
X. Linéarisation

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| 1. Principe | 4. Dérivée de Lie et crochet de Lie |
| 2. Linéarisation entrée-sortie | 5. Théorème de Frobenius |
| 3. Linéarisation exacte | |

1. Principe

Système affine en l'entrée:

$$\dot{x} = f(x) + g(x) u$$

Rendre équivalent ce système non linéaire à une chaîne d'intégrateurs:

2. Linéarisation entrée-sortie

Soit $\dot{x} = f(x) + g(x) u$, $\dim x = n$, et une sortie $y = h(x)$ donnée.

Méthode:

Le bouclage

linéarise.

Si , on dérive une fois de plus.

Définition: Pour simplifier la notation lors de dérivées successives, on introduit la dérivée de Lie, notée $L_f h$, ou dérivée directionnelle:

Avec cette définition (notation):

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} f + \frac{\partial h}{\partial x} g(x) u =$$

Lorsque $L_g h = 0$, on peut dériver une fois de plus

$$\ddot{y} = \frac{\partial L_f h}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial L_f h}{\partial x} (f(x) + g(x)u) =$$

Si $L_g L_f h \neq 0$, on s'arrête et on pose $\ddot{y} = v$

Si $L_g L_f h = 0$, on dérive une fois de plus

et ainsi de suite...jusqu'à

Définition: r est appelé le degré relatif, le premier entier r tel que $L_g L_f^{(r-1)} h \neq 0$.

Bouclage linéarisant:

2.1 Dynamique des zéros

Lorsque $r < n$, la chaîne d'intégrateurs $y^{(r)} = v$ ne représente que r dimensions (une variété de dimension r dans n). Il reste des états non commandés (une sous-variété de dimension $n - r$). Il est important de vérifier la stabilité de ce système lorsque

Il demeure $n - r$ états sujet à une dynamique (la dynamique des zéros)

2.2 Stabilisation de la chaîne d'intégrateurs

$y^{(r)} = v$ est stabilisée (ou asservie) à l'aide de la variable d'erreur

1. Prendre un polynôme caractéristique d'ordre r

avec toutes ses racines à partie réelle strictement négative.

3. Poser

$$\chi(s) E(s) = 0$$

4.

(1)

4. Poser

$$y^{(r)} = v \quad \text{et} \quad y^{(i)} = L_f^i h$$

et résoudre pour v

Le bouclage issu de la résolution de (1) pour v stabilise (asservit) $\dot{x} = f(x) + g(x)u$, lorsque $y_c = 0$, avec

si la dynamique des zéros $\dot{z} = \mathcal{Z}(z)$ est asymptotiquement stable avec

3. Linéarisation exacte: sortie linéarisante avec $r = n$

Sortie inconnue $y = h(x)$ à déterminer de telle sorte que $r = n$. L'idée est de supprimer la dynamique des zéros.

(2) sont les $n - 1$ conditions pour déterminer la fonction $h(x)$

(2)

4. Dérivée de Lie et crochet de Lie

Nous avons vu la dérivée de Lie

L'ensemble des conditions (2) est un système d'équations aux différentielles partielles pour la fonction $h(x)$.

Introduisons le crochet de Lie:

Définition: Le crochet de Lie entre deux champs de vecteurs $f_1 : x \rightarrow f_1(x)$ et $f_2 : x \rightarrow f_2(x)$

$$f_1 = \begin{pmatrix} f_{11}(x) \\ \vdots \\ f_{1n}(x) \end{pmatrix} f_2 = \begin{pmatrix} f_{21}(x) \\ \vdots \\ f_{2n}(x) \end{pmatrix} \quad \text{est}$$

$$[f_1, f_2] =$$

Transformons, à l'aide du crochet, le système d'équations aux dérivées partielles (2) en système d'équations aux différentielles partielles du premier ordre.

Lemme: Pour le crochet et la dérivée de Lie, on a la propriété suivantes:

En reprenant les conditions sur $h(x)$, en utilisant $L_g h = 0$ et $L_g L_f h = 0$, on a

et donc

En procédant de manière analogue, on montre que (2) est équivalent au système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre

Problème: Déterminer un changement de coordonnées $z = \phi(x)$, un bouclage

$$u = \alpha(x) + \beta(x) v$$

et une sortie

$$y = h(x)$$

de telle sorte qu'en posant $y^{(n)} = v$, on ait une équivalence avec $z_i = y^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$

5. Théorème de Frobenius

Posons

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= -\frac{L_f^n h}{L_g L_f^{(n-1)} h} \\ \beta(x) &= \frac{1}{L_g L_f^{(n-1)} h}\end{aligned}$$

Le problème de linéarisation exacte est résoluble si $h(x)$ existe. Cette existence est donnée par le théorème de Frobenius.

Théorème: Soit ω une 1-forme telle que $\omega g = 0$, $\omega [f, g] = 0$, $\dots$, $\omega \text{ad}_f^{n-2} g = 0$

ω est intégrable, si et seulement si les deux conditions suivantes sont réunies:

Définition: La famille $\{m_1, \dots, m_{n-1}\}$ est involutive, lorsque le crochet de n'importe quel élément engendré par la famille (par crochet de Lie) retombe dans la famille i.e.
