

---

## X. Linéarisation

- |                                |                                     |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| 1. Principe                    | 4. Dérivée de Lie et crochet de Lie |
| 2. Linéarisation entrée-sortie | 5. Théorème de Frobenius            |
| 3. Linéarisation exacte        |                                     |
- 

### 1. Principe

Système affine en l'entrée:

$$\dot{x} = f(x) + g(x) u$$

Rendre équivalent ce système non linéaire à une chaîne d'intégrateurs:

$$\dot{x} = f(x) + g(x) u \Leftrightarrow \begin{array}{ll} y^{(r)} = v & r \leq n \\ y = h(x) & y \text{ nouvelle sortie} \end{array}$$

---

### 2. Linéarisation entrée-sortie

Soit  $\dot{x} = f(x) + g(x) u$ ,  $\dim x = n$ , et une sortie  $y = h(x)$  donnée.

Méthode: Dériver la sortie jusqu'à apparition de l'entrée  $u$ . Poser cette dernière égale à  $v$ .

---

Le bouclage

$$u = \left( v - \frac{\partial h}{\partial x} f(x) \right) \frac{1}{\frac{\partial h}{\partial x} g}$$

linéarise.

$$\begin{array}{l} \dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) + \frac{\partial h}{\partial x} g(x) u \\ \text{Si } \frac{\partial h}{\partial x} g(x) \neq 0 \quad \text{arrêter de dériver et} \\ \text{poser } v = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) + \frac{\partial h}{\partial x} g(x) u = \dot{y} \end{array}$$

---

---

Si  $\frac{\partial h}{\partial x} g(x) = 0$ , on dérive une fois de plus.

Définition: Pour simplifier la notation lors de dérivées successives, on introduit la dérivée de Lie, notée  $L_f h$ , ou dérivée directionnelle:

$$L_f h = \frac{\partial h}{\partial x} f = \left( \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial h}{\partial x_n} \right) \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

---

Avec cette définition (notation):

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} f + \frac{\partial h}{\partial x} g(x) u = L_f h + L_g h u$$

Lorsque  $L_g h = 0$ , on peut dériver une fois de plus

$$\ddot{y} = \frac{\partial L_f h}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial L_f h}{\partial x} (f(x) + g(x) u) = L_f^2 h + L_g L_f h u$$

---

Si  $L_g L_f h \neq 0$ , on s'arrête et on pose  $\ddot{y} = v$

Si  $L_g L_f h = 0$ , on dérive une fois de plus

$$y^{(3)} = L_f^3 h + L_g L_f^2 h u$$

et ainsi de suite...jusqu'à

$$\exists r, L_g L_f^{r-1} h \neq 0$$

---

Définition:  $r$  est appelé le degré relatif, le premier entier  $r$  tel que  $L_g L_f^{(r-1)} h \neq 0$ .

Bouclage linéarisant:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x) u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad y^{(r)} = v u = \left( v - L_f^r h \right) \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h}$$

---

---

## 2.1 Dynamique des zéros

Lorsque  $r < n$ , la chaîne d'intégrateurs  $y^{(r)} = v$  ne représente que  $r$  dimensions (une variété de dimension  $r$  dans  $n$ ). Il reste des états non commandés (une sous-variété de dimension  $n - r$ ). Il est important de vérifier la stabilité de ce système lorsque

$$y = \dot{y} = \ddot{y} = \dots = y^{(r)} = 0$$

---

Il demeure  $n - r$  états sujet à une dynamique (la dynamique des zéros)

$$y = h(x) = 0$$

$$\dot{y} = L_f h = 0$$

$$\vdots$$

$$y^{(r)} = L_f^{(r-1)} h$$

$$\rightarrow \dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_{r+1} \\ \dot{z}_{r+2} \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{pmatrix} = Z(z_{r+1}, \dots, z_n)$$

---

## 2.2 Stabilisation de la chaîne d'intégrateurs

$y^{(r)} = v$  est stabilisée (ou asservie) à l'aide de la variable d'erreur

$$e = y_c - y$$

---

1. Prendre un polynôme caractéristique d'ordre  $r$

$$\chi(s) = s^r + a_1 s^{r-1} + \dots + a_r$$

avec toutes ses racines à partie réelle strictement négative.

$$\chi(s) = (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_r) \quad \Re(p_i) < 0 \quad i = 1, \dots, r$$

---

3. Poser

$$\chi(s) E(s) = 0$$

4. Effectuer la transformée de Laplace inverse (à condition initiales nulles)

$$\begin{aligned} e^{(r)} + a_1 e^{r-1} + \dots + a_{r-1} \dot{e}_r + a_r e_r &= 0 \\ (y_c^{(r)} - y^{(r)}) + a_1 (y_c^{(r-1)} - y^{(r-1)}) + \dots + a_{r-1} (\dot{y}_c - \dot{y}) + a_r (y_c - y) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

---

4. Poser

$$y^{(r)} = v \quad \text{et} \quad y^{(i)} = L_f^i h$$

et résoudre pour  $v$

---

Le bouclage issu de la résolution de (1) pour  $v$  stabilise (asservit)  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ , lorsque  $y_c = 0$ , avec

$$u = \left( v - L_f^r h \right) \frac{1}{L_g L_f^{(r-1)} h}$$

si la dynamique des zéros  $\dot{z} = \mathcal{Z}(z)$  est asymptotiquement stable avec  $z = \begin{pmatrix} z_{r+1} & \dots & z_n \end{pmatrix}^T$

---

3. Linéarisation exacte: sortie linéarisante avec  $r = n$

Sortie inconnue  $y = h(x)$  à déterminer de telle sorte que  $r = n$ . L'idée est de supprimer la dynamique des zéros.

Soit  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  avec  $y = h(x)$  à déterminer. Nous avons un ensemble de conditions pour garantir

$$r = n$$

---

---

(2) sont les  $n - 1$  conditions pour déterminer la fonction  $h(x)$

$$\begin{aligned} L_g h &= 0 \\ L_g L_f h &= 0 \\ &\vdots \\ L_g L_f^{n-2} h &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

---

#### 4. Dérivée de Lie et crochet de Lie

Nous avons vu la dérivée de Lie

$$L_g h = \frac{\partial h}{\partial x} f = \left( \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \frac{\partial h}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial h}{\partial x_n} \right) \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

---

L'ensemble des conditions (2) est un système d'équations aux différentielles partielles pour la fonction  $h(x)$ .

---

Introduisons le crochet de Lie:

Définition: Le crochet de Lie entre deux champs de vecteurs  $f_1 : x \rightarrow f_1(x)$  et  $f_2 : x \rightarrow f_2(x)$

$$f_1 = \begin{pmatrix} f_{11}(x) \\ \vdots \\ f_{1n}(x) \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} f_{21}(x) \\ \vdots \\ f_{2n}(x) \end{pmatrix} \quad \text{est} \quad [f_1, f_2] = \frac{\partial f_2}{\partial x} f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2$$

---

$$[f_1, f_2] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{21}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{21}}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{2n}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{2n}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{2n}}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} \\ \vdots \\ f_{1n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{11}}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{1n}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{1n}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{1n}}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{21} \\ \vdots \\ f_{2n} \end{pmatrix}$$

Transformons, à l'aide du crochet, le système d'équations aux dérivées partielles (2) en système d'équations aux différentielles partielles du premier ordre.

---

Lemme: Pour le crochet et la dérivée de Lie, on a la propriété suivantes:

$$L_{[f_1, f_2]} h = L_{f_2} L_{f_1} h - L_{f_1} L_{f_2} h$$

En reprenant les conditions sur  $h(x)$ , en utilisant  $L_g h = 0$  et  $L_g L_f h = 0$ , on a

$$L_f L_g h = 0$$

et donc

$$L_g L_f h - L_f L_g h = L_{[f, g]} h = 0$$

En procédant de manière analogue, on montre que (2) est équivalent au système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre

$$L_g h = 0$$

$$L_{[f, g]} h = 0$$

$$\vdots$$

$$L_{[f, [f, \dots, [f, g]]} = L_{\text{ad}_f^{n-2} g} h = 0$$

en introduisant  $\text{ad}_f^r g = [f, [f, \dots, [f, g], \dots]]$

---

---


$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) \begin{pmatrix} g & [f, g] & [f, [f, g]] & \cdots & \text{ad}_f^{n-2} g \end{pmatrix} = 0 \quad \text{avec} \quad \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$


---

Problème: Déterminer un changement de coordonnées  $z = \phi(x)$ , un bouclage

$$u = \alpha(x) + \beta(x) v$$

et une sortie

$$y = h(x)$$

de telle sorte qu'en posant  $y^{(n)} = v$ , on ait une équivalence avec  $z_i = y^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$

---

## 5. Théorème de Frobenius

Posons

$$z_1 = h(x)$$

$$z_2 = L_f h(x)$$

$$z_3 = L_f^2 h(x)$$

$$\vdots$$

$$z_n = L_f^{n-1} h(x)$$

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^n h}{L_g L_f^{(n-1)} h}$$

$$\beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{(n-1)} h}$$


---

Le problème de linéarisation exacte est résoluble si  $h(x)$  existe. Cette existence est donnée par le théorème de Frobenius.

Théorème: Soit  $\omega$  une 1-forme telle que  $\omega g = 0$ ,  $\omega [f, g] = 0$ ,  $\dots$ ,  $\omega \text{ad}_f^{n-2} g = 0$

---

---

$\omega$  est intégrable, si et seulement si les deux conditions suivantes sont réunies:

1.  $C = \begin{pmatrix} g & \text{ad}_f g & \cdots & \text{ad}_f^{n-1} g \end{pmatrix}$  est de plein rang (i.e.  $\det C \neq 0$ );
2.  $\tilde{C} = \{g, \text{ad}_f g, \cdots, \text{ad}_f^{n-2} g\}$  est une famille involutive.

---

Définition: La famille  $\{m_1, \cdots, m_{n-1}\}$  est involutive, lorsque le crochet de n'importe quel élément engendré par la famille (par crochet de Lie) retombe dans la famille i.e.

$$[m_i, m_j] \in \text{span}\{m_1, \cdots, m_{n-1}\} \quad i \neq j$$

---