
IX. Passivité (part. II)

- | | |
|--|--------------------------|
| 1. La stabilité absolue | 4. Conjecture d'Aizerman |
| 2. Théorème de Kalman-Yakubovich-Popov | 5. Critère du cercle |
| 3. Stabilité absolue et passivité | |
-

1. La stabilité absolue

La plupart des systèmes avec rétroaction ont des actionneurs avec une non-linéarité dominante (saturation, zone morte, frottement sec, etc.). Dans cette leçon, on traite de la [stabilité en B.F. garantie](#) quelle que soit la non-linéarité statique appartenant à un secteur spécifique.

2. Théorème de Kalman-Yakubovich-Popov (lemme)

Soit le système [observable et gouvernable](#) $\dot{x} = Ax + Bu$ $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$
 $y = Cx$
alors $\Re G(j\omega) > 0 \Leftrightarrow \exists P, \exists Q \quad A^T P + PA = -Q \quad PB = C^T$

Condition de suffisance

Théorème Si

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

admet $P > 0$, $Q > 0$, telles que $PB = C^T$, alors le système est [passif avec la fonction de stockage](#) $V = \frac{1}{2}x^T Px$ et comme terme de dissipation $g = \frac{1}{2}x^T Qx$.

Démonstration

Par hypothèse $A^T P + PA = -Q$. Posons $V = \frac{1}{2} x^T P x$. On a

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{1}{2} (A^T x + Bu)^T P x + \frac{1}{2} x^T P (Ax + Bu) \\ &= \frac{1}{2} x^T (AP + PA) x + \frac{1}{2} u^T B^T x + \frac{1}{2} x^T B^T P u\end{aligned}$$

et comme $u^T B^T P x$ est un scalaire $(u^T B^T P x)^T = x^T P^T B u = x^T P B u$ car $P = P^T$.

ainsi

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} x^T Q x + u^T B^T P x$$

Si $y = B^T P x$ alors on a la passivité avec $g = \frac{1}{2} x^T Q x$ car $\dot{V} = u y - g(x)$. Posons $B^T P = C$ alors $y = C x$ est la bonne sortie avec

$$C^T = P B$$

3. Stabilité absolue et passivité

3.1 Non-linéarité de type secteur

Définition: Une non-linéarité $y \mapsto \phi(y)$ est de type secteur $[k_1; k_2]$ lorsque $\forall y \neq 0$

$$\begin{aligned}\forall y \neq 0 \Rightarrow k_1 y &\leq \phi(y) \leq k_2 y, & y > 0 \\ k_2 y &\leq \phi(y) \leq k_1 y, & y < 0\end{aligned}$$

3.2 Stabilité absolue

Définition: Soit un système linéaire bouclé par rétroaction (négative) par une non-linéarité statique $u = -\phi(y)$

Ce système est dit stable de manière absolue, vis-à-vis de la non-linéarité ϕ de secteur $[k_1; k_2]$, si le système en boucle fermée est stable au sens de Lyapunov quelle que soit $\phi \in [k_1; k_2]$.

3.3 Stabilité absolue et passivité

Théorème: Si

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

est stable de manière absolue par $\phi \in [0; +\infty]$.

Démonstration:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}x^T Px & \dot{V} &= \frac{1}{2}x^T P \dot{x} + \frac{1}{2}x^T P \dot{x} \\ A^T P + PA &= -Q & \dot{V} &= \frac{1}{2}x^T (A^T P + PA)x + x^T P Bu = -\frac{1}{2}x^T Qx + x^T C^T u \\ PB &= C^T & &= -\frac{1}{2}x^T Qx - y^T \phi(y) \\ & & & \phi \in [0; +\infty] \Rightarrow y\phi(y) \geq 0 \text{ et donc } \dot{V} < 0 \end{aligned}$$

4. Conjecture de M.A Aizerman

Une première analyse en utilisant les méthodes linéaires conduit à penser que si le système linéaire bouclé par n'importe quel gain compris dans le secteur $[k_1; k_2]$ est stable, alors le système linéaire est stable de manière absolue pour toute non-linéarité ϕ de secteur $[k_1; k_2]$. Cette conjecture est cependant fausse.

Conjecture fausse

$$\forall k \in [k_1; k_2] \quad \Re(\lambda_i(A - BCk)) < 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$\Downarrow$

le système $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$ avec $u = -\phi(y), \phi \in [k_1; k_2]$ est stable de manière absolue.

5. Critère du cercle

Théorème: Si $0 = k_1 < k_2$

Si $0 < k_1 < k_2$

Si $k_1 < 0 < k_2$, la stabilité absolue lorsque $G(j\omega)$ est contenu dans le cercle qui croise l'axe réel en $-\frac{1}{k_2} < 0$ et $-\frac{1}{k_1} > 0$.

Démonstration: (critère du cercle)

L'idée est de modifier le secteur à l'aide de "feedback" et "feedforwards" et d'appliquer les mêmes "feedbacks" et "feedforwards" mais changés de signe au système linéaire. L'effet est nul mais permet d'interpréter et faire apparaître un secteur $[0; +\infty]$ et un nouveau système linéaire associé.

Ceci rend possible d'appliquer le résultat du secteur $[0; +\infty]$ qui implique la passivité du système linéaire transformé. Lorsqu'on revient vers le système linéaire initial, cela conduit à l'apparition du cercle du critère.

modification du secteur

On note $[\phi]$ l'opérateur entrée-sortie associé à la fonction $y \mapsto \phi(y)$. Pour transformer un secteur $[k_1; k_2]$ en un secteur $[0; +\infty]$, on applique "le transfert"

$$\frac{1}{[\phi] - k_1} - \frac{1}{k_2 - k_1} \text{ puis en inversant } \frac{1}{\frac{1}{[\phi] - k_1} - \frac{1}{k_2 - k_1}} = \frac{[\phi] - k_1}{1 - \frac{1}{k_2 - k_1} ([\phi] - k_1)}$$

que l'on réalise sous la forme

$$\frac{[\phi] - k_1}{1 - \frac{1}{k_2 - k_1} ([\phi] - k_1)}$$

Compensation complète, effet nul

Nouvelle fonction de transfert $\bar{G}(s)$

$$\bar{G}(s) = \frac{G(s)}{1 + k_1 G(s)} + \frac{1}{k_2 - k_1} = \frac{\frac{1}{k_2} + G(s)}{\frac{1}{k_1} + G(s)} \left(\frac{k_2}{k_1} \frac{1}{k_2 - k_1} \right)$$

$k_1 > 0, k_2 > 0$: Comme $k_2 > k_1$, $\frac{k_2}{k_1} \frac{1}{k_2 - k_1} > 0$ De plus, $\phi' \in [0; +\infty]$, $\bar{G}(s)$ doit être passif, autrement dit

$$\Re(\bar{G}(j\omega)) = \Re\left(\frac{\frac{1}{k_2} + G(j\omega)}{\frac{1}{k_1} + G(j\omega)}\right) > 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$
