
VIII. Passivité (part. I)

- | | |
|--------------------------------------|---------------------------|
| 1. Notion intuitive | 5. Conditions nécessaires |
| 2. Passivité et fonction de Lyapunov | |
| 3. Connexion et passivité | |
| 4. Passivité et système linéaire | |
-

1. Notion intuitive

Energie dissipée ou fournie / stockée dans des composants internes. Il n'y a pas de source de puissance autre qu'un stock interne.

- 1.1 Résistance électrique
 - 1.2 Système dynamique, circuit RLC
 - 1.3 Définition
-

1.1 Résistance électrique

Si on considère une résistance électrique avec comme entrée la tension et comme sortie le courant, on a les propriétés suivantes:

$$u y = u i = R i^2 > 0$$

Comme $i = \frac{1}{R} u$ la caractéristique y vs. u appartient aux seceurs I et III.

1.2 Système dynamique, circuit 1 ère maille:

$$u = R i_C + L \frac{d i_L}{d t} + U_c$$

noeud A:

$$i = i_L = C \frac{d u_L}{d t} + U_C \frac{1}{R_2}$$

Avec $x_1 = i_L$ et $x_2 = u_C$, le système dynamique s'écrit

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{1}{L}u - \frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{R_2C}x_2 \\ y &= x_1\end{aligned}$$

L'énergie peut être stockée dans C et/ou dans L . Fonction de stockage

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{2}Lx_1^2 + \frac{1}{2}Cx_2^2 \\ \dot{V} &= Lx_1\dot{x}_1 + Cx_2\dot{x}_2 \\ &= x_1u - R_1x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_2 - \frac{1}{R_2C}x_2^2 \\ &= uy - R_1x_1^2 - \frac{1}{R_2C}x_2^2 = uy - g, \quad g > 0\end{aligned}$$

1.3 Définition

Le système dynamique

est dit passif s'il existe une fonction

$V(x) > \gamma > -\infty$ telle que

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$y = h(x)$$

$$\dot{V} = uy - g \quad g \geq 0$$

2. Passivité et fonction de Lyapunov

Remarque: La fonction de stockage dans la définition de passivité peut être négative (contrairement à la fonction de Lyapunov). Elle doit être bornée inférieurement par une quantité γ .

Définition intégrale

Un système $\dot{x} = f(x, u)$ avec $y = h(x)$ est dit passif, s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > -\infty$, tel que

$$\int_0^\infty u(\tau) y(\tau) d\tau > \alpha$$

Equivalence avec la définition différentielle

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \dot{V}(\tau) d\tau &= \int_0^\infty u(\tau) y(\tau) - g d\tau \\ &\leq \int_0^\infty u(\tau) y(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Posons $\alpha = \gamma - V(0)$ avec γ la borne inférieure de la fonction de stockage.

On a : $\alpha = \gamma - V(0) \leq V(\infty) - V(0)$ par définition de γ

Mais

$$\begin{aligned} V(\infty) - V(0) &= \int_0^\infty \dot{V}(\tau) d\tau \\ \alpha &= \gamma - V(0) \leq V(\infty) - V(0) \leq \int_0^\infty u(\tau) y(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Passivité et connexion

La passivité est maintenue par

3.1 connexion parallèle

3.2 connexion par rétroaction

3.1 Connexion parallèle

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= u_1 y_1 - g_1 & g_1 &\geq 0 \\ \dot{V}_2 &= u_2 y_2 - g_2 & g_2 &\geq 0 \\ u &= u_1 + u_2 & y &= y_1 + y_2\end{aligned}$$

Posons $V = V_1 + V_2$

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = u_1 y_1 - g_1 + u_2 y_2 - g_2 \\ &= u y_1 + u y_2 - g_1 - g_2 \\ &= u (y_1 + y_2) - g_1 - g_2 \\ &= u y - g \quad \text{avec } g = g_1 + g_2 \geq 0\end{aligned}$$

3.2 Connexion par rétroaction négative

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= u_1 y_1 - g_1 & g_1 &\geq 0 \\ \dot{V}_2 &= u_2 y_2 - g_2 & g_2 &\geq 0 \\ u_1 &= u - y_2 \\ u_2 &= y_1\end{aligned}$$

Posons $V = V_1 + V_2$

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = u_1 y_1 - g_1 + u_2 y_2 - g_2 \\ &= (u - y_2) y_1 + y_1 y_2 - g_1 - g_2 \\ &= u y_1 - g_1 - g_2 \\ &= u y - g \quad g = g_1 + g_2 \geq 0\end{aligned}$$

Soit le système linéaire

$$G(s) = \frac{b^m s^m + b^{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

Théorème:

$$G(s) \text{ est passif} \Leftrightarrow \Re(G(j\omega)) \geq 0, \forall \omega$$

Démonstration: On va utiliser la définition intégrale de la passivité et le théorème de Parseval.

$$\int_0^{\infty} u(\tau) y(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) u(\tau) d\tau$$

$$u(t) = 0 \text{ pour } t < 0.$$

Parseval:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) y(\tau) d\tau &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega) U^*(j\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega) |U(j\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

car $Y(j\omega) = G(j\omega) U(j\omega)$ et $U U^* = |U|^2$.

On sépare l'intégrale en deux:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 G(j\omega) |U(j\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} G(j\omega) |U(j\omega)|^2 d\omega$$

On change de variable dans la première intégrale avec $\omega = -\bar{\omega}$, $d\omega = -d\bar{\omega}$.

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{+\infty}^0 G(-j\bar{\omega}) |U(-j\bar{\omega})|^2 d\bar{\omega} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} G(j\omega) |U(j\omega)|^2 d\omega$$

Comme $u(t)$ est réel pour tout t , $U(j\omega) = U^*(-j\omega)$ et ainsi $|U(-j\omega)|^2 = U(-j\omega) U^*(-j\omega) = U^*(+j\omega) U(+j\omega) = |U(j\omega)|^2$.

En conséquence,

$$\int_0^{+\infty} u(\tau) y(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} G(-j\omega) |U(j\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} G(+j\omega) |U(j\omega)|^2 d\omega$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) y(\tau) d\tau &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{G(j\omega) + G(-j\omega)}{2} |U(j\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re(G(j\omega)) |U(j\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (1)$$

La proposition à démontrer est

$$\begin{array}{ccc} \text{Passivité} & \Leftrightarrow & \Re(G(j\omega)) \geq 0 \\ \text{(A)} & & \text{(B)} \end{array}$$

(B) $\Rightarrow$ (A) est directe au vu de la formule (1), car on a $\int_0^{+\infty} u(\tau) y(\tau) d\tau \geq 0$ et donc $\gamma = 0$ pour la définition intégrale.

Pour démontrer $(A) \Rightarrow (B)$, on utilise la contraposée, non (B) implique non (A) , autrement dit

$$(\bar{B}) \Rightarrow (\bar{A})$$

Non (B) signifie qu'il existe un intervalle $]\omega_1, \omega_2[$ pour lequel $G(j\omega) < 0$.

Montrons qu'il ne peut exister de borne inférieure γ à $\int_0^{+\infty} u(\tau) y(\tau) d\tau$. A cette fin, il suffit d'introduire un signal à l'entrée dans la bande de fréquence correspondant à $]\omega_1, \omega_2[$. Comme on peut rendre arbitrairement grande l'entrée u , on peut rendre arbitrairement petit

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \Re(G(j\omega)) |U(j\omega)| d\omega$$

Il ne peut donc pas exister de borne inférieure γ .

5. Conditions nécessaires

Un système linéaire passif doit avoir les propriétés suivantes:

- être stable (aucun pôle à partie réelle positive).
- degré relatif au plus de 1: $n - m \leq 1$, $m \leq n$.
- être à minimum de phase

Minimum de phase

Tous les zéros z_i , $i = 1, \dots, m$ tels que

$$\Re(z_i) < 0$$
