
VI. Méthode de Lyapunov – théorème d'invariance

1. Stabilité locale et linéarisation
 2. Stabilité globale
 3. Théorème d'invariance de LaSalle
 4. Exemple du pendule
-

1. Stabilité locale et linéarisation

Objectifs

- Démontrer que le système non linéaire est stable lorsque la linéarisation est stable
 - Déterminer une région des conditions initiales associée à la stabilité
-

Soit le syst. NL. $\dot{x} = f(x)$ avec $x \in \mathbb{R}^n$ et le point d'équilibre $\bar{x} = 0$. La linéarisation locale est définie par la matrice

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=0}$$

La dynamique linéaire associée à la linéarisation est $\dot{x} = Ax$.

Théorème: Si $\dot{x} = Ax$ est stable asymptotiquement (i.e. $\Re(\lambda_i(A)) < 0, \forall i$), alors $\dot{x} = f(x)$ est localement stable asymptotiquement.

Par contre, si $\exists i, \Re(\lambda_i(A)) = 0$ et si $\forall j \neq i, \Re(\lambda_j(A)) \leq 0$, il est impossible de conclure sur la stabilité du système $\dot{x} = f(x)$ en utilisant uniquement l'information contenue dans A .

Démonstration: Comme $\forall i, \Re(\lambda_i(A)) < 0$, il est possible de résoudre l'équation de Lyapunov matricielle, c.-à-d.

$$\forall Q > 0, \exists P > 0, \quad A^T P + P A = -Q$$

Posons pour le système non linéaire

$$V = x^T P x$$

Ecrivons $f(x) = Ax + g(x)$, avec $g(x)$ qui contient les termes d'ordre supérieur. Autrement dit,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0$$

ce qui signifie $\forall \gamma, \exists r$, si $\|x\| < r$, alors $2\|g(x)\| < \gamma\|x\|$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= (x^T A^T + g^T) P x + x^T P (Ax + g) \\ &= x^T (A^T P + P A) x + g^T P x + x^T P g \\ &= -x^T Q x + 2g^T P x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -x^T Q x + 2\|g\| \|P x\| \leq -x^T Q x + 2\|g\| \lambda_{\max}(P) \|x\|^2 \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q) \|x\|^2 + 2\|g\| \lambda_{\max}(P) \|x\|^2 < (-\lambda_{\min}(Q) + \gamma \lambda_{\max}(P)) \|x\|^2 \end{aligned}$$

En choisissant $\gamma < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}$, $\exists r, \forall \|x\| < r, \dot{V} < 0$.

Conséquence: estimée du bassin d'attraction

Définition:

$$\mathcal{A} = \left\{ x \left| \|g(x)\| \leq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} \right. \right\}$$

et

$$\mathcal{W} = \operatorname{argmax}_C \{ \{x | x^T P x < C\} \subseteq \mathcal{A} \}$$

L'ensemble $\mathcal{W}$ est une estimée du bassin d'attraction

2. Stabilité globale

Est-ce que $V > 0$, $V(0) = 0$ et $\dot{V} < 0, x \neq 0$ valables globalement garantit la stabilité globale?

On pourrait le penser. Cependant ce n'est pas le cas.

Exemple:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{6x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{2x_1 + 2x_2}{(1+x_1^2)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2 \\ \dot{V} &= \frac{-12x_1^2 - 4(1+x_1^2)^2 x_2^2}{(1+x_1^2)^4} < 0\end{aligned}$$

or, il existe des x_0 tels que $\lim_{t \rightarrow 0} \chi(x_0, t) \rightarrow +\infty$

Théorème: $V > 0, \forall x \neq 0$ et $\dot{V} < 0, \forall x \neq 0$ garantit la stabilité globale à condition que V soit radialement non borné, c.-à-d.

$$\forall \|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow +\infty$$

Ceci signifie que les courbes de niveaux doivent être toutes fermées

Théorème d'invariance de LaSalle

Dans l'exemple du robot $\dot{V} \leq 0$. Cependant, la convergence et la stabilité asymptotique a lieu. Existe-t-il un moyen de renforcer les conditions et de garantir la stabilité asymptotique dans le cas $\dot{V} \leq 0$?

La réponse est affirmative avec le théorème d'invariance de LaSalle.

Théorème: Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un fermé borné et invariant ($\forall x_0, \chi(x_0, t) \in \Omega$). Soit $\dot{V} \leq 0, \forall x \in \Omega$, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \chi(x_0, t) \rightarrow \mathcal{J}, \forall x_0 \in \Omega$$

avec $\mathcal{J}$ le plus grand ensemble invariant contenu dans

$$\mathcal{V} = \{x | \dot{V}(x) = 0\}$$

Définition: Ensemble invariant $\mathcal{J}$

$$\mathcal{J} = \{x_0 | \chi(x_0, t) \subseteq \mathcal{J}, \forall t\}$$

Corollaire: Soit Ω un ensemble fermé, borné et invariant, tel que

$$\dot{V} \leq 0 \text{ et } \mathcal{J} \subset \Omega, \mathcal{J} = \{0\}$$

alors le point d'équilibre 0 est asymptotiquement stable (localement)

Exemple

Le pendule simple

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - b x_2$$

$$E_p = mgl(1 - \cos(x_1))$$

$$E_c = \frac{1}{2} m x_2^2$$

$$V = E_c + E_p = \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{g}{l} (1 - \cos x_1)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= x_2 \dot{x}_2 + \frac{g}{l} \sin(x_1) \dot{x}_1 \\
 &= x_2 \left(-\frac{g}{l} \sin(x_1) - b x_2 \right) + \frac{g}{l} \sin(x_1) x_2 \\
 &= -b x_2^2 \leq 0
 \end{aligned}$$

Examinons

$$\mathcal{V} = \{x | \dot{V} = 0\} = \{(x_1, x_2) | x_2 = 0\}$$

Calculons $\mathcal{I}$, le plus grand ensemble invariant $\subseteq \mathcal{V}$

Comme

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 - b x_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{I} = \{(x_1, x_2) | x_2 = 0, x_1 = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

On constate qu'il y a plusieurs possibilités

$$\exists x_0, \lim_{t \rightarrow \infty} \chi(x_0, t) \rightarrow \{(x_1, x_2) | x_2 = 0, x_1 = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Ensemble des points d'équilibre stables:

$$\mathcal{I}_{\text{stable}} = \{(x_1, x_2) | x_2 = 0, x_1 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Ensemble des points d'équilibre instables:

$$\mathcal{I}_{\text{instable}} = \{(x_1, x_2) | x_2 = 0, x_1 = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}\}$$
