
II. Plan de phase

1. Plan de phase

2. Système du 2ème ordre

3. Masse ressort

4. Graphe des pentes

5. Cycle limite

6. Théorème de l'index

7. Théorème de Poincaré-Bendixson

8. Théorème de Bendixson

1. Plan de phase

En mécanique, les conditions initiales sont des positions et des vitesses ou, selon le formalisme Hamiltonien, des coordonnées et des moments généralisés. Une représentation en coordonnées et quantités de mouvement est appelée une représentation en variables de phase. Lors d'un seul degré de liberté, on peut représenter les trajectoires dans un plan.

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$$

$$\mathcal{H} = T + U$$

Plan de phase pour un
système mécanique
sous forme hamiltonienne

Plan de phase dans ce cours

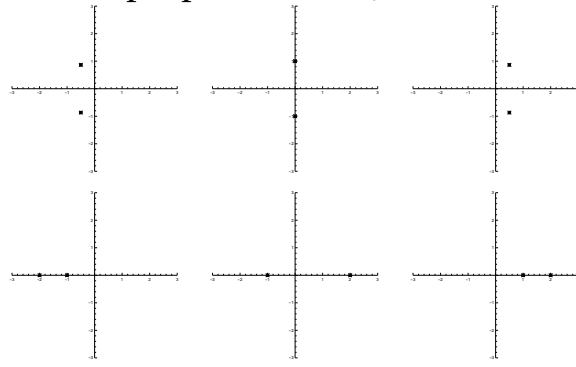
2. Système du 2ème ordre linéaire

Si le système est du deuxième ordre et linéaire, on peut distinguer les valeurs propres de sa représentation.

Autrement dit, $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$

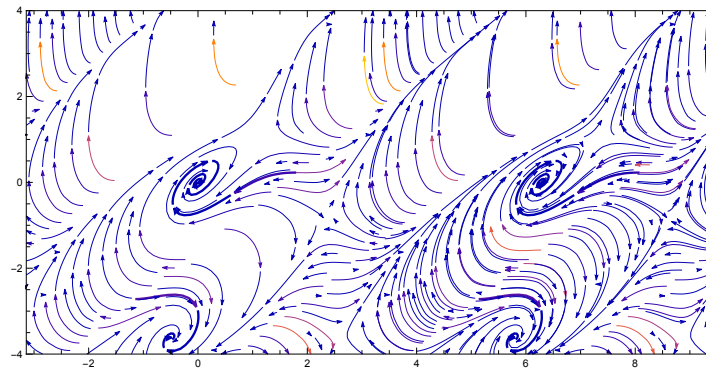
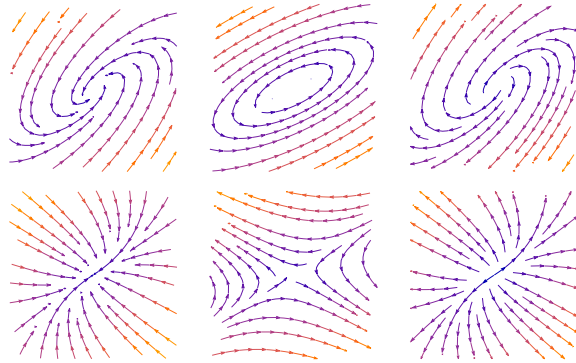
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \dot{x} = Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} x$$

Classification par les vecteur propres de A , $\lambda_i(A)$



6 cas sont possibles:

Trajectoires dans le plan de phase



- Lorsque $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, il existe deux droites qui se confondent avec les trajectoires. Il s'agit des droites qui supportent les vecteurs propres associés aux valeurs propres.
- Il y a un seul point d'équilibre unique si A est plein rang. Il y a une infinité de points d'équilibre dans le cas contraire.

2 ème ordre non linéaire en général.

$$\dot{x} = f(x) \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Plusieurs points d'équilibre isolés sont possibles.

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 & U &= \frac{1}{2} k x^2 \\
 \mathcal{L} = T - U &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 & \mathcal{H} &= T + U & p &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}
 \end{aligned}
 \quad
 \left\{ \begin{array}{l} \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \\ \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \end{array} \right.$$

Selon Hamilton

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q} = \frac{1}{m} p \\ \dot{p} = -k q \end{array} \right.$$

Selon Lagrange

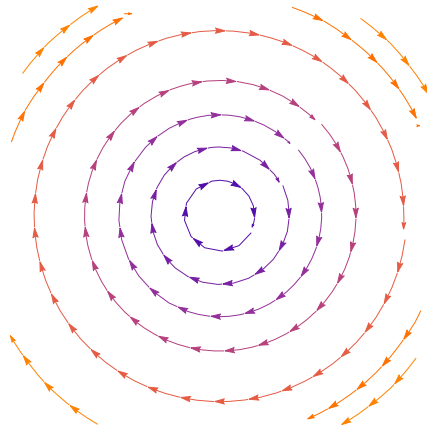
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

$$m \ddot{q} + k q = 0$$

Remarque: La méthode d'Hamilton donne directement la représentation du plan de phase

Pour Lagrange, on doit choisir les états, par exemple

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = q \\ \dot{x}_2 = \dot{q} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m} x_1 \end{array} \right. \text{ au lieu de } \left\{ \begin{array}{l} \dot{q} = \frac{1}{m} p \\ \dot{p} = -k q \end{array} \right.$$



Cas particulier $k = 1, m = 1$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R}^2$$

associé au système dynamique

-
- Chaque point (x_1, x_2) a un vecteur lié au point $f(x_1, x_2)$
 - On peut utiliser un ordinateur pour dessiner $f(x_1, x_2)$ en normalisant la longueur

$$\hat{f}(x_1, x_2) = \frac{f}{\|f\|} = \frac{1}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

Remarque: Si l'unité de longueur est choisie petite, le graphique obtenu ressemble à de la limaille de fer qui épouse une sorte de champ magnétique. On obtient une bonne représentation de la dynamique sans intégrer l'équation différentielle !

Intégration: Elimination du temps pour obtenir une trajectoire dans le plan de phase, avant intégration:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 \end{aligned}$$

$$\frac{dx_1}{x_2} = dt = -\frac{dx_2}{x_1}$$

$$\begin{aligned} x_1 dx_1 + x_2 dx_2 &= 0 \\ \int x_1 dx_1 + x_2 dx_2 &= \int 0 \\ \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + C &= 0 \end{aligned}$$

Solution classique:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) & \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} = 1 \\ x &= A \cos(t) + B \sin(t) \\ \dot{x} &= -A \sin(t) + B \cos(t) \end{aligned}$$

$$x^2 + \dot{x}^2 = A^2 + B^2$$

La paramétrisation par le temps est perdue dans le plan de phase

Méthode des isoclines:

On choisit une pente α et on cherche le lieu

des points (x_1, x_2) tels que

$$\alpha = \arctan\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} = \text{cte} &= \frac{f_2}{f_1} \\ \text{cte} &= \frac{-x_2}{x_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = f_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 = f_2 \end{aligned}$$

$$x_2 = -x_1$$

5. Cycle limite

Définition: $\exists T$ et x_0 tels que $\chi(x_0, T) = x_0$ et $\chi(x_0, t) \neq x_0$ pour $t \in]0, T[$

Masse-ressort: Il existe une infinité de cycles limites. En non-linéaire, existe-t-il des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour l'existence de cycles limites?

6. Index d'un point d'équilibre d'un cycle limite

- On choisit une courbe arbitraire qui contient un seul point d'équilibre.
 - On choisit un certain nombre de points arbitraires le long du choix arbitraire de la courbe.
-
- On évalue le champ de vecteurs aux points choisis.
-

Index d'un point d'équilibre (suite)

On reporte les champs de vecteurs dans un nouveau plan en joignant le point de liaison des vecteurs à l'origine d'un nouveau plan et en conservant la numérotation

On vérifie par calcul

$$\text{index} = \text{partie entière de l'angle divisé par } 2\pi \in \mathbb{Z}$$

Nombre de tours autour de l'origine de la pointe des vecteurs une fois reportés dans le nouveau plan.

Index d'un cycle limite

$$\text{Index d'un cycle limite} = +1$$

Pour les systèmes linéaires du 2ème ordre Seul le point selle à un index -1 . ⚠ L'index est indépendant de la stabilité ! Selon le tableau des systèmes du 2ème ordre:

$$\begin{array}{ccc} +1 & +1 & +1 \\ +1 & \underline{-1} & +1 \end{array}$$

6. Théorème de l'index

$$\text{Index } C = \sum \text{index } \bar{x}_i$$

$\bar{x}_i = P_i$: points d'équilibre

$$f(\bar{x}_i) = 0$$

Application: Soit C un cycle limite. Son index est $+1 = \sum \text{index } \bar{x}_i$. Soit

- N le nombre de points d'index $+1$
- S le nombre de points d'index -1

alors

$$N = S + 1$$

7. Théorème de Poincaré-Bendixson

Soit $\dot{x} = f(x)$ $x \in \mathbb{R}^2$ un système planaire et $\chi(x_0, t) \in \Omega$ avec Ω un ensemble compact.

Alors, une des deux possibilités de convergence suivantes a lieu

- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \chi(x_0, t) = \bar{x}_i$
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \chi(x_0, t) \rightarrow C$ un cycle limite

8. Théorème de Bendixson

Aucun cycle limite ne peut exister dans une région Ω compacte du plan de phase dans laquelle $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ ne s'annule pas ni ne change de signe.

Théorème:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Rightarrow \text{pas de cycle limite}$$

Démonstration du théorème de Bendixson.

Le théorème $A \Rightarrow B$ sera démontré en utilisant la contraposée $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$. Soit $\dot{x} = f(x)$. Supposons $C \in \Omega$, un cycle limite. Le long de C on a

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1 \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2$$

et donc $\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = dt$, c.-à-d. $f_2 dx_1 - f_1 dx_2 = 0$. On peut donc ajouter 0 le long de C , sous la forme

$$\oint_C f_2 dx_1 - f_1 dx_2 = 0$$

On applique Stokes

$$\boxed{\oint \alpha = \int \int d\alpha}$$

d est la dérivée extérieure

$$\begin{aligned} A = \oint_C f_2 dx_1 - f_1 dx_2 &= \int \int_{\text{int} C} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge dx_1 \\ &\quad - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge dx_2 = 0 \\ dx_1 \wedge dx_2 &= -dx_2 \wedge dx_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int \int_{\text{int} C} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 \right) \\ &= \int \int_{\text{int} C} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right) dx_1 \wedge dx_2 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ doit changer de signe.
