V. Analyse par les méthodes de Lyapunov

1. Désavantages de la définition
2. Candidat de Lyapunov
3. Fonction de Lyapunov
4. Equivalence avec la définition
5. Exemple du robot
6. Systémes linéaires

---

1. Désavantages de la définition

Reprenons la définition de la stabilité:

Désavantages:

Vérifier cette condition nécessite de tester $\forall x_0$.

On cherche une condition plus simple utilisant une sorte d'énergie.

Quelques remarques:

1. Un système dont l'énergie augmente en permanence est un système instable.
2. Un système mécanique conservateur avec un potentiel minimum à l'équilibre est stable.
3. Un système mécanique conservateur avec un potentiel extremum autre qu'un minimum est instable.

⚠ Un système non conservatif qui a son énergie qui décroit en permanence n'est pas nécessairement stable.

Exemple: frottement sec cinétique et point matériel sur parabole inversée.

2. Candidat de Lyapunov

Résumons:

- $\dot{E} = 0$ $\Rightarrow$ $\bar{x}$ stable.
- $\dot{E} = 0$ et , $\Rightarrow$ instable.
- Lorsque $\dot{E} < 0$, .

Soit $\bar{x} = 0$ le point d'équilibre de $\dot{x} = f(x)$

<u>Définition:</u> Un candidat de Lyapunov $V(x)$ est une fonction

$$V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

3. Fonction de Lyapunov

<u>Définition:</u> Pour qu'un candidat de Lyapunov soit une fonction de Lyapunov, il faut une troisième condition

4. Equivalence avec la définition de stabilité

Il faut montrer

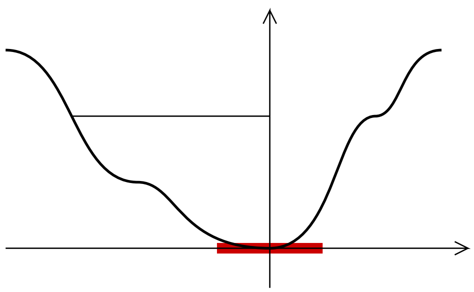
$\Rightarrow$ Stabilité (pas nécessairement asymptotique)

Soit R donné, il est nécessaire de déterminer r selon la définition.

Soit $\mathscr{S}_R = \{x | \|x\| = R\}$

$$x_m = \arg\min_{x\in\mathscr{S}_R} V(x)$$

$$m = \min_{x\in\mathscr{S}_R} V(x)$$



comme V est continue, en se rapprochant du point d'équilibre, il existe une petite boule $\mathscr{B}_r$ telle qu'il est garantit

Le r de la définition coïncide avec un r satisfaisant la condition (1). En effet, $\dot{V}(x) \leq 0$ implique

et donc

<u>Démonstration de la stabilité locale asymptotique</u>

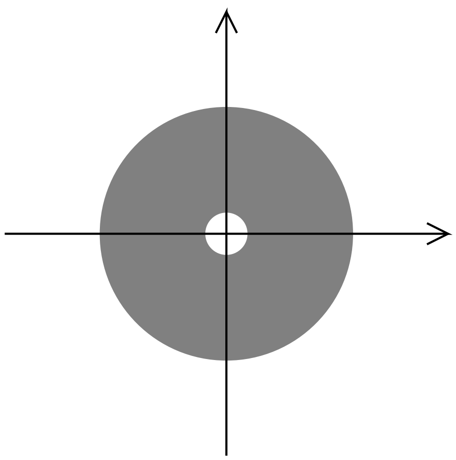
Comme $\dot{V}(x) < 0$, $\forall x \neq 0$, et $V(x)$ borné inférieurement, $\exists L \neq \infty$ pour lequel

2 cas sont possibles:

a) $L = 0$

b) $L \neq 0$

a) $L = 0$ implique $\lim_{t\to\infty} \chi(x_0, t) = 0$ car la seule valeur de x qui annule V est $x = 0$.
b) $L \neq 0$. Comme $\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) < 0$, V décroit de manière monotone le long des solutions, i.e. $V(\chi(x_0, t))$ décroit en fonction du temps. Mais étant donné qu'elle atteint la valeur L, il existe r_0 pour lequel



De plus, la trajectoire est garantie de ne jamais entrer dans $\mathscr{B}_{r_0}$. Soit

Si $L \neq 0$, $\chi(x_0, t) \in \mathscr{W}$, $\forall t$. Nous allons montrer une contradiction.

Soit $\gamma = \max_{x\in\mathscr{W}} \dot{V}(x)$. Comme $\dot{V}(\gamma) < \gamma < 0$,

5. Exemple du robot

Prenons un robot plan

Couples (moments de force) $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$
Coordonnées: $q_1, q_2, \ldots, q_n$

Soit $M() \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice d'inertie de telle sorte que

$$T = E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M(q)\,\dot{\mathbf{q}} \qquad \dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

Bilan de puissance:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i\,\tau_i = \dot{\mathbf{q}}^T\,\tau \qquad \tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{pmatrix}$$

Considérons des régulateurs PD découplés

$$\tau_i = -k_{p_i}\,q_i - k_{d_i}\,\dot{q}_i$$

afin de réguler autour du point d'équilibre $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$. Prenons

---

Avec

$$K_p = \begin{pmatrix} k_{p_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_{p_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 & k_{p_n} \end{pmatrix}$$

On constate que V est une fonction continue de

$$x = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n & \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \cdots & \dot{q}_n \end{pmatrix}^T$$

et que $V(0) = 0$. Il s'agit donc bien d'une candidat de Lyapunov.

Vérifions que $V(x)$ est une fonction de Lyapunov en utilisant le bilan de puissance

---

⚠ La stabilité asymptotique n'est pas garantie car $\dot{V} \leq 0$ et non $\dot{V} < 0$. On verra par la suite comment améliorer le résultat.

---

6. Systèmes linéaires et fonction de Lyapunov

$$\dot{x} = Ax \qquad x \in \mathbb{R}^n \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

On se place dans le cadre de l'algèbre linéaire. Comme candidat de Lyapunov, on prend un forme définie positive associée à une matrice définie positive

$$P > 0$$

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T P x$$

- $V(0) = 0$
- $V(x)$ continue
- $V(x) > x, \forall x \neq 0$

Ainsi on peut poser

$$-Q = A^T P + PA \qquad \text{et tester} \qquad Q > 0$$

<u>Théorème</u> $\Re(\lambda_i(A)) < 0, \forall i = 1, \dots, n$
$\Leftrightarrow \forall Q > 0, \exists P$, tel que, $A^T P + PA = -Q$.

<u>Démonstration:</u> $\Leftarrow$: stabilité asympotique selon le théorème non linéaire
$\Rightarrow$: Posons

et introduisons ce P dans $A^T P + PA$

étant donné que $\Re(\lambda_i) < 0$ ce qui entraîne $\lim_{t \to \infty} e^{A^T t} = 0$

On a bien $A^T P + PA = -Q$ Ainsi, pour chaque $Q > 0$, on peut calculer un P selon (2). Il reste à vérifier $P > 0$. Ceci provient du fait que e^{At} est inversible il n'y a pas de perte de rang dans (2) et donc comme $Q > 0$, P est une somme (intégrale) de matrices définies positives, et donc une matrice définie positive.