

1. Objectifs
 2. Type de systèmes
 3. BO et excitation sinusoïdale
 4. Série de Fourier et gain équivalent
-

1. Objectifs

Bien des systèmes mécaniques, électriques, etc. ont une caractéristique non linéaire forte et de nature statique par rapport à la dynamique qui est bien modélisée par une fonction de transfert. La cascade en boucle fermée d'un tel système peut présenter des cycles limites, uniques ou non, voulus ou non. Il s'agit dans cette leçon de déterminer les heuristiques permettant de prévoir et calculer les paramètres du/des cycle(s) limite(s).

L'analyse n'est pas limitée au système du 2ème ordre.

OBJECTIF: Déterminer l'amplitude A et la pulsation ω du cycle limite.

2. Type de systèmes

1. Non-linéarité statique
2. Fonction de transfert

⚠ Notation mixte, $u(t)$ et $G(s)$

2.2 Fonction de transfert

⚠ Notation

entrée $Y(s)$

sortie $Z(s)$

1. ordre arbitraire

2. $G(s)$ est passe-bas

3. Boucle ouverte et excitation sinusoïdale

On cherche à caractériser la N.L. suite à une
excitation sinusoïdale à l'entrée.

$$y = \phi(A \sin(\omega t))$$

$$u = A \sin(\omega t)$$

Remarque:

1. Comme la non-linéarité (N.L.) est statique $y(t)$ est de même période que l'excitation sinusoïdale

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

2. $y(t)$ peut contenir beaucoup d'harmoniques
-

Frottement:

Exemples: Frottement

1. sec +
visqueux

La masse entre en oscillation

Mécanismes

Exemples:

1. valve hydraulique
 2. engrenages
 3. jeu
-

4. Série de Fourier et équivalent du 1er harmonique

$y(t)$ se décompose en harmoniques par la série de Fourier

$$y(t) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \cos(l \omega t) + b_l \sin(l \omega t) + \frac{a_0}{2}$$

Les coefficients de la série de Fourier peuvent s'exprimer sous la forme (représentation angulaire)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(\tau) d(\omega \tau) \qquad a_l = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(\tau) \cos(l \omega \tau) d(\omega \tau)$$

$$b_l = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(\tau) \sin(l \omega \tau) d(\omega \tau)$$

Calcul du gain équivalent (au 1er harmonique)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(\tau) d(\omega\tau)$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(\tau) \cos(\omega\tau) d(\omega\tau)$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(\tau) \sin(\omega\tau) d(\omega\tau)$$

Idée:

1. Remplacer les non-linéarités par un gain équivalent $N(A, \omega)$.
2. $N(A, \omega)$ est obtenu à partir de a_0, a_1, b_1 .
3. Pour les non-linéarités symétriques, la composante continue $a_0 = 0$

Avantage: $N(A, \omega)$ est un nombre complexe tout comme la fonction de transfert $G(s)$. On pourra utiliser une représentation dans le diagramme de Nyquist.

$$N(A, \omega) \in \mathbb{C} \quad \forall A, \omega$$

Définition de $N(A, \omega)$ (obtention de $N(A, \omega)$)

$$y(t) \approx a_0 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) = a_0 + M \sin(\omega t + \alpha)$$

$$M = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad \alpha = \arctan\left(\frac{a_1}{b_1}\right)$$

$$N(A, \omega) = M \frac{e^{j\omega t + \alpha}}{A e^{j\omega t}} = \frac{M}{A} e^{j\alpha} = \frac{1}{A} (b_1 + j a_1)$$

5. Calcul pour une saturation

$$\Phi(a) = \begin{cases} ka & u > a \\ ku & -a \leq u \leq a \\ -ka & u < -a \end{cases}$$

1. La saturation est symétrique: pas de composante continue $a_0 = 0$.
 2. On peut tenir compte de zéro déphasage: $a_1 = 0$
 3. Pour b_1 , il y a une symétrie: 0 à $\frac{\pi}{2}$ pour ωt .
-

par symétrie, lors du calcul de b_1 , la région hachurée n'entre pas dans le calcul.

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(\tau) \sin(\omega\tau) d(\omega\tau) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(\tau) \sin(\omega\tau) d(\omega\tau)$$

On décompose $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ en deux $\int_0^{\gamma} + \int_{\gamma}^{\frac{\pi}{2}}$.

Sur l'intervalle $t \in [0; \gamma[$, la sortie vaut $y(t) = k A \sin(\omega t)$.

Sur l'intervalle $t \in [\gamma; \frac{\pi}{2}[$ la sortie vaut $y(t) = k a$.

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\arcsin(\frac{a}{A})} k A \sin(\omega t) d(\omega t) \\
 &\quad + \frac{4}{\pi} \int_{\arcsin(\frac{a}{A})}^{\frac{\pi}{2}} k a \sin(\omega t) d(\omega t) \\
 &= 4 \frac{kA}{2\pi} \left(\gamma + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right)
 \end{aligned}$$

Gain équivalent

$$N(A) = \frac{1}{A} (b_1 + j a_1) = \frac{b_1}{A} = \begin{cases} k & A \leq a \\ \frac{2k}{\pi} \left(\gamma + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right) & A > a \end{cases}$$

Graphique de $N(A)$

Représentation dans le plan de Nyquist

On représente $-\frac{1}{N(A)}$ qui devient un lieu géométrique paramétré par A .
