

VIII. Passivité (part-I)

①

- 1. Notion intuitive
- 2. Passivité et fonction de Lyapunov
- 3. Connexion et passivité
- 4. Passivité et système linéaire

5. Conditions nécessaires.

1. Notion intuitive

Energie dissipée ou fournie/stockée dans des composants internes. Pas de source de puissance autre qu'un stock interne.

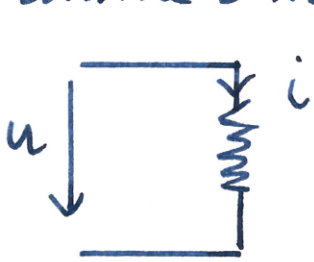
1.1. Résistance électrique

1.2. système dynamique, circuit RLC

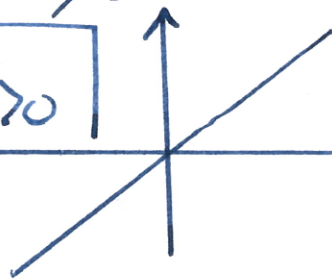
1.3. définition.

1.1 Résistance électrique

Si on considère une résistance électrique avec comme entrée la tension, et comme sortie le courant:



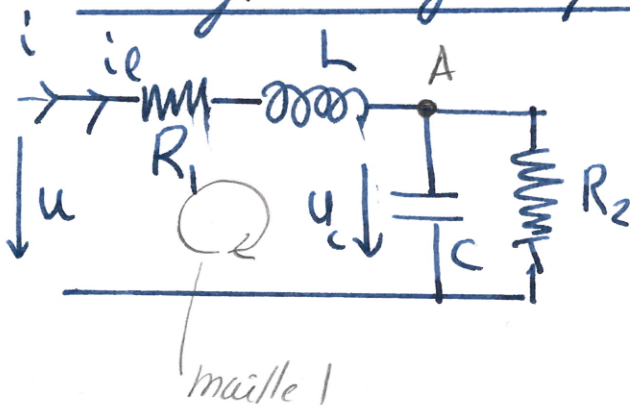
$$\boxed{\begin{aligned} u \cdot i &= u \cdot i \\ &= Ri^2 = q > 0 \end{aligned}}$$



$$i = \frac{1}{R} u$$

La caractéristique apparaît aux sections I et III.

1.2 Système dynamique, circuit RLC



pour maïlle:

$$u = Ri_e + L \frac{di_e}{dt} + u_c$$

noeud A:

$$i = i_e = C \frac{du_c}{dt} + u_c \frac{1}{R_2}$$

(2)

$$x_1 \stackrel{\Delta}{=} i_e \quad x_2 = u_c$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{L} u - \frac{R_1}{L} x_1 - \frac{1}{L} x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C} x_1 - \frac{1}{R_2 C} x_2 \end{cases} \quad y = x_1$$

L'énergie peut être stockée dans C et dans L

Fonction de stockage $V = \frac{1}{2} L x_1^2 + \frac{1}{2} C x_2^2$

$$\dot{V} = L x_1 \dot{x}_1 + C x_2 \dot{x}_2$$

$$\begin{aligned} &= x_1 u - R_1 x_1^2 - \cancel{x_1 x_2} + \cancel{x_1 x_2} - \frac{1}{R_2 C} x_2^2 \\ &= u \cdot y - R_1 x_1^2 - \frac{1}{R_2 C} x_2^2 = u \cdot y - q, \quad q \geq 0. \end{aligned}$$

1.3 Définition: Soit le système dynamique

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad \text{Il est dit passif, s'il existe une fonction } V(x) > \gamma > -\infty \text{ telle que}$$

$$\dot{V} = u y - q \text{ avec } q \geq 0.$$

2. Passivité et fonction de Lyapunov

Remarque: La fonction de stockage dans la définition de la passivité peut être négative (contrairement à la fonction de Lyapunov). Elle doit être bornée inférieurement par une quantité γ .

Définition intégrale

Un système $\dot{x} = f(x, u)$ est dit passif
 $y = h(x)$

s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > -\infty$ tel que

$$\int_0^\infty u(\tau) y(\tau) d\tau > \alpha$$

Equivalence avec la définition différentielle :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \dot{V}(\tau) d\tau &= \int_0^\infty (u(\tau) y(\tau) - \dot{q}) d\tau \\ &\leq \int_0^\infty u(\tau) y(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Poseons $\alpha \triangleq \gamma - V(0)$ avec γ la borne inférieure de la fct de stockage.

on a: $\alpha = \gamma - V(0) \leq V(\infty) - V(0)$ par définition de γ . Mais $V(\infty) - V(0) = \int_0^\infty \dot{V}(\tau) d\tau$ et donc

$$\alpha = \gamma - V(0) \leq V(\infty) - V(0) \leq \int_0^\infty u(\tau) y(\tau) d\tau$$

3. Passivité et connexion

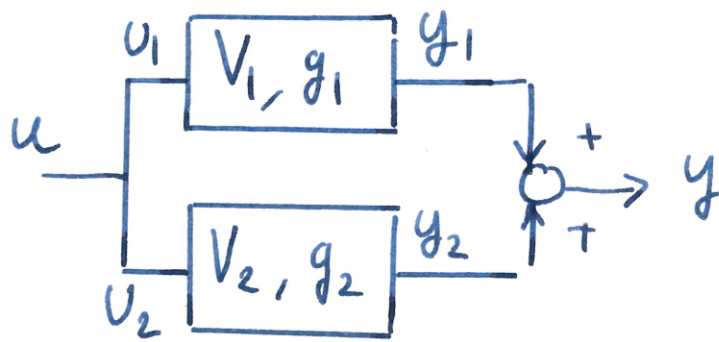
La passivité est maintenue par :

3.1 ~~connexion série~~

3.2 connexion parallèle

3.3 connexion par rétroaction négative.

3.1 Connexion parallèle



$$\dot{V}_1 = u_1 y_1 - g_1 \quad g_1 \geq 0$$

$$\dot{V}_2 = u_2 y_2 - g_2 \quad g_2 \geq 0$$

$$u = u_1 = u_2$$

$$y = y_1 + y_2$$

Propriétés $V \triangleq V_1 + V_2$

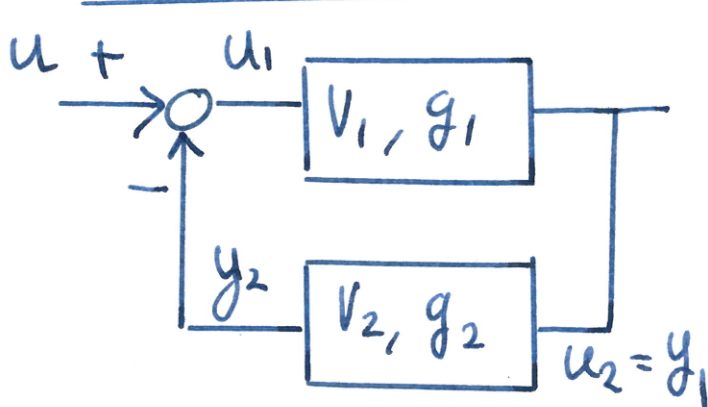
$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = u_1 y_1 - g_1 + u_2 y_2 - g_2$$

$$= u y_1 + u y_2 - g_1 - g_2$$

$$= u (y_1 + y_2) - g_1 - g_2$$

$$= u \cdot y - g \quad \text{avec } g = g_1 + g_2 \geq 0$$

3.2 Connexion par rétroaction négative



$$y = y_1$$

$$\dot{V}_1 = u_1 y_1 - g_1 \quad g_1 \geq 0$$

$$\dot{V}_2 = u_2 y_2 - g_2 \quad g_2 \geq 0$$

$$u_1 = u - y_2$$

$$u_2 = y_1$$

Propriétés $V \triangleq V_1 + V_2$

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = u_1 y_1 - g_1 + u_2 y_2 - g_2$$

$$= (u - y_2) y_1 + y_1 y_2 - g_1 - g_2$$

$$= u \cdot y_1 - g_1 - g_2$$

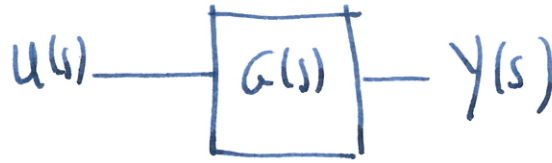
$$= u y - g \quad g = g_1 + g_2 \geq 0$$

4. Passivité et système linéaire

Soit le système linéaire:

$$G(s) = \frac{b^m s^m + b^{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_0}$$

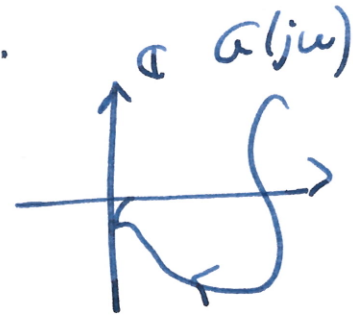
$$G(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$



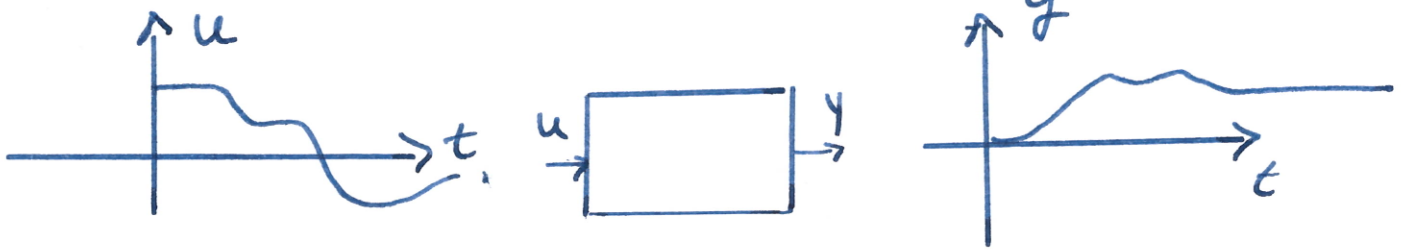
Théorème :

$G(s)$ est passif $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(G(j\omega)) \geq 0 \quad \forall \omega.$

Démonstration : On va utiliser la définition intégrale de la passivité, et le th. de Parseval.



$$\int_0^{\infty} u(\tau) y(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) u(\tau) d\tau$$



$u(t) = 0$ pour $t < 0$.

Parseval:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) y(\tau) d\tau &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega) U^*(j\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(j\omega)| |U(j\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

[car $Y(j\omega) = G(j\omega) U(j\omega)$
 et $u \cdot u^* = |u|^2$]

On sépare l'intégrale en deux:

(6)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 G(j\omega) |U(j\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G(j\omega) |U(j\omega)|^2 d\omega$$

On change de variable dans la première intégrale, avec $\omega = -\bar{\omega}$ et donc $d\omega = -d\bar{\omega}$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{+\infty}^0 G(-j\bar{\omega}) |U(-j\bar{\omega})|^2 d\bar{\omega} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G(j\omega) |U(j\omega)|^2 d\omega$$

Comme $u(t)$ est réel pour tout t , $U(j\omega) = U^*(-j\omega)$ et ainsi $|U(-j\omega)|^2 = U(-j\omega) U^*(-j\omega) = U^*(+j\omega) U(+j\omega) = |U(j\omega)|^2$. En conséquence,

$$\int_0^{\infty} u(\tau) y(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G(-j\omega) |U(j\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G(+j\omega) |U(j\omega)|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{G(j\omega) + G(-j\omega)}{2} |U(j\omega)|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}(G(j\omega)) |U(j\omega)|^2 d\omega$$

(*)

La proposition à démontrer est

$$\text{Passivité} \iff \operatorname{Re}(G(j\omega)) \geq 0$$

(A)

(B)

(B) $\Rightarrow$ (A) est directe au vu de la formule (*).

car on a $\int_0^{\infty} u(\tau) y(\tau) d\tau \geq 0$ et donc $\delta = 0$ pour la déf. intégrale.

Pour démontrer $(A) \Rightarrow (B)$, on utilise la contraposée, non (B) implique non (A) , autrement dit

$$\overline{(B)} \Rightarrow \overline{(A)}$$

Non (B) signifie qu'il existe un intervalle $[\omega_1, \omega_2]$ pour lequel $G(j\omega) < 0$.

Montrons qu'il ne peut exister de borne inférieure δ à $\int_0^\infty u(\tau)y(\tau)d\tau$. A cette fin, il suffit d'introduire un signal à l'entrée dans la bande de fréquence correspondant à $[\omega_1, \omega_2]$. Comme on peut rendre arbitrairement grande l'entrée u , on peut rendre arbitrairement petit

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \operatorname{Re}(G(j\omega)) |U(j\omega)|^2 d\omega$$

Il ne peut donc exister de borne inférieure δ .

5. Conditions nécessaires:

Un système linéaire passif doit avoir les propriétés suivantes :

- être stable (aucun pôle à partie réelle positive).
- d° relatif 1: $n-m \leq 1$, $m \leq n$.

- être à non-minimum de phase.

c.-à-d. tous les zéros, z_i , $i=1, \dots, m$

$$\operatorname{Re}(z_i) < 0.$$