

VI. Méthodes de Lyapunov et théorème d'invariance de LaSalle

(1)

1. Stabilité locale et linéarisation
2. Stabilité globale
3. Théorème d'invariance de LaSalle
4. Exemple le pendule

Objectifs 1. Stabilité locale et linéarisation

- $\hookrightarrow$ Démontrez que lorsque la linéarisation locale est stable ^{asympt.}, alors le système non linéaire est stable ^{asympt.} également.
- Déterminer une région des conditions initiales associée à la stabilité.

On part d'un système N.L.
avec pt. d'équilibre à l'origine

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$
$$\bar{x} = 0 \quad f(0) = 0.$$

- a.) linéarisation locale:

$$A \triangleq \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x=0}$$

la dynamique linéaire associée à la linéarisation:

$$\dot{x} = Ax \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Thm: Si $\dot{x} = Ax$ est stable asymptotiquement (i.e. $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \operatorname{Re}(\lambda_i(A)) < 0$)
alors $\dot{x} = f(x)$ est stable (local) asymptotiquement.

Par contre, si $\exists i \in \{1, \dots, n\}, \operatorname{Re}(\lambda_i(A)) = 0$, impossible de conclure la stabilité;
et $\forall i \neq j, \operatorname{Re}(\lambda_j(A)) < 0$, tout est possible.

Démonstration: Comme $\forall i, \operatorname{Re}(\lambda_i(A)) < 0$, (2)
on peut résoudre l'équ. de Lyapunov matricielle, c-à-d
 $\forall Q > 0, \exists P > 0, \quad \underline{A^T P + P A = -Q}$

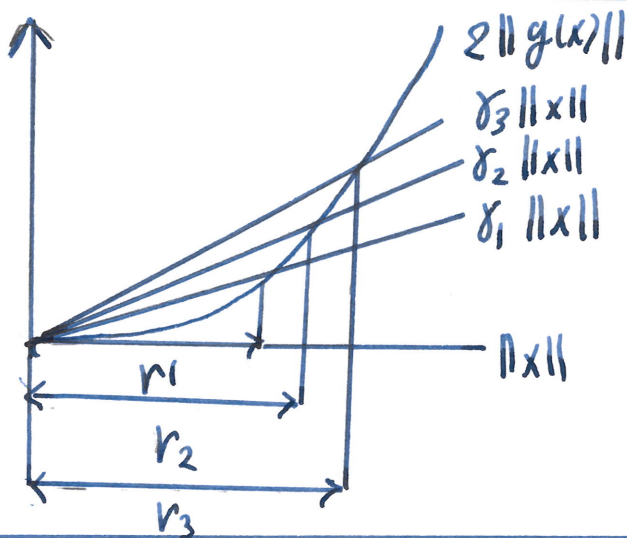
Posons pour le système non linéaire

$$V \triangleq x^T P x$$

Ecrivons $f(x) = Ax + g(x)$, avec $g(x)$ qui contient les termes d'ordre supérieur. Autrement dit,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0 \quad \text{ce qui signifie}$$

$$\forall \delta, \exists r, \text{ si } \|x\| < r \quad 2\|g(x)\| < \delta \|x\|$$



$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= (x^T A^T + g^T) P x + x^T P (A x + g) \\ &= x^T (A^T P + P A) x + g^T P x + x^T P g \\ &= -x^T Q x + 2 g^T P x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -x^T Q x + 2 \|g\| \|P x\| \\ &\leq -x^T Q x + 2 \|g\| \lambda_{\max}(P) \|x\|^2 \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q) \|x\|^2 + 2 \|g\| \lambda_{\max}(P) \|x\|^2 \\ &\leq (-\lambda_{\min}(Q) + \delta \lambda_{\max}(P)) \|x\|^2 \end{aligned}$$

en choisissant $\delta < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}$, $\exists r, \forall \|x\| < r \quad \dot{V} < 0$.
C.Q.F.D.

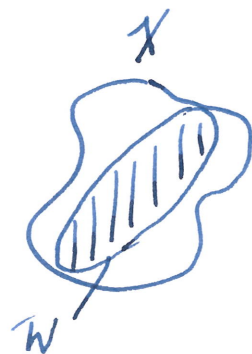
Conséquence : estimation du bassin de stabilité
(bassin d'attraction).

(3)

Définitions $X = \left\{ x \mid \|g(x)\| \leq \frac{\lambda_{\min}}{2\lambda_{\max}} \right\}$

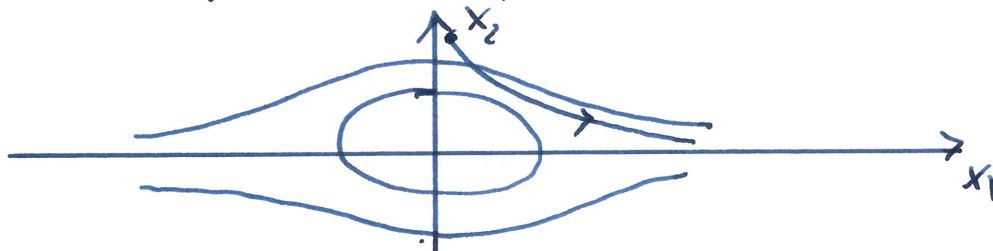
et $W = \left\{ x \mid x \in \left(\max_c \left\{ x \mid \exists P_x \langle c \rangle \subseteq X \right\} \right) \right\}$

W est l'estimée du bassin d'attraction



2. Stabilité globale Est-ce que $V > 0$, $V(0) = 0$
et $\dot{V} < 0$, $\forall x \neq 0$ garantit la stabilité globale?

On pourrait le penser. Cependant ce n'est pas le cas :



Exemple :

$$\dot{x}_1 = -\frac{6x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{2x_1 + 2x_2}{(1+x_1^2)^2}$$

avec $V = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$,

on constate que

$$\dot{V} = \frac{-12x_1^2 - 4(1+x_1^2)^2 x_2^2}{(1+x_1^2)^4} < 0$$

or, il existe des x_0 tels que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(x_0, t) \rightarrow +\infty$

Thm : $V > 0$, $\forall x \neq 0$ et $\dot{V} < 0$, $\forall x \neq 0$

garantit la stabilité globale à condition
que V soit radialement non borné, c-à-d.

$$\forall \|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow +\infty$$

[i.e les courbes
de niveau sont
toutes fermées]

3. Thm d'invariance de LaSalle

(4)

On a vu l'exemple du robot pour lequel $\dot{V} \leq 0$ et, cependant, la convergence et la stabilité asymptotique a lieu. Existe-t-il un moyen de renforcer les conditions et de garantir la stabilité asymptotique dans le cas $\dot{V} \leq 0$?

La réponse est affirmative avec le thm. d'invariance de LaSalle :

Thm : Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ avec $\dot{V} \leq 0, \forall x \in \Omega$ ^{Ω fermé borné et invariant, $\forall x_0 \in \Omega, \gamma(x_0, t) \in \Omega$}
 alors $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(x_0, t) \rightarrow \mathcal{L}, \forall x_0 \in \Omega$
 avec $\mathcal{L}$ le plus grand ensemble invariant contenu dans $\mathcal{L} \triangleq \{x \mid \dot{V} = 0\}$

Définition : Ensemble invariant $\mathcal{I}$

$$\mathcal{I} = \{x_0 \mid \gamma(x_0, t) \subseteq \mathcal{I}, \forall t\}$$

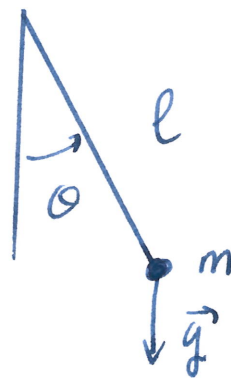
Corollaire : Soit Ω un ensemble ^{fermé borné et} invariant tel que $\dot{V} \leq 0$ et $\mathcal{I} \subset \Omega$,
 $\mathcal{I} = \{0\}$, alors le système est asymptotiquement stable si stable.

4. Exemple Le pendule simple

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - b x_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E_p &= mgl(1 - \cos x_1) \\ E_c &= \frac{1}{2} m x_2^2 \end{aligned}$$

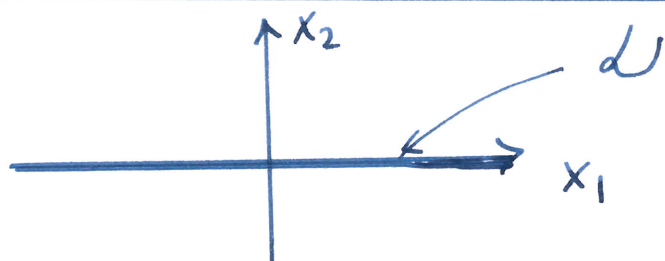
$$V = \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{g}{l} (1 - \cos x_1)$$



(5)

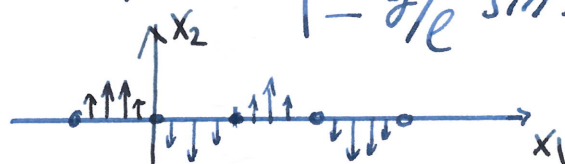
$$\begin{aligned}
\dot{V} &= x_2 \dot{x}_2 + g/l \sin(x_1) x_1 \\
&= x_2 \left(-g/l \sin(x_1) - b x_2 \right) + g/l \sin(x_1) x_2 \\
&= -b x_2^2 \leq 0
\end{aligned}$$

Examinons $\mathcal{L} = \{x \mid \dot{V}=0\} = \{(x_1, x_2) \mid x_2=0\}$



calculons $\mathcal{L}$, le plus grand ensemble invariant $\subseteq \mathcal{L}$

comme $f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -g/l \sin x_1 - b x_2 \end{pmatrix}$:



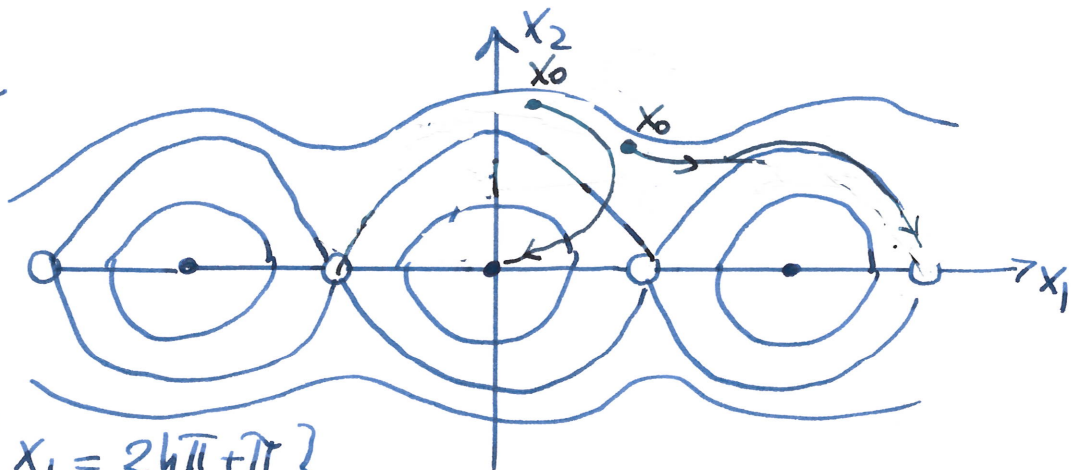
$$\mathcal{L} = \{(x_1, x_2) \mid x_2=0, x_1=k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

On constate qu'il y a possibilité

$\exists x_0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \chi(x_0, t) \rightarrow$$

$$\{(x_1, x_2) \mid x_2=0, x_1=2k\pi+\pi\}$$



Ensemble des points d'équilibre stables:

$$\mathcal{L}_{\text{stable}} = \{(x_1, x_2) \mid x_2=0, x_1=2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Ensemble des points d'équilibre instables:

$$\mathcal{L}_{\text{instable}} = \{(x_1, x_2) \mid x_2=0, x_1=2k\pi+\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{stable}} \oplus \mathcal{L}_{\text{instable}}$$