

## VII. Constructions des fonctions de Lyapunov Instabilité, thm. de Chetaev

①

1. Méthode de Krasovskii
2. Gradients variables
3. Théorème d'instabilité
4. Théorème de Chetaev

### 1. Méthode de Krasovskii

On part de  $\dot{x} = f(x)$  et on obtient la matrice Jacobienne

$$A \triangleq \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = A(x)$$

en gardant tous les éléments de la matrice comme des fonctions non linéaires.

Thm: Si  $A(x) + A(x)^T < 0, \forall x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow V = f^T f$  est fct de Lyapunov.

Démonstration:  $\dot{V} = \dot{f}^T f + f^T \dot{f} = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \dot{x} \right)^T f + f^T \left( \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \dot{x} \right)$

$$= f^T \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^T f + f^T \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) f = f^T (A^T + A) f$$

ainsi si  $A^T + A < 0, \forall x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

on a localement une fonction de Lyapunov  
 $V = f^T f$ .

Corollaire (Extension) si  $A^T(x)P + PA(x) < 0 \quad \forall x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

alors  $V \triangleq f^T P f$  est loc. une fct. de Lyapunov.

Démonstration:  $\dot{V} = \dot{f}^T P f + f^T P \dot{f} = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} \right)^T P f + f^T P \left( \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} \right)$

$$= f^T (A^T(x)P + PA(x)) f < 0$$

$A^T(x)P + PA(x) < 0, \forall x \Rightarrow V = f^T P f$  fct. de Lyapunov

## 2. Gradients variables

(2)

L'idée est d'assurer d'abord la condition  $\dot{V} \leq 0$ , et ensuite vérifier  $V > 0$ .

Si on examine  $\dot{V}$ , cette quantité est le produit scalaire entre le gradient de  $V$  et le champ de vecteurs  $f$ . Il existe ainsi  $n$  fonctions  $\frac{\partial V}{\partial x_i}$  avec lesquelles on peut garantir  $\dot{V} \leq 0$ .

$$\dot{V} = L_f V = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

On peut également écrire

$$\dot{V} = dV \cdot f \quad \text{où } dV \text{ est une } 1\text{-forme exacte} \quad dV = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i$$

## 1-formes Classification des formes différentielles

Définition:  $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$  est intégrable

s'il existe une fonction  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle qu'il existe une fonction  $W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  pour laquelle

$$\phi \cdot \omega = dW$$

Définition:  $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$  est exacte, s'il existe une fonction  $W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $dW = \omega$ .

Thms: (a)  $\omega$  est exacte  $\Leftrightarrow d\omega = 0$

(b)  $\omega$  est intégrable  $\Leftrightarrow d\omega \wedge \omega = 0$

(c)  $\omega$  n'est pas intégrable  $\Leftrightarrow d\omega \wedge \omega \neq 0$ .



## Définition du calcul extérieur

(3)

L'opérateur  $d$  est le gradient classique lorsque  $d$  agit sur une fonction:

En notation classique:

$$\frac{\nabla V}{\nabla x} = \left[ \frac{\nabla V}{\nabla x_1} \frac{\nabla V}{\nabla x_2} \dots \frac{\nabla V}{\nabla x_n} \right]$$

En calcul extérieur

$$dV = \frac{\nabla V}{\nabla x_1} dx_1 + \frac{\nabla V}{\nabla x_2} dx_2 + \dots + \frac{\nabla V}{\nabla x_n} dx_n$$

L'opérateur  $\wedge$  indique un produit anti-commutatif

$$dw_1 \wedge dw_2 = - dw_2 \wedge dw_1$$

Si  $w$  est une somme  $\sum_i \alpha_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m \triangleq w$

avec  $\alpha_i$  des fonctions  $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ,

$$\text{alors } dw = \sum_i d\alpha_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$$

Exemple:

$$d(3x_1 x_2^2 dx_1 \wedge dx_2) = d(3x_1 x_2^2) \wedge dx_1 \wedge dx_2$$

$$= (3x_2^2 dx_1 + 6x_1 x_2 dx_2) \wedge dx_1 \wedge dx_2 =$$

$$3x_2^2 dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + 6x_1 x_2 dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = 0.$$

Condition d'exactitude

$$dw = 0 \iff \frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \frac{\partial w_j}{\partial x_i}, i \neq j$$

Retour à la méthode des gradients réduits:

① On choisit  $w_i(x)$  de telle sorte que  $\sum_i w_i(x) f_i(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

② On forme le vecteur ligne  $[w_1(x) \ w_2(x) \ \dots \ w_n(x)]$   
autrement dit la 1-forme  $w = \sum_i w_i(x) dx_i$

③ itérer entre ① et ② afin de garantir l'exactitude  $\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \frac{\partial w_j}{\partial x_i}, i \neq j$ .

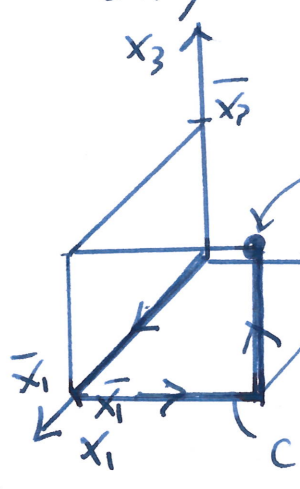
On procède à l'intégration pour obtenir  $V$

$$\int \sum_i w_i dx_i = V$$

Comme  $\sum_i w_i dx_i$  est exacte, la valeur  $\int \sum_i w_i dx_i$  ne dépend pas du chemin d'intégration.

(cf. différentielles exactes en Thermodynamique).

On peut choisir un chemin en escaliers


$$V(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \int_C \sum_i w_i dx_i = \int_{\xi=0}^{\bar{x}_1} w_1(\xi, 0, 0, \dots, 0) d\xi \\ + \int_{\xi=0}^{\bar{x}_2} w_2(\bar{x}_1, \xi, 0, 0, \dots, 0) d\xi \\ + \dots + \int_{\xi=0}^{\bar{x}_n} w_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-1}, \xi) d\xi$$

Exemple

$$\dot{x}_1 = -2x_1^3 - x_1^2 x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 x_2^2 - x_2^3$$

$$\nabla V = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{12}x_1 + a_{21}x_2) \quad a_{ij} \in \mathbb{R} \quad \begin{matrix} i=1,2 \\ j=1,2 \end{matrix}$$

Comme  $\frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = a_{12} = \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1} = a_{12}$ , les conditions d'exactitudes sont remplies.

Déterminons  $a_{ij}$  pour que  $\nabla V \cdot f < 0, \forall x \neq 0$ .

Comme avec  $a_{11}=2, a_{12}=a_{22}=1$ , on a

$$\nabla V \cdot f = -4x_1^4 - 4x_1^3x_2 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2^3 - x_2^4 \\ = -(2x_1 + x_2)^2 x_1^2 - (x_1 + x_2)^2 x_2^2 < 0$$

la condition  $\dot{V} < 0$  est remplie.

Intégrons en escaliers  $\nabla V = (2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2)$  (5)

$$\omega = (2x_1 + x_2) dx_1 + (x_1 + x_2) dx_2 = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2$$

$$\begin{aligned} V(\bar{x}_1, \bar{x}_2) &= \int_{\bar{x}=0}^{\bar{x}_1} 2\bar{x} d\bar{x} + \int_{\bar{x}=0}^{\bar{x}_2} (\bar{x}_1 + \bar{x}) d\bar{x} \\ &= \bar{x}_1^2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \frac{\bar{x}_2^2}{2} = \frac{1}{2} \bar{x}_1^2 + \frac{1}{2} (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)^2 > 0 \Leftrightarrow V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1 x_2 + \frac{x_2^2}{2} \end{aligned}$$

### 3. Théorèmes d'instabilité (au sens de Lyapunov)

L'instabilité est la négation de la proposition associée à la stabilité (au sens de Lyapunov). On peut donc dire: syst. instable au sens de Lyapunov  $\Leftrightarrow$

$$\exists R, \forall r, \exists x_0(r), \exists T(x_0) < \infty, \|X(x_0, T)\| > R.$$

En d'autres termes, il suffit d'une seule condition initiale par petite boule  $B_r$  assurant une sortie de la trajectoire  $X(x_0, \cdot)$  du tube de confinement de rayon  $R$ . Les théorèmes d'instabilité tirent parti de cette "rareté" des conditions initiales.

Thm:  $\exists \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, 0 \in \Omega$  et  $\exists V,$   
 $V(x) > 0, \forall x \in \Omega \setminus \{0\}$   
 $V(0) = 0$

$$\exists \lambda > 0, \lambda \in \mathbb{R}, \frac{d}{dt} V - \lambda V \geq 0, \forall x \in \Omega$$

alors 0 est instable au sens de Lyapunov.



Démonstration: Comme  $V > 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $dt > 0$  (6)

$$\dot{V} \geq 0 \Rightarrow \frac{dV}{V} \geq \lambda dt \quad (\text{on ne change pas le sens de l'inégalité})$$

$$\ln(V) + C \geq \lambda t$$

$$\Rightarrow V(x) \geq V_0 e^{\lambda t} \quad \text{Comme } \Omega \text{ est ouvert, on peut prendre n'importe quel } R \text{ tel que } B_R \subseteq \Omega.$$

$$\max_{x \in B_R} V(x) = \max_{x \in S_R} V(x) \triangleq \hat{V}$$

On choisit n'importe quel  $r < R$ , et n'importe quel

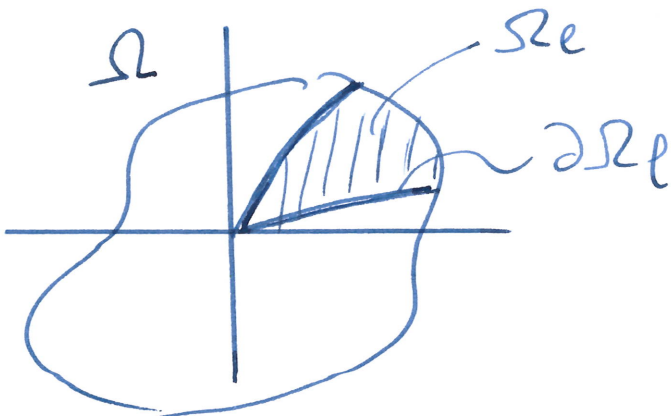
$x_0 \in S_r$ . On a  $V(x_0) \neq 0$  et comme

$$V(x) \geq V(x_0) e^{\lambda t}, \text{ il existe } \bar{t}, V(\gamma(x_0, \bar{t})) > \hat{V}$$

et comme  $B_R$  est la plus grande boule contenue dans l'ensemble  $\{x \mid V(x) \leq \hat{V}\}$ ,  $\|\gamma(x_0, \bar{t})\| > R$ .  
C.Q.F.D.

Le prochain théorème tire parti de la "rareté" des conditions initiales.  
(possible)

4. Thm. de Chow  $\partial\Omega_p$  est le bord adjacent et contenant 0 de  $\Omega_p$ .



$$V(x) > 0, \forall x \in \Omega_p$$
$$\frac{d}{dt} V(x) > 0, \forall x \in \Omega_p$$

$$0 \in \partial\Omega_p$$

$$V(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega_p$$

### Esquisse de démonstration:

(7)

Comme  $\dot{V} > 0$ ,  $V(X(x_0, t))$  croît le long des trajectoires. Il faut s'assurer que pour certaines conditions initiales, la trajectoire demeure dans  $\Omega_e$  et finissent par quitter une boule  $B_R$  sans passer par les bords  $\partial\Omega_e$ .

---

Les trajectoires qui commencent dans  $\Omega_e$  ne peuvent pas passer, cloquer  $\partial\Omega_e$  car  $\dot{V} > 0$  et  $\underline{V=0}$  sur  $\partial\Omega_e$ . Elles ne peuvent éternellement rester dans  $B_R \cap \Omega_e$ , car  $\dot{V} > 0$ .

Elles sortent donc de  $B_R \cap \Omega_e$  par le bord de  $B_R \cap \Omega_e$  qui n'est pas  $\partial\Omega_e \cap B_R$ .

---

Ainsi en choisissant une boule  $R$  entièrement contenue dans  $\Omega$ , le bord de  $B_R \cap \Omega_e$  qui n'est pas  $B_R \cap \partial\Omega_e$  est tel que tout les  $x$  sur ce bord sont t.q.  $\|x\| = R$ . Ainsi,  $\forall x_0 \in B_R \cap \Omega_e$ ,  $\exists \bar{t}$ ,  $\|X(x_0, \bar{t})\| > R$ .

---