

---

## Contenu du cours

1. Intro et particularités
2. Plan de phase
3. Méthode du premier harmonique
4. Lyapunov I/II et III

## 5. Passivité

6. Critère du cercle
7. Linéarisation par feedback

---

## Intro et particularités

1. Rappels et définition
2. Etat, stabilité et point d'équilibre
3. Explosion en temps fini
4. Réponse indicielle asymétrique

## 5. Réponse multiharmonique

6. Trajectoire chaotique

---

## 1. Rappels et définitions

Système linéaire:                      Fonction de transfert

continu       $G(s) =$                        $G(s) =$

discret       $H(z) =$                        $H(z) =$

---

## Principe de superposition

Si  $\forall u_1(t), \forall u_2(t)$                       alors

on déduit que le système *entrée-sortie* est entièrement décrit par la réponse impulsionnelle  $g(t)$ .

---

## 2. Etat, stabilité et point d'équilibre

### Représentation d'état (Dans ce cours, $\dim u = \dim y = 1$ .)

$x$  est le vecteur des états: ensemble des conditions qui spécifient entièrement le comportement futur lorsque l'entrée  $u(t)$  est connue.

---

### Stabilité des systèmes linéaires

Stabilité BIBO: entrée bornée, sortie bornée

Fct. de transfert:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

racines de                      est une condition suffisante pour la BIBO stabilité

---

⚠ En représentation d'état, la stabilité BIBO est insuffisante à cause des modes non observables, non gouvernables.

→ on aura recours à une définition qui utilise le vecteur de conditions initiales  $x_0$  et la trajectoire (équation horaire) du système  $\chi(x_0, t)$ .

La définition s'appliquera également au cas non linéaire.

---

Dans la représentation d'état, on peut envisager une dynamique sans entrée

$$\dot{x} = Ax$$

et on détermine la stabilité par la position des valeurs propres

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad \text{BIBO stable}$$

---

## Un état Exemple de systèmes linéaires à un état:

$$\dot{x} = +x$$

$$\chi(x_0, t) = x_0 e^t$$

$$\dot{x} = -x$$

$$\chi(x_0, t) = x_0 e^{-t}$$

---

instable

valeur propre:  $\lambda = +1$

stable

valeur propre:  $\lambda = -1$

---

Plus difficile: système non linéaire

$$\dot{x} = -x + x^2$$

On constate la présence du signe  $-$  devant  $x$  et du signe  $+$  devant  $x^2$ .

---

Qui va l'emporter ?

Lorsque  $0 < x < 1 \Rightarrow x > x^2$

$\triangle$  lorsque  $x > 1 \Rightarrow x^2 > x$

---

$$\dot{x} = -x$$

Localement autour de  $x = 0$ ,  $\dot{x} = -x$  est une bonne approximation  
de  $\dot{x} = -x + x^2$

---

### Calcul des points d'équilibre

Définition d'un système non linéaire (sans entrée)

Définition d'un point d'équilibre

$$\bar{x} \quad \text{tel que } 0 = f(\bar{x})$$


---

Dans notre cas,

$$f = -x + x^2$$

et donc

$$-x + x^2 =$$

premier point d'équilibre

deuxième point d'équilibre. Comment  
se comporte-t-il ?

---

### 3. Explosion en temps fini

$$\dot{x} = -x + x^2$$

Solution de l'équation différentielle:

$$\chi(x_0, t) = \tag{1}$$

---

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} & \dot{\chi} &= \frac{-x_0 e^{-t}(1 - x_0 + x_0 e^{-t}) + x_0 e_{-t}(x_0 e^{-t})}{(1 - x_0 + x_0 e^{-t})^2} \\ &= \end{aligned} \tag{2}$$

D'un autre côté,

$$-\chi + \chi^2 = -\frac{x_0 e_{-t}(1 - x_0 + x_0 e^{-t})}{(1 - x_0 + x_0 e^{-t})^2} + \frac{x_0^2 e^{-2t}}{(1 - x_0 + x_0 e^{-t})^2} = \tag{3}$$

---

Ok car (2) est égal à (3)

Examinons le dénominateur de (1):

lorsque  $x_0 > 1$ , on a  $1 - x_0 < 0$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (1 - x_0 + x_0 e^{-t}) = 1 - x_0 < 0$ .

Par contre, au temps  $t = 0$ , on a  $1 - x_0 + x_0 = 1 > 0$ .

⚠ Il existe donc  $\bar{t} > 0$  tel que  $1 - x_0 + x_0 e^{-\bar{t}} = 0$

---

exemple avec  $x_0 = 1.2$

$$\begin{aligned} \bar{t} &= & x_0 e^{-\bar{t}} &= x_0 - 1 \\ & & &= 1.79[\text{s}] \end{aligned}$$

---

#### 4. Réponse indicielle disymétrique

Soit le système linéaire  $\dot{x} = -x + u$

Soit le système non linéaire  $\dot{x} = x|x| + u$

---

#### 5. Réponse polyharmonique

Système avec dissipation d'énergie. Régime permanent.

---

#### 6. Trajectoires chaotiques

Exemple: Oscillateur de Lorentz:  $(\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, r = 28)$

---

Il y a trois points d'équilibre distincts:

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

---

Valeurs propres  $A_i = \lambda(A_i)$

autour de  $\bar{x}_1$ :

c'est un point selle

---

autour de  $\bar{x}_2$ :

une branche stable et un foyer instable

---

autour de  $\bar{x}_3$ :

une branche stable et un foyer instable

---

Vecteurs propres pour  $A_1$  (associé à  $\bar{x}_1$ )

$\vec{\nu}_{1,1} =$

$\vec{\nu}_{1,2} =$

$\vec{\nu}_{1,3} =$

---

Vecteurs propres pour  $A_2$  (associé à  $\bar{x}_2$ )

$$\vec{v}_{2,1} =$$

$$\vec{v}_{2,2} =$$

$$\vec{v}_{2,3} =$$

---

Vecteurs propres pour  $A_3$  (associé à  $\bar{x}_3$ )

$$\vec{v}_{3,1} =$$

$$\vec{v}_{3,2} =$$

$$\vec{v}_{3,3} =$$

---

⚠ En effectuant  $\vec{v}_{3,2} + \vec{v}_{3,3}$ , on obtient un générateur réel  
ainsi que pour  $i \vec{v}_{3,2} - i \vec{v}_{3,3}$   
→ Plan tangent aux trajectoires localement autour du point d'équilibre

---

---