Contenu du cours

1. Intro et particularités
2. Plan de phase
3. Méthode du premier harmonique
4. Lyapunov I/II et III
5. Passivité
6. Critère du cercle
7. Linéarisation par feedback

I. Intro et particularités

1. Rappels et définition
2. Etat, stabilité et point d'équilibre
3. Explosion en temps fini
4. Réponse indicielle asymétrique
5. Réponse multiharmonique
6. Trajectoire chaotique

---

1. Rappels et définitions

Système linéaire: Fonction de transfert

continu $$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \qquad G(s) = \int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-t}\, dt$$

discret $$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \qquad H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)\, z^{-k}$$

Principe de superposition

Si $\forall u_1(t), \forall u_2(t)$ $$\begin{array}{ccc} u_1(t) & \rightarrow & y_1(t) \\ u_2(t) & \rightarrow & y_2(t) \end{array}$$ alors $$u_1(t) + u_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

on déduit que le système *entrée-sortie* est entièrement décrit par la réponse impulsionnelle $g(t)$.

2. Etat, stabilité et point d'équilibre

Représentation d'état (Dans ce cours, dim u = dim y = 1.)

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & Ax + Bu \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad B \in \mathbb{R}^{n\times 1} \\ y & = & Cx + Du \qquad C \in \mathbb{R}^{1\times n} \qquad D \in \mathbb{R} \end{array}$$

x est le vecteur des états: ensemble des conditions qui spécifient entièrement le comportement futur lorsque l'entrée $u(t)$ est connue.

Stabilité des systèmes linéaires

Stabilité BIBO: entrée bornée, sortie bornée

Fct. de transfert: les pôles, racines de $A(s) \in \mathbb{C}^-$

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

racines de $A(s) \in \mathbb{C}^-$ est une condition suffisante pour la BIBO stabilité

⚠ En représentation d'état, la stabilité BIBO est insuffisante à cause des modes non observables, non gouvernables.

$\longrightarrow$ on aura recours à une définition qui utilise le vecteur de conditions initiales x_0 et la trajectoire (équation horaire) du système $\chi(x_0, t)$.

La défnition s'appliquera également au cas non linéaire.

Dans la représentation d'état, on peut envisager une dynamique sans entrée

$$\dot{x} = Ax$$

et on détermine la stabilité par la position des valeurs propres

$$\Re(\lambda(A)) < 0 \Rightarrow \text{stable}$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \qquad \text{BIBO stable}$$

Un état Exemple de systèmes linéaires à un état:

$$\dot{x} = +x \qquad\qquad \dot{x} = -x$$

$$\chi(x_0, t) = x_0\, e^{t} \qquad\qquad \chi(x_0, t) = x_0\, e^{-t}$$

instable

valeur propre: $\lambda = +1$

stable

valeur propre: $\lambda = -1$

Plus difficile: système non linéaire

$$\dot{x} = -x + x^2$$

On constate la présence du signe − devant x et du signe + devant x^2.

Qui va l'emporter ?

Lorsque $0 < x < 1 \Rightarrow x > x^2$ ⚠ lorsque $x > 1 \Rightarrow x^2 > x$

$$\dot{x} = -x$$

Localement autour de $x = 0$, $\dot{x} = -x$ est une bonne approximation de $\dot{x} = -x + x^2$

Calcul des points d'équilibre

Définition d'un système non linéaire (sans entrée)

$$\dot{x} = f(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n \qquad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Définition d'un point d'équilibre

$$\bar{x} \qquad \text{tel que } 0 = f(\bar{x})$$

Dans notre cas,

$$f = -x + x^2$$

et donc

$$-x + x^2 = x(x-1) = 0$$

$x = 0$ premier point d'équilibre

$x = 1$ deuxième point d'équilibre. Comment se comporte-t-il ?

---

3. Explosion en temps fini

$$\dot{x} = -x + x^2$$

Solution de l'équation différentielle:

$$\chi(x_0, t) = \frac{x_0\, e^{-t}}{1 - x_0 + x_0\, e^{-t}} \tag{1}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' g - f g'}{g^2} \qquad \dot{\chi} = \frac{-x_0 e^{-t}(1 - x_0 + x_0 e^{-t}) + x_0 e_{-t}(x_0 e^{-t}}{(1 - x_0 + x_0 e^{-t})^2}$$

$$= \frac{-x_0 e^{-t} + x_0^2 e^{-t} \cancel{-x_0^2 e^{-2t}} + \cancel{x_0^2 e^{-2t}}}{(1 - x_0 + x_0 e^{-t})^2} \tag{2}$$

D'un autre côté,

$$-\chi + \chi^2 = -\frac{x_0 e_{-t}(1 - x_0 + x_0 e^{-t})}{(1 - x_0 + x_0 e^{-t})^2} + \frac{x_0^2 e^{-2t}}{(1 - x_0 + x_0 e^{-t})^2} = \frac{-x_0 e^{-t} + x_0^2 e^{-t}}{(1 - x_0 + x_0 e^{-t})^2} \tag{3}$$

Ok car (2) est égal à (3)

Examinons le dénominateur de (1):

lorsque $x_0 > 1$, on a $1 - x_0 < 0$ et $\lim_{t \to +\infty}(1 - x_0 + x_0\, e^{-t}) = 1 - x_0 < 0$.

Par contre, au temps $t = 0$, on a $1 - x_0 + x_0 = 1 > 0$.

⚠ Il existe donc $\bar{t} > 0$ tel que $1 - x_0 + x_0\, e^{-\bar{t}} = 0$

exemple avec $x_0 = 1.2$

$$x_0\, e^{-\bar{t}} = x_0 - 1$$

$$\bar{t} = -\ln\left(\frac{x_0 - 1}{x_0}\right) = -\ln\left(\frac{0.2}{1.2}\right) = 1.79[\mathrm{s}]$$

4. Réponse indicielle disymétrique

Soit le système linéaire $\dot{x} = -x + u$

Soit le système non linéaire $\dot{x} = x|x| + u$

5. Réponse polyharmonique

Système avec dissipation d'énergie. Régime permanent.

6. Trajectoires chaotiques

Exemple: Oscillateur de Lorentz: $(\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, r = 28)$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= r x - y - z x \\ \dot{z} &= -bz + z y \end{aligned}$$

Calcul des points d'équilibre:

$$\begin{aligned} 0 &= -\sigma x + \sigma y \\ 0 &= r x - y - z x \\ 0 &= -bz + x y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= y \\ 0 &= r x - x - z x \\ 0 &= -bz + x^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 0 &= r x - x - \frac{1}{b} x^3 \\ &= x \cdot \left((r-1) - \frac{1}{b} x^2 \right) \end{aligned}$$

Il y a trois points d'équilibre distincts:

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{b}\sqrt{r-1} \\ -\sqrt{b}\sqrt{r-1} \\ r-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\sqrt{2} \\ -6\sqrt{2} \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8.5 \\ -8.5 \\ 27 \end{pmatrix} \qquad \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} +8.5 \\ +8.5 \\ 27 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres $A_i = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}_i}$ $\qquad \lambda(A_i)$

autour de $\bar{x}_1$:

$$-22.8, \qquad 11.9, \qquad -2.67$$

c'est un point selle

---

autour de $\bar{x}_2$:

$$-13.85, \qquad 0.09 + 10.2\,i, \qquad 0.09 - 10.2\,i$$

une branche stable et un foyer instable

---

autour de $\bar{x}_3$:

$$-13.85, \qquad 0.09 + 10.2\,i, \qquad 0.09 - 10.2\,i$$

une branche stable et un foyer instable

Vecteurs propres pour A_1 (associé à $\bar{x}_1$)

$$\vec{v_1}_{,1} = \begin{pmatrix} -0.61 \\ 0.79 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_1}_{,2} = \begin{pmatrix} -0.42 \\ -0.91 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_1}_{,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vecteurs propres pour A_2 (associé à $\bar{x}_2$)

$$\vec{v_{2,1}} = \begin{pmatrix} 0.86 \\ -0.33 \\ -0.4 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_{2,2}} = \begin{pmatrix} -0.27 - 0.3\,i \\ 0.032 - 0.57\,i \\ 0.72 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_{2,3}} = \begin{pmatrix} -0.27 + 0.3\,i \\ 0.032 + 0.57\,i \\ 0.72 \end{pmatrix}$$

Vecteurs propres pour A_3 (associé à $\bar{x}_3$)

$$\vec{v_{2,1}} = \begin{pmatrix} 0.86 \\ -0.33 \\ -0.4 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_{2,2}} = \begin{pmatrix} -0.27 - 0.3\,i \\ 0.032 - 0.57\,i \\ -0.72 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_{2,3}} = \begin{pmatrix} -0.27 + 0.3\,i \\ 0.032 + 0.57\,i \\ -0.72 \end{pmatrix}$$

⚠ En effectuant $\vec{v_{3,2}} + \vec{v_{3,3}}$, on obtient un générateur réel
ainsi que pour $i\,\vec{v_{3,2}} - i\,\vec{v_{3,3}}$
$\longrightarrow$ Plan tangent aux trajectoires localement autour du point d'équilibre