VIII. Passivité (part. I)

1. Notion intuitive
2. Passivité et fonction de Lyapunov
3. Connexion et passivité
4. Passivité et système linéaire
5. Conditions nécessaires

---

1. Notion intuitive

Energie dissipée ou fournie / stockée dans des composants internes. Il n'y a pas de source de puissance autre qu'un stock interne.

1.1 Résistance électrique

1.2 Système dynamique, circuit RLC

1.3 Définition

1.1 Résistance électrique

Si on considère une résistance électrique avec comme entrée la tension et comme sortie le courant, on a les propriétés suivantes:

Comme $i = \frac{1}{R} u$ la caractéristique y vs. u appartient aux seceurs I et III.

1.2 Système dynamique, circuit

1 ère maille:

$$u = Ri_C + L\frac{di_L}{dt} + U_c$$

noeud A:

$$i = i_L = C\frac{du_L}{dt} + U_C\frac{1}{R_2}$$

Avec $x_1 = i_L$ et $x_2 = u_C$, le système dynamique s'écrit

L'énergie peut être stockée dans C et/ou dans L. Fonction de stockage

$$\begin{aligned}\dot{V} &= L\,x_1\,\dot{x}_1 + C\,x_2\,\dot{x}_2 \\ &= x_1\,u - R_1\,x_1^2 - x_1\,x_2 + x_1\,x_2 - \frac{1}{R_2 C}x_2^2 \\ &= \end{aligned}$$

1.3 Définition

Le système dynamique

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,u) \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

est dit passif s'il existe une fonction $V(x) > \gamma > -\infty$ telle que

2. Passivité et fonction de Lyapunov

Remarque: La fonction de stockage dans la définition de passivité peut être négative (contrairement à la fonction de Lyapunov). Elle doit être bornée inférieurement par une quantité γ.

Définition intégrale

Un système $\dot{x} = f(x,u)$ avec $y = h(x)$ est dit passif, s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > -\infty$, tel que

Equivalence avec la défnition différentielle

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \dot{V}(\tau)\, d\tau &= \\ &\leq \end{aligned}$$

Posons $\alpha = \gamma - V(0)$ avec γ la borne inférieure de la fonction de stockage.

On a : $\alpha = \gamma - V(0) \leq V(\infty) - V(0)$ par définition de γ

Mais

Passivité et connexion

La passivité est maintenue par

3.1 connexion parallèle

3.2 connexion par rétroaction

3.1 Connexion parallèle

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= u_1 y_1 - g_1 \qquad g_1 \geq 0 \\
\dot{V}_2 &= u_2 y_2 - g_2 \qquad g_2 \geq 0 \\
u &= u_1 + u_2 \qquad y = y_1 + y_2
\end{aligned}$$

Posons $V = V_1 + V_2$

3.2 Connexion par rétroaction négative

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= u_1 y_1 - g_1 \qquad g_1 \geq 0 \\
\dot{V}_2 &= u_2 y_2 - g_2 \qquad g_2 \geq 0 \\
u_1 &= u - y_2 \\
u_2 &= y_1
\end{aligned}$$

Posons $V = V_1 + V_2$

Passivité et système linéaire

Soit le système linéaire

$$G(s) = \frac{b^m s^m + b^{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0} = \frac{\Pi_{i=1}^m (s - z_i)}{\Pi_{i=1}^n (s - p_i)}$$

Théorème:

Démonstration: On va utiliser la définition intégrale de la passivité et le théorème de Parseval.

$$\int_0^\infty u(\tau) y(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) u(\tau) d\tau$$

$u(t) = 0$ pour $t < 0$.

Parseval:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) y(\tau) d\tau &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega)\, U^*(j\omega)\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega)\, |U(j\omega)|^2\, d\omega\end{aligned}$$

car $Y(j\omega) = G(j\omega)\, U^*(j\omega)$ et $U U^* = |U|^2$.

On sépare l'intégrale en deux:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} G(j\omega)\,|U(j\omega)|^2\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} G(j\omega)\,|U(j\omega)|^2\,d\omega$$

On change de variable dans la première intégrale avec

Comme $u(t)$ est réel pour tout t, $U(j\omega) = U^*(-j\omega)$ et ainsi

En conséquence,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\,y(\tau)\,d\tau &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{G(j\omega)+G(-j\omega)}{2}\,|U(j\omega)|^2\,d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \Re(G(j\omega))|U(j\omega)|^2\,d\omega \qquad (1)\end{aligned}$$

La proposition à démontrer est

(B) $\Rightarrow$ (A) est directe au vu de la formule (1), car on a $\int_0^{+\infty} u(\tau)\,y(\tau)\,d\tau \geq 0$ et donc $\gamma = 0$ pour la définition intégrale.

Pour démontrer (A) $\Rightarrow$ (B), on utilise la contraposée, non (B) implique non (A), autrement dit

$$(\bar{\mathrm{B}}) \Rightarrow (\bar{\mathrm{A}})$$

Non (B) signifie qu'il existe un intervalle $]\omega_1, \omega_2[$ pour lequel $G(j\omega) < 0$.

Montrons qu'il ne peut exister de borne inférieure γ à $\int_0^{+\infty} u(\tau)\, y(\tau)\, d\tau$. A cette fin, il suffit d'introduire un signal à l'entrée dans la bande de fréquence correspondant à $]\omega_1, \omega_2[$. Comme on peut rendre arbitrairement grande l'entrée u, on peut rendre arbitrairement petit

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \Re(G(j\omega))\, |U(j\omega)|\, d\omega$$

Il ne peut donc pas exister de borne inférieure γ.

---

5. Conditions nécessaires

Un système linéaire passif doit avoir les propriétés suivantes:

- être stable (aucun pôle à partie réelle positive).
- degré relatif au plus de 1: $n - mleq1$, $m \leq n$.
- être à minimum de phase

Minimum de phase

Tous les zéros z_i, $i = 1, \ldots, m$ tels que

$$\Re(z_i) < 0$$