
VI. Méthode de Lyapunov – théorème d'invariance

1. Stabilité locale et linéarisation
 2. Stabilité globale
 3. Théorème d'invariance de LaSalle
 4. Exemple du pendule
-

1. Stabilité locale et linéarisation

Objectifs

- Démontrer que le système non linéaire est stable lorsque la linéarisation est stable
 - Déterminer une région des conditions initiales associée à la stabilité
-

Soit le syst. NL. $\dot{x} = f(x)$ avec $x \in \mathbb{R}^n$ et le point d'équilibre $\bar{x} = 0$. La linéarisation locale est définie par la matrice

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} =$$

La dynamique linéaire associée à la linéarisation est $\dot{x} = Ax$.

Théorème: Si $\dot{x} = Ax$ est stable asymptotiquement (i.e. $\Re(\lambda_i(A)) < 0, \forall i$), alors $\dot{x} = f(x)$ est localement stable asymptotiquement.

Par contre, si $\exists i, \Re(\lambda_i(A)) = 0$ et si $\forall j \neq i, \Re(\lambda_j(A)) \leq 0$, il est impossible de conclure sur la stabilité du système $\dot{x} = f(x)$ en utilisant uniquement l'information contenue dans A .

Démonstration: Comme $\forall i, \Re(\lambda_i(A)) < 0$, il est possible de résoudre l'équation de Lyapunov matricielle, c.-à-d.

$$\forall Q > 0, \exists P > 0,$$

Posons pour le système non linéaire

$$V = x^T P x$$

Ecrivons $f(x) = Ax + g(x)$, avec $g(x)$ qui contient les termes d'ordre supérieur. Autrement dit,

ce qui signifie $\forall \gamma, \exists r$, si $\|x\| < r$, alors

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \\ &= \\ &= \\ &= -x^T Q x + 2g^T P x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \\ &\leq \end{aligned}$$

En choisissant γ , $\exists r, \forall \|x\| < r, \dot{V} < 0$.

Conséquence: estimée du bassin d'attraction

Définition:

et

L'ensemble $\mathcal{W}$ est une estimée du bassin d'attraction

2. Stabilité globale

Est-ce que $V > 0$, $V(0) = 0$ et $\dot{V} < 0, x \neq 0$ valables globalement garantit la stabilité globale?

On pourrait le penser. Cependant ce n'est pas le cas.

Exemple:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{6x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2 & V &= \\ \dot{x}_2 &= -\frac{2x_1 + 2x_2}{(1+x_1^2)^2} & \dot{V} &= \end{aligned}$$

or, il existe des x_0 tels que $\lim_{t \rightarrow 0} \chi(x_0, t) \rightarrow +\infty$

Théorème: $V > 0, \forall x \neq 0$ et $\dot{V} < 0, \forall x \neq 0$ garantit la stabilité globale à condition que V soit , c.-à-d.

Ceci signifie que les courbes de niveaux doivent être

Théorème d'invariance de LaSalle

Dans l'exemple du robot $\dot{V} \leq 0$. Cependant, la convergence et la stabilité asymptotique a lieu. Existe-t-il un moyen de renforcer les conditions et de garantir la stabilité asymptotique dans le cas $\dot{V} \leq 0$?

La réponse est affirmative avec le théorème d'invariance de LaSalle.

Théorème: Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un fermé borné et invariant ($\forall x_0, \chi(x_0, t) \in \Omega$). Soit $\dot{V} \leq 0, \forall x \in \Omega$, alors

avec $\mathcal{I}$ le plus grand ensemble invariant contenu dans

Définition: Ensemble invariant $\mathcal{I}$

Corollaire: Soit Ω un ensemble fermé, borné et invariant, tel que

$$\dot{V} \leq 0 \text{ et } \mathcal{I} \subset \Omega, \mathcal{I} = \{0\}$$

alors le point d'équilibre 0 est asymptotiquement stable (localement)

Exemple

Le pendule simple

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin(x_1) - b x_2\end{aligned}$$

$$E_p = mgl(1 - \cos(x_1))$$

$$E_c = \frac{1}{2} m x_2^2$$

$$V = E_c + E_p = \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{g}{l} (1 - \cos x_1)$$

$$\begin{aligned}\dot{V} &= x_2 \dot{x}_2 + \frac{g}{l} \sin(x_1) \dot{x}_1 \\ &= x_2 \left(-\frac{g}{l} \sin(x_1) - b x_2 \right) + \frac{g}{l} \sin(x_1) x_2 \\ &= -b x_2^2 \leq 0\end{aligned}$$

Examinons

Calculons $\mathcal{I}$, le plus grand ensemble invariant $\subseteq \mathcal{V}$

Comme

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 - b x_2 \end{pmatrix}$$

On constate qu'il y a plusieurs possibilités

Ensemble des points d'équilibre stables:

$$\mathcal{I}_{\text{stable}} =$$

Ensemble des points d'équilibre instables:

$$\mathcal{I}_{\text{instable}} =$$
