, $p = (m + q)q/(\alpha m - nq)$ avec $p = 0$ ou $p = q/2$. Il existe par ailleurs des points critiques à l'infini (par exemple, pour $p = \pm\infty$ et $q = \pm\infty$). Une discussion détaillée des solutions près des points critiques est donnée dans l'article de ? ; pour un système d'équations très proches, ?⁵ fournissent également une discussion détaillée des solutions et de leur interprétation physique.

Il y a deux points singuliers pour $p \geq 0$: l'origine et le point A $(-m, 0)$. Ce dernier est un point selle et il est le seul qui puisse correspondre à la position du front (une seule courbe aboutit en effet à un point selle en dehors des courbes critiques). Par application de la règle de l'Hôpital, on trouve que la courbe asymptotique vérifie :

– pour O

$$p = \frac{q}{\alpha} (1 + x(\alpha + n(\alpha - 1)) + \dots),$$

– pour A

$$p = -\frac{1+n}{\alpha+n}(q+m) \left(1 - \frac{1}{m} \frac{\alpha+2n}{1+n}(q+m) + \dots \right).$$

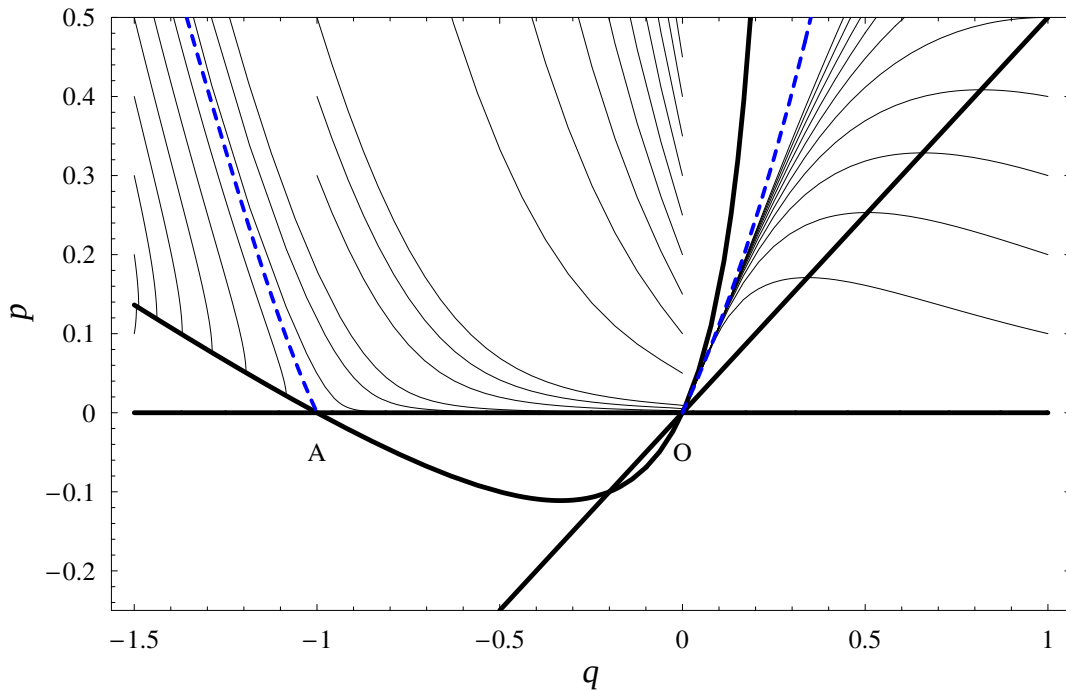


Figure 8.1 : portrait de phase avec $n = 3$ et $\alpha = 1$ ($m = 1$) autour du point singulier A $(-1, 0)$. La courbe à tiret court gras représente la solution asymptotique aboutissant à A et les traits fins quelques trajectoires possibles (trajectoires calculées numériquement).

Au niveau du point A, si on ne garde que les termes à l'ordre 1, on a $q = -(\alpha + n)p/(1 + n) - m$, donc on tire que :

$$\ln \eta = -\frac{n+1}{2+n-\alpha} \ln(n+1 + (2-\alpha)(\alpha-n-2n)p) + c,$$

5. voir également l'ouvrage de ?.

avec c une constante d'intégration. On pose η_f la position du front, donc $p = 0$ quand $\eta = \eta_f$; la constante d'intégration est alors $c = \ln \eta_f + (\ln n + 1)/r$, avec $r = 1 + (1 + \alpha)/(n + 1)$. En posant $s = (n + 1)/(2 - n)/(\alpha - 2 - n)$, on aboutit à :

$$\frac{\eta}{\eta_f} = \left(1 + \frac{p}{s}\right)^{-1/r} \approx 1 - \frac{p}{rs},$$

soit $p = rs(1 - \xi)$ avec $\xi = \eta/\eta_f$, d'où au premier ordre quand $\xi \rightarrow 1$:

$$h = rs\eta_f^2 t^{\alpha/(2-\alpha)}(1 - \xi).$$

La courbe issue de A s'en va vers l'infini ($p \rightarrow \infty$). Le point « infini » est ici un point singulier. La courbe sort en quelque sort du second quadrant ($q < 0$) pour entrer dans le premier quadrant ($q > 0$). Le changement de quadrant indique un changement de signe de q , donc soit de H' , soit de η . Un changement de signe de H' impliquerait que le changement se ferait en passant par l'axe vertical $q = 0$; cela n'est pas le cas. Donc, le point singulier « infini » est associé à la valeur $\eta = 0$. La solution ainsi se décompose en deux morceaux :

- quadrant de gauche ($q < 0$) : la solution correspond à ce qui se passe entre $0 < \eta \leq \eta_f$;
- quadrant de droite ($q > 0$) : la solution correspond à ce qui se passe entre $\eta < 0$.

Ce résultat peut s'établir directement en considérant le comportement asymptotique

$$\ln \frac{\eta_0}{\eta_f} = \int_0^{p_0} \frac{dp}{q - 2p},$$

où η_0 et p_0 sont deux bornes d'intégration (pour la borne inférieure, on a $p = 0$ en $\eta = \eta_f$). On peut déterminer le comportement asymptotique pour $q \rightarrow -\infty$ est $p \propto q^2$ à partir d'un raisonnement de type « dominant balance ». En effet, supposons $p \gg q$, alors on peut utiliser l'approximation :

$$\frac{dp}{dq} \approx \frac{-2np^2}{-npq} = 2\frac{p}{q},$$

donc il existe un scalaire γ tel que $p = \gamma q^2$. La constante γ est déterminée numériquement en intégrant la courbe $p(q)$ à partir du voisinage de A. Par exemple, avec $n = 3$ et $\alpha = 1$, on trouve $\gamma = 2$. Il s'ensuit que lorsque $p_0 \rightarrow \infty$, on a :

$$\int_0^{p_0} \frac{dp}{q - 2p} \approx \int_0^{p_0} \frac{dp}{-2p} = \ln p_0^{-1/2}.$$

L'intégrale est impropre puisque $\ln p_0^{-1/2} \rightarrow -\infty$ quand $p_0 \rightarrow \infty$. Cela est bien compatible avec $\ln \eta_0 \rightarrow 0$. On trouve :

$$\ln \eta_0 \propto \ln p_0^{-1/2},$$

soit encore $\eta_0 \propto p_0^{-1/2}$ ou bien encore $\eta_0 \propto q_0^{-1}$ (puisque $p_0 = \gamma q_0^2$).

Détermination de η_f

Une conséquence directe est qu'on ne peut pas calculer simplement η_f par intégration numérique compte tenu de la divergence des intégrales. On peut toutefois utiliser l'approximation asymptotique que l'on vient de calculer. Partant de la relation

$$\ln \frac{\eta_0}{\eta_f} = \int_{-1/2}^{q_0} \frac{p(q) dq}{q - 2p(q)},$$

et en se servant de $\eta = F/\sqrt{p} \approx 1/(\sqrt{3}|q|)$ (car $F \rightarrow 1$ et $p \rightarrow 3q^2$ quand $\eta \rightarrow 0$), on déduit la relation asymptotique

$$\ln \eta_f = \ln \frac{1}{\sqrt{3}q_0} - \int_{-1/2}^{q_0} \frac{p(q) dq}{q - 2p(q)},$$

pour $|q_0| \ll 1$ ($\eta_0 \rightarrow 0$). Avec une valeur $q_0 = 10^{10}$, on trouve $\eta_f = 0,855$.

Comportement pour $\eta < 0$

Le comportement quand $\eta \rightarrow -\infty$ est dicté par les conditions initiales puisqu'on doit avoir $\lim_{t \rightarrow 0} h(x, t) = f(x) = k(-x)^\alpha$. Donc $H(\eta) = k|\eta|^\alpha$. Il s'ensuit que, quand $\eta \rightarrow -\infty$, alors $\propto k|\eta|^{\alpha-2}$ et $q \propto k\alpha|\eta|^{\alpha-2} \rightarrow 0$ (on a supposé $\alpha < 2$), soit $q \approx \alpha p$. Donc pour $\eta \rightarrow -\infty$, la courbe solution doit s'approcher du point origine et être tangente à la droite $p = q/\alpha$ qui représente la condition initiale $h(x, 0) = f(x)$. C'est ce qu'on a montré plus haut : le point origine O est un nœud à droite et il passe une courbe asymptotique d'équation $p = q/\alpha + o(q)$. Dans le cas $\alpha = 0$, on a

$$\frac{dp}{dq} \approx \frac{12p^2}{q},$$

donc

$$q = K \exp\left(-\frac{1}{12p}\right),$$

avec K une constante d'intégration.

On conclut donc ceci : les conditions initiales et la source de l'écoulement sont représentées par le point origine O ; il y a une trajectoire émanant de O se dirigeant vers l'infini en approchant une courbe asymptotique de la forme $p = \gamma q^2$. Le point rejeté à l'infini sur cette courbe représente un point intermédiaire entre la source et le front

8.2.4 Solutions auto-similaires aux temps longs

Solution générale

Considérons l'équation (8.11) :

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \left(\frac{\partial h(x, t)}{\partial x}\right)^2 + nh \frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2},$$

avec cette fois-ci une condition aux limites de type « conservation de la masse », c'est-à-dire on a :

$$\int_{x_1}^{x_2} h(x, t) dx = M,$$

avec M une constante. Recherchons les solutions invariantes en posant le changement de variables :

$$h' = \lambda^b h, \quad t' = \lambda^a t \quad \text{et} \quad x' = \lambda x.$$

L'équation (8.11) fournit la contrainte linéaire :

$$b - a = 2b - 2.$$

Les conditions aux limites imposent : $1 + b = 0$. On déduit :

$$a = 3 \quad \text{et} \quad b = 1.$$

Les équations caractéristiques sont :

$$\frac{dh}{bh} = \frac{dt}{at} = \frac{dx}{x},$$

soit encore :

$$-\frac{dh}{h} = \frac{dt}{3t} = \frac{dx}{x},$$

donc les invariants permettent d'aboutir à :

$$\xi = \frac{x}{t^{1/3}} \text{ et } h = t^{-1/3} H(\xi).$$

On trouve alors que H vérifie :

$$H + \xi H' + 3H'^2 + 3nHH'',$$

qui est la même équation que l'équation pour les temps courts avec $\alpha = -1$. La condition aux limites amène à :

$$\int_0^{\eta_f} H(\eta) d\eta = M.$$

On pose comme précédemment (voir § 8.2.3) : $p = H/\xi^2$ et $q = H'\xi$ et on trouve :

$$\eta \frac{dp}{d\eta} = q - 2p,$$

$$\frac{dp}{dq} = \frac{3np(-q + 2p)}{(1 + 3nq)p + q + 3q^2}.$$

La même analyse que précédemment (voir § 8.2.3) conduit à montrer qu'il existe une singularité au point A (une selle) de coordonnées $(-1/3, 0)$, mais contrairement au cas précédent, ce point ne représente plus le front. En effet, si tel était le cas, alors le portait de phase indique qu'il n'y a qu'une seule trajectoire possible émanant de A et s'en allant vers l'infini puisque A est un point selle. Si on intègre cette trajectoire, alors η_f est déterminé sans que l'on ait besoin de recourir à la condition aux limites (conservation du volume). Il faut donc admettre qu'il existe un autre point le long de l'axe $p = 0$ représentant le front (le front est nécessairement sur cet axe puisque $p = 0$ au front). Il y a deux possibilités :

- soit le front est au point origine O (qui est un nœud) et, dans ce cas, cela veut dire que $H'(\eta_f) = 0$, donc le front serait plat ce qui est difficilement envisageable sur le plan physique ;
- soit le front est le point singulier à l'infini ($p = 0, q \rightarrow \infty$) (qui est un nœud) et, dans ce cas, cela veut dire que $H'(\eta_f) \rightarrow \infty$, donc le front serait droit.

C'est bien la seconde possibilité qui convient physiquement. Le point « source » de l'écoulement est également un point singulier situé à l'infini ($p \rightarrow \infty, q \rightarrow \infty$), ce qui est normal car $\eta = 0$ à la source et si H et H' prennent des valeurs finies, alors p et q prennent des valeurs infinies. La trajectoire typique dans le plan $q - p$ est indiquée sur la figure 8.2.

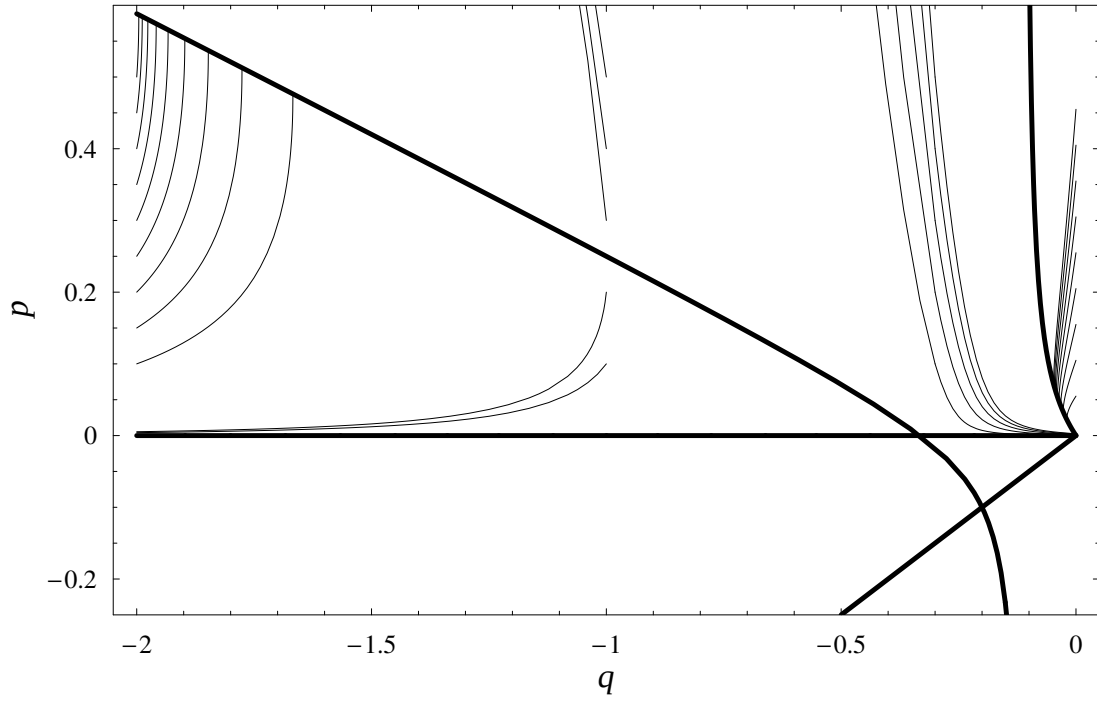
Le comportement asymptotique est le suivant :

- quand $p \rightarrow 0$, on a :

$$\frac{dp}{dq} = -\frac{n}{m+q} + o(p),$$

donc il existe une constante $a > 0$ telle que :

$$p = \frac{a}{|m+q|^n}.$$

Figure 8.2 : portait de phase pour $n = 3$.

Soit encore :

$$p \propto \frac{a}{|q|^n},$$

d'où l'on tire :

$$\frac{|H'|}{\eta} \propto \left(\frac{a\eta^2}{H} \right)^{1/n}.$$

Soit à résoudre : $H'H^{1/n} = \eta(a\eta^2)^{1/n}$, d'où l'on tire :

$$H = \left(\frac{a^{1/n}}{2} (\eta_f^{2(1+n)/n} - \eta^{2(1+n)/n}) \right)^{n/(n+1)}.$$

– quand $p \rightarrow \infty$, on a :

$$\frac{dp}{dq} = 2\frac{p}{q},$$

d'où l'on tire qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que : $p = \gamma q^2$. Soit encore :

$$H = \gamma H'^2,$$

soit $H = \gamma x^2/4 + c$, avec c une constante.

Lien avec les écoulements visqueux

Dans le cas $n = 3$, l'équation (8.10) représente l'écoulement lent d'un fluide visqueux. Dans ce cas-là, il vaut mieux utiliser l'équation (8.10) que l'équation (8.11) car l'expression de conservation de la masse y est plus directe. On considère donc l'équation :

$$\frac{\partial h(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial h(x, \tau)}{\partial x} \right), \quad (8.14)$$

avec pour conditions aux limites implicites :

$$\int_{x_1}^{x_2} h(x, t) dx = M,$$

Dans ce cas, les équations auto-similaires sont : $h = t^{-1/5}H(\eta)$ et $\eta = x/t^{1/5}$. On aboutit à l'équation différentielle :

$$H + \eta H' + 15(HH')^2 + 5H^3H'' = 0,$$

qui est invariante sous l'action de l'opérateur infinitésimal : $X = \frac{3\eta}{2}\partial_\eta + H\partial_H - \frac{H'}{2}\partial_{H'}$. On introduit $p = H/\eta^{2/3}$ et $q = \eta^{1/3}H'$. On a :

$$\eta \frac{dp}{d\eta} = q - \frac{2}{3}p,$$

$$\eta \frac{dq}{d\eta} = \frac{1}{3}p - \frac{p + q + 15p^2q^2}{5p^3}.$$

On déduit :

$$\frac{dq}{dp} = \frac{5p^3q - 3p - 3q - 45p^2q^2}{5p^3(3q - 2p)}.$$

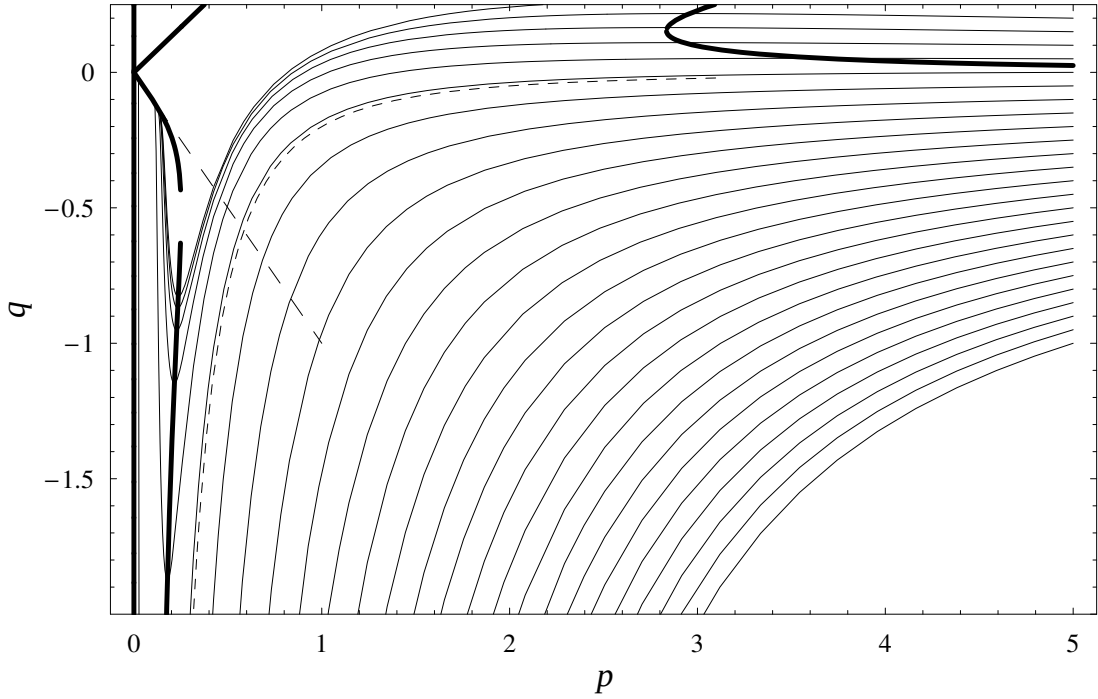


Figure 8.3 : portrait de phase pour un écoulement visqueux. Les courbes en gras représentent les courbes critiques ; la courbe à tiret court représente la solution analytique tandis que celle à tiret long représente la direction principale du point selle à l'origine.

On a reporté à la figure 8.3 le portrait de phase et quelques trajectoires dans le plan $p-q$. Dans le quatrième quadrant qui nous intéresse ($p > 0, q < 0$), On note le comportement curieux de certaines trajectoires qui touchent la courbe critique $5p^3q - 3p - 3q - 45p^2q^2 = 0$ et

subissent une variation rapide qui les entraîne au point origine. Pour les autres trajectoires, la solution diverge vers l'infini. On en déduit que, quand $p \rightarrow 0$, on a :

- si $q \gg p$, on suppose de plus que $p^2|q| \gg 1$ pour faire l'approximation suivante :

$$\frac{dq}{dp} \approx -3 \frac{p}{q},$$

ce qui donne : $|q| \propto p^{-3}$.

- si $q \ll p$, on tire que :

$$\frac{dq}{dp} \approx \frac{3}{10} \frac{1}{p^3},$$

ce qui donne : $|q| \propto p^{-2}$, en contradiction avec l'hypothèse de départ.

- si $q = O(p)$, le point O est une singularité (selle) et les courbes sont tangentes à la droite $q = -p$ (courbe à tiret long).

Le point singulier ($p = 0, q \rightarrow \infty$) représente le front. Des approximations précédentes, on tire le comportement suivant près du front :

- si $q = -p$, soit $\eta H' + H = 0$, soit $\eta H = c$ avec c une constante. Puisqu'en $\eta = \eta_f$, $H = 0$, on déduit que $c = 0$, donc $H = 0$, ce qui physiquement ne nous intéresse guère. À noter que ces trajectoires sont associées avec des valeurs de q positives quand p croît. On pourrait imaginer un scénario où $c > 0$, donc il existe un film infiniment mince de fluide le long du plan incliné, mais cela ne correspond pas à l'expérience d'un lâcher d'une masse de fluide sur un plan sec.
- si $|q| \propto p^{-3}$, alors $H' H^3 = c \eta^{5/3}$, soit encore $H = \left(3c(\eta_f^{8/3} - \eta^{8/3})/2\right)^{1/4}$.

Quand $p \rightarrow \infty$, on a :

$$\frac{dq}{dp} \approx -\frac{1}{2} \frac{p}{q},$$

ce qui donne : $|q| \propto p^{-1/2}$. Ce point représente le point source. On tire donc que $HH' = c$, avec c une constante, soit encore $H = \sqrt{H_0 + 2c\eta}$ près de la source.

Il faut noter l'existence de solutions analytiques : en effet, l'équation $H + \eta H' + 15(HH')^2 + 5H^3 H'' = 0$ peut s'intégrer une fois pour donner $\eta H + 5(HH')^2 = 0$ (où l'on a supposé que $HH' \rightarrow 0$ quand $\eta \rightarrow \eta_f$). une nouvelle intégration conduit à :

$$H = \left(\frac{3}{10}(\eta_f^2 - \eta^2)\right)^{1/3}.$$

La figure 8.3 montre la trajectoire de la solution analytique (courbe à tiret court). La figure 8.4 montre les profils de hauteur selon le comportement de q quand $p \rightarrow \infty$.

8.2.5 Transition des temps courts aux temps longs

En suivant le même raisonnement que dans la section suivante, on peut montrer de façon générale que le problème de diffusion non linéaire représentée par l'équation (8.10) :

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(h^n \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \right),$$

et les conditions les conditions initiales suivantes :

$$h(x, 0) = f(x),$$

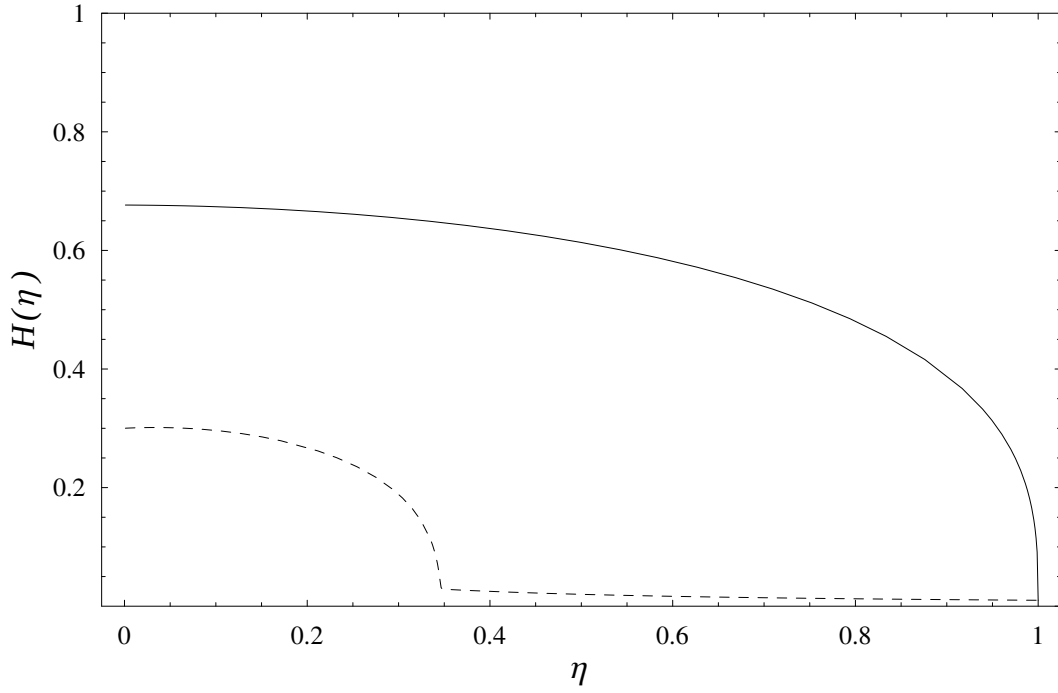


Figure 8.4 : profil de hauteur. Trait continu : solution correspondant au lâcher d'une masse de fluide ; trait discontinu ($q < 0$ quand $p \rightarrow \infty$) : autre solution possible mathématiquement ($q > 0$ quand $p \rightarrow \infty$).

pour $-a < x < 0$ et avec $f(x) \geq 0$,

$$\int_{x_1}^{x_2} h(x, t) dx = M,$$

admet aux temps longs une solution auto-similaire de la forme :

$$h_s(x, t) = At^\alpha (1 - \xi^2)^{1/\beta} = t^\alpha H_0(\eta),$$

avec $\xi = \eta/\eta_f$, $\eta = xt^{-\delta}$, $\alpha = -1/(n+2)$, $\delta = 1/(n+2)$, $A = n\delta\eta_f^2$, et η_f est donné par :

$$M = \eta_f^{1+2/n} \left(\frac{n\delta}{2} \right)^{1/n} \Gamma(1/2) \frac{\Gamma(1/n + 1)}{\Gamma(1/n + 3/2)}.$$

Il s'agit de déterminer la vitesse à laquelle la solution tend vers la solution asymptotique. Pour cela, on écrit la solution h sous la forme d'un développement asymptotique aux temps $t \gg 1$ (??) :

$$h(x, t) = t^\alpha (H_0(\eta) + t^{\gamma_1} H_1(\eta) + \dots),$$

avec $\gamma_i < 0$ des constantes.

Bibliographie

- ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I.A. 1964 *Handbook of Mathematical Functions*. Washington: National Bureau of Standards.
- AMES, W.F. 1965 *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering*. New York: Academic Press.
- BARENBLATT, G.I. 1996 *Scaling, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- BARENBLATT, G.I. & ZEL'DOVICH, Y.B. 1972 Self-similar solutions as intermediate asymptotics. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **4**, 285–312.
- BATCHELOR, G.K. 1967 *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press.
- BAUMANN, G. 2000 *Symmetry Analysis of Differential Equations with Mathematica*. Berlin: New York.
- BLUMAN, G.W. 1990 Invariant solutions for ordinary differential equations. *SIAM J. Appl. Math.* **50**, 1706–1715.
- BLUMAN, G.W. & ANCO, S.C. 2002 *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations*. New York: Springer.
- CANTWELL, B.J. 2002 *Introduction to Symmetry Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.
- CHURCHILL, R.V. & BROWN, J.W. 1990 *Complex Variables and Applications*, 5th edn. New York: McGraw Hill Publishing Company.
- COURANT, R. & FRIEDRICH, K.O. 1948 *Supersonic Flow and Shock Waves*. New York: Intersciences Publishers.
- CURLE 1956*a* Unsteady Two-Dimensional Flows with Free Boundaries. I. General Theory. *Proc. R. Soc. London ser. A* **235**, 375–381.
- CURLE 1956*b* Unsteady Two-Dimensional Flows with Free Boundaries. II. The Incompressible Inviscid Jet. *Proc. R. Soc. London ser. A* **235**, 382–395.
- DRESSLER, L. 1983 *Similarity Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations*. Boston: Pitman.
- DRESSLER, L. 1999 *Applications of Lie's Theory of Ordinary and Partial Differential Equations*. Bristol: Institute of Physics Publishing.
- GARABEDIAN, P.R. 1964 *Partial Differential Equations*. New York: John Wiley & Sons.
- GARABEDIAN, P.R. 1966 Free boundary flows of a viscous liquid. *Comm. Pure Appl. Math.* **19**, 421–434.
- GRAMBERG, H.J.J., VAN VROONHOVEN, J.C.W. & VAN DE VEN, A.A.F. 2004 Flow patterns behind the free flow front for a Newtonian fluid injected between infinite parallel plates. *Eur. J. Mech. B* **23**, 571–585.
- GRATTON, J. 1991 Similarity and self similarity in fluid dynamics. *Fund. Cosmic Phys.* **15**, 1–106.
- GRATTON, J. & MINOTTI, F. 1990 Self-similar viscous gravity currents: phase-plane formalism. *J. Fluid Mech.* **210**, 155–182.

- GRUNDY, R.E. 1979 Similarity solutions of the nonlinear diffusion equation. *Quarter. J. App. Math.* **79**, 259–280.
- GRUNDY, R.E. 1983 Asymptotic solution of a model non-linear diffusion equation. *IMA J. Appl. Maths* **31**, 121–137.
- GRUNDY, R.E. & McLAUGHLIN, R. 1982 Eigenvalues of the Barenblatt-Pattle Similarity Solution in Nonlinear Diffusion. *Proc. R. Soc. London ser. A* **383**, 89–100.
- HOGG, A.J. 2006 Lock-release gravity currents and dam-break flows. *J. Fluid Mech.* **569**, 61–87.
- HYDON, P.E. 2000 *Symmetry Methods for Differential Equations – A Beginner's Guide*. Cambridge: Cambridge University Press.
- JONES, C.W. 1953 On Reducible Non-Linear Differential Equations Occurring in Mechanics,. *Proc. R. Soc. London ser. A* **217**, 327–343.
- KATH, W.L. & COHEN, D.S. 1982 Waiting-time behavior in a nonlinear diffusion equation. *Stud. Appl. Math.* **67**, 79–105.
- KEVORKIAN, J. 2000 *Partial Differential Equations, Analytical Solution Techniques*. New York: Springer.
- LACEY, A.A. 1983 Initial motion of the free boundary for a nonlinear diffusion equation. *IMA J. Appl. Maths* **31**, 113–119.
- LACEY, A.A., OCKENDON, J. R. & TAYLER, A. B. 1982 "Waiting-Time" Solutions of a Nonlinear Diffusion Equation. *SIAM J. Appl. Math.* **42**, 1252–1264.
- LAMB, H. 1932 *Hydrodynamics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- MEI, C.C. 1995 *Mathematical Analysis in Engineering*. Cambridge: Cambridge University Press.
- OLVER, P.J. 1993 *Application of Lie Groups to Differential Equations*. New York: Springer.
- POHLE, F.V. 1952 Motion of water due to breaking of a dam and related problems. In *Proceeding of the National Bureau of Standards Semicentennial Symposium on Gravity Waves*, , vol. Circular 521, pp. 47–53. NBS: U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards.
- RHYMING, I.L. 2004 *Dynamique des fluides*. Lausanne: Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- SACHDEV, P.L. 2000 *Self-Similarity and Beyond, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*, vol. 113. Boca Raton: Chapman & Hall.
- STOKER, J.J. 1957 *Water Waves*. New York: Interscience Publishers.
- VAN VROONHOVEN, J.C.W. & KUIJPERS, W.J.J. 1990 A free-boundary problem for viscous fluid flow in injection moulding. *J. Eng. Math.* **24**, 151–165.
- WHITHAM, G.B. 1974 *Linear and Nonlinear Waves*. New York: John Wiley & Sons.
- ZAUDERER, E. 1983 *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. New York: John Wiley & Sons.
- ZWILLINGER, D. 1992 *Handbook of differential equations*. Boston: Academic Press.

Index

- adjoint, 47
- algèbre
 - algèbre de Lie, 90, 101
 - algèbre solvable, 91, 96
- analyse dimensionnelle, 99
- arc
 - spatial, 58
 - temporel, 58
- auto-similaire, 99, 136, 139
- cône de Monge, 38
- caractéristique, 45
- champ vectoriel, 78
- changement de variable, 84, 86, 102, 121
- choc, 53, 54, 59
- choc en coin, 132
- commutateur, 90, 93
- comportement asymptotique, 109, 111, 127
- condition
 - aux limites, 51, 99, 106
 - aux limites de Dirichlet, 53
 - aux limites de Neuman, 54
 - aux limites mixte, 54
 - de Cauchy, 4
 - de compatibilité, 38
 - de Stefan, 134
- conjugué harmonique, 4
- constante de structure, 90
- coordonnée
 - canonique, 84, 86, 92, 96, 103
 - caractéristique, 45
- courbe
 - caractéristique, 45, 94, 131
 - enveloppe, 94
- domaine d'influence, 53
- équation
 - à variable séparable, 84
 - aux dérivées partielles, 119
 - caractéristique, 37, 92, 102
 - d'Emden-Fowler, 104
 - déterminante, 89, 101, 104, 108
 - de Blasius, 92, 101, 109, 125
 - de Clairault, 94
 - de couche limite, 125
 - de diffusion, 124, 131, 134
 - de l'hélium super fluide, 107
 - de la chaleur, 41
 - de la vorticité, 24
 - de Laplace, 4, 41
 - de Saint-Venant, 60, 128
 - des ondes, 41
 - du premier ordre, 37, 93, 101
 - du second ordre, 95, 101
 - elliptique, 42
 - hyperbolique, 42
 - parabolique, 42
- facteur intégrant, 87, 113
- fonction
 - biharmonique, 24
 - d'Airy, 24
 - de courant, 19
 - de Riemann, 48, 64
- forme
 - canonique, 42
- formule
 - de Cauchy, 6
 - de Green, 44
 - de Plemelj, 7
 - de Weierstrass, 9
- front, 132
- frontière
 - spatiale, 53, 55
 - temporelle, 53, 55
- générateur infinitésimal, 78, 84, 89, 122
- générateur infinitésimal prolongé, 83
- groupe, 77
 - à un paramètre, 78
 - de Lie, 83, 85, 87, 89
 - extension, 79, 99, 106, 127
 - groupe, 78
 - puissance, 92
 - rotation, 87
 - translation, 92
 - une fois étendu, 81, 82, 120
- holomorphe, 4

- idéal, 91
- intégrale première, 37, 92
- invariant
 - condition d'invariance, 83, 121
 - courbe invariante, 80, 113
 - de Riemann, 58, 60
 - fondamental, 86
 - invariant différentiel, 96, 102
 - invariant du groupe, 78, 96
 - invariant fondamental, 96, 102
 - point invariant, 79
 - premier invariant fondamental, 86
 - second invariant, 86
 - solution invariante, 92, 93
- laplacien, 4
- méthode
 - de Charpit, 38
 - de l'hodographe, 57
 - de Pohle, 23
 - des caractéristiques, 131
 - des images, 13
 - des invariants, 96
 - du tir, 101, 106
 - Kirchhoff-Helmoltz, 20
- nombre
 - sans dimension, 99
- nœud, 28, 30
- onde
 - simple, 57, 58, 60
- opérateur
 - adjoint, 47
 - différentiel, 80
 - différentiel total, 81, 82, 119
- orbite, 78
- point
 - critique, 27
 - focal, 28, 30
 - singulier, 27
- portrait de phase, 27, 101, 105, 111, 125, 136
- potentiel de vitesse, 19
- problème
 - de Cauchy, 46, 53
 - de Riemann-Hilbert, 8
- prolongation, 82, 102
- résidu, 11
- règle
 - de l'Hôpital, 30, 133
- rupture de barrage, 60
- séparatrice, 31, 113
- série
 - de Laurent, 10
 - de Lie, 80, 121
 - de Taylor, 9
 - entière, 9
- selle, 28, 30
- similitude, 127
- singularité, 27, 113
 - apparente, 10
 - essentielle, 10
- solution
 - d'Alembert, 45, 53
 - faible, 50
 - régulière, 50
 - similaire, 127
 - singulière, 37, 94
- symétrie, 77
 - condition de symétrie, 82, 83, 122
 - symétrie linéarisée, 83
- temps d'attente, 132
- théorème
 - de Buckingham, 99
 - de Cauchy, 5
 - de Lie (premier), 78
 - de Lie (second), 95
 - de Liouville, 7
 - de Plemelj, 8
 - des résidus, 11
- transformation
 - conforme, 14
 - de Joukovski, 17
 - de Schwarz-Christoffel, 15
 - infinitésimale, 78
 - ponctuelle, 77, 82
- valeur
 - principale, 7
- variable
 - canonique, 84
 - dépendante, 119
 - indépendante, 119