

1. Méthode de Krasovskii
 2. Gradients variables
 3. Théorème d'instabilité
 4. Théorème de Chetaev
-

1. Méthode de Krasovskii

On part de $\dot{x} = f(x)$ et on obtient la matrice Jacobienne

$$A(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{en gardant tous les éléments de la} \\ \text{matrice comme des fonctions non} \\ \text{linéaires} \end{array}$$

Théorème: Si $A(x)^T + A(x) < 0, \forall x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \Rightarrow V = f^T f$ est fct. de Lyap.

Démonstration:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{f}^T f + f^T \dot{f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} \right)^T f + f^T \left(\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} \right) \\ &= f^T \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T + f^T \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) f = f^T (A^T + A) f \end{aligned}$$

ainsi si $A^T + A < 0, \forall x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, on a localement une fonction de Lyapunov

Corollaire: (extension) Si $A(x)^T P + P A(x) < 0, \forall x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ alors $V = f^T P f$ est loc. une fct. de Lyap.

Démonstration:

$$\dot{V} = \dot{f}^T P f + f^T P \dot{f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} \right)^T P f + f^T P \left(\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} \right) = f^T (A(x)^T P + P A(x)) f < 0$$

ce qui entraîne que si $A(x)^T P + P A(x) < 0, \forall x$, alors $V = f^T P f$ est une fct. de Lyap.

2. Gradients variables

L'idée est d'assurer d'abord la condition $\dot{V} \leq 0$, et ensuite de vérifier que $V > 0$.

Si on examine $\dot{V}$, cette quantité est le produit scalaire entre le gradient de V et le champ de vecteurs f . Il existe ainsi n fonctions $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ avec lesquelles on peut garantir $\dot{V} \leq 0$.

$$\dot{V} = L_f V = \frac{\partial V}{\partial x} f = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

On peut également écrire $\dot{V} = dV f$ où dV est une 1-forme exacte $dV = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i$

1-formes: Classification des formes différentielles

Définition: $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$ est intégrable s'il existe une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe une fonction $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pour laquelle

$$\phi \omega = dW$$

Définition: $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$ est exacte, s'il existe une fonction $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $dW = \omega$

Théorème:

- (a) ω est exact $\Leftrightarrow d\omega = 0$
 - (b) ω est intégrable $\Leftrightarrow d\omega \wedge \omega = 0$
 - (c) ω n'est pas intégrable $\Leftrightarrow d\omega \wedge \omega \neq 0$
-

L'opérateur d est le gradient classique lorsque d agit sur une fonction.
 En notation classique: En calcul extérieur:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) \quad dV = \frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n} dx_n$$

L'opérateur $\wedge$ indique un produit anti-commutatif

$$d\omega_1 \wedge d\omega_2 = -d\omega_2 \wedge d\omega_1$$

Si ω est une somme $\sum_i \alpha_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m = \omega$ avec α_i des fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, alors

$$d\omega = \sum_i d\alpha_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$$

Exemple:

$$\begin{aligned} d(3x_1 x_2^2 dx_1 \wedge dx_2) &= d(3x_1 x_2^2) \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= (3x_2^2 dx_1 + 6dx_1 x_2 dx_2) \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= 3x_2^2 dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + 6x_1 x_2 dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = 0 \end{aligned}$$

Condition d'exactitude: $d\omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}, i \neq j$

Revenons à la méthode des gradients variables

- (1) On choisit $\omega_i(x)$ de telle sorte que $\sum_{i=1}^n \omega_i(x) f_i(x) \leq 0, \forall x \neq 0$.
- (2) On forme le vecteur ligne $\left(\omega_1(x) \quad \omega_2(x) \quad \cdots \quad \omega_n(x) \right)$, autrement dit, on constitue la 1-forme $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) dx_i$
- (3) Itérer entre (1) et (2) afin de garantir la condition d'exactitude $\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}, \quad i \neq j$

On procède à l'intégration pour obtenir V

$$V = \int \sum_i \omega_i dx_i$$

Comme $\sum_i \omega_i dx_i$ est exacte, la valeur $\int \sum_i \omega_i dx_i$ ne dépend pas du chemin d'intégration.
(cf. diff'érentielles exactes en thermodynamique).

On peut choisir un chemin en escaliers

$$\begin{aligned} V(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) &= \int_C \sum_i \omega_i dx_i = \\ &= \int_{\xi=0}^{\bar{x}_1} \omega_1(\xi, 0, \dots, 0) d\xi \\ &+ \int_{\xi=0}^{\bar{x}_2} \omega_2(\bar{x}_1, \xi, 0, \dots, 0) d\xi \\ &+ \dots + \int_{\xi=0}^{\bar{x}_n} \omega_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-1}, \xi) d\xi \end{aligned}$$

Exemple:

$$\dot{x}_1 = -2x_1^3 - x_1^2 x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 x_2^2 - x_2^3$$

$$V = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{12}x_1 + a_{21}x_2 \end{pmatrix} \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, j = 1, 2$$

Comme $\frac{\partial \Delta V_1}{\partial x_2} = a_{12} = \frac{\partial \Delta V_2}{\partial x_1} = a_{12}$ les conditions d'exactitudes sont remplies

Déterminons a_{ij} pour que $\Delta V f < 0, \forall x \neq 0$

Comme avec $a_{11} = 2, a_{12} = a_{22} = 1$, on a

$$\begin{aligned} \Delta V f &= -4x_1^4 - 4x_1^3 x_2 - 2x_1^4 x_2 - 2x_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2^3 - x_2^4 \\ &= -(2x_1 + x_2)^2 x_1^2 - (x_1 + x_2)^2 x_2^2 < 0 \end{aligned}$$

la condition $\dot{V} < 0$ est remplie

Intégrons en escaliers

$$\begin{aligned}\Delta V &= \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix} \\ \omega &= (2x_1 + x_2) dx_1 + (x_1 + x_2) dx_2 = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2 \\ V(\bar{x}_1, \bar{x}_2) &= \int_{\xi=0}^{\bar{x}_1} 2\xi d\xi + \int_{\xi=0}^{\bar{x}_2} (\bar{x}_1 + \xi) d\xi \\ &= \bar{x}_1^2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \frac{\bar{x}_1^2}{2} = \frac{1}{2} \bar{x}_1^2 - \frac{1}{2} (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)^2 > 0 \Rightarrow V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1 x_2 + \frac{x_2^2}{2}\end{aligned}$$

3. Théorèmes d'instabilité (au sens de Lyapunov)

L'instabilité est la négation de la proposition associée à la stabilité.

$x = 0$ instable au sens de Lyapunov

$\Leftrightarrow$

$$\exists R, \forall r, \exists x_0(r), \exists T(x_0) < +\infty, \|\chi(x_0)\| > R$$

En d'autres terms, il suffit d'une seule condition initiale par petite boule $\mathcal{B}_r$ assurant la sortie de la trajectoire $\chi(x_0, \cdot)$ du tube de confinement de rayon R . Les théorèmes d'instabilité tirent parti de cette "rareté" des conditions initiales.

Théorème:

$$\exists \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, 0 \in \Omega, \exists V, V(x) > 0, \forall x \in \Omega$$

$$V(0) = 0$$

$$\exists \lambda > 0, \lambda \in \mathbb{R}, \frac{d}{dt} V - \lambda V \geq 0, \forall x \in \Omega \text{ alors } 0 \text{ est instable au sens de Lyapunov}$$

Démonstration: Comme $V > 0$, $\lambda > 0$, $dt > 0$

$$\begin{aligned} \dot{V} \geq 0 &\Rightarrow \frac{dV}{V} \geq \lambda dt \\ \ln(V) + C &\geq \lambda t \\ V(x) &\geq V_0 e^{\lambda t} \end{aligned} \tag{1}$$

Comme Ω est ouvert, on peut prendre n'importe quel R tel que $\mathcal{B}_R \subseteq \Omega$.

$$\max_{x \in \mathcal{B}_R} V(x) = \max_{x \in \mathcal{S}_R} V(x) = \hat{V}$$

On choisit n'importe quel $r < R$, et n'importe quel $x_0 \in \mathcal{S}_r$. On a $V(x_0) \neq 0$ et comme $V(x) \geq V(x_0) e^{\lambda t}$, il existe $\bar{t}$, $V(\chi(x_0, \bar{t})) > \hat{V}$

Ainsi puisque $\mathcal{B}_R$ est la plus grande boule contenue dans l'ensemble

$$\{x | V(x) \leq \hat{V}\}, \quad \|\chi(x_0, \bar{t})\| > R \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Le prochain théorème tire parti de la "rareté" des conditions initiales

Théorème de Chetaev

$\partial\Omega_l$ est le bord adjacent et contenant O de Ω_l .

$$\begin{aligned} V(x) &> 0, \quad \forall x \in \Omega_l \\ \frac{d}{dt} V(x) &> 0, \forall x \in \Omega_l \\ 0 &\in \partial\Omega_l \\ V(x) &= 0, \forall x \in \partial\Omega_l \end{aligned}$$

Esquisse de démonstration Comme $\dot{V} > 0$, $V(\chi(x_0, t))$ croît le long des trajectoires. Il faut s'assurer que pour certaines conditions initiales, la trajectoire demeure dans Ω_l et finissent par quitter une boule $\mathcal{B}_R$ sans passer par les bords $\partial\Omega_l$.

Les trajectoires qui commencent dans Ω_l ne peuvent pas passer, croiser $\partial\Omega_l$ car $\dot{V} > 0$ et $V = 0$ sur $\partial\Omega_l$. Elles ne peuvent pas éternellement rester dans $\mathcal{B}_R \cap \Omega_l$, car $\dot{V} > 0$. Elles sortent donc de $\mathcal{B}_R \cap \Omega_l$ par le bord de $\mathcal{B}_R \cap \Omega_l$ qui n'est pas $\partial\Omega_l \cap \mathcal{B}_R$.

Ainsi, en choisissant une boule $\mathcal{B}_R$ entièrement contenue dans Ω , le bord de $\mathcal{B}_R \cap \Omega_l$ qui n'est pas $\mathcal{B}_R \cap \partial\Omega_l$ est tel que tout les x sur le bord sont tels que $\|x\| = R$. Ainsi, $\forall x_0 \in \mathcal{B}_R \cap \Omega_l, \exists \bar{t}, \|\chi(x_0, \bar{t})\| > R$.
