
V. Analyse par les méthodes de Lyapunov

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------|
| 1. Désavantages de la définition | 5. Exemple du robot |
| 2. Candidat de Lyapunov | 6. Systèmes linéaires |
| 3. Fonction de Lyapunov | |
| 4. Equivalence avec la définition | |
-

1. Désavantages de la définition

Reprenons la définition de la stabilité:

$$\forall R, \exists r, \forall x_0 \in \mathcal{B}_r \Rightarrow \chi(x_0, t) \in \mathcal{B}_R, \forall t$$

Désavantages:

Vérifier cette condition nécessite de tester $\forall x_0$.

On cherche une condition plus simple utilisant une sorte d'énergie.

Quelques remarques:

1. Un système dont l'énergie augmente en permanence est un système instable.
 2. Un système mécanique conservateur avec un potentiel minimum à l'équilibre est stable.
 3. Un système mécanique conservateur avec un potentiel extremum autre qu'un minimum est instable.
-

⚠ Un système non conservatif qui a son énergie qui décroît en permanence n'est pas nécessairement stable.

Exemple: frottement sec cinétique et point matériel sur parabole inversée.

2. Candidat de Lyapunov

Résumons:

- $\dot{E} = 0$ et E minimum pour $\bar{x} \Rightarrow \bar{x}$ stable.
 - $\dot{E} = 0$ et E extremum pour $\bar{x}$, mais pas minimum, $\Rightarrow$ instable.
 - Lorsque $\dot{E} < 0$, $E(x)$ doit être $> E(\bar{x})$ lorsque $x \neq \bar{x}$.
-

Soit $\bar{x} = 0$ le point d'équilibre de $\dot{x} = f(x)$

Définition: Un candidat de Lyapunov $V(x)$ est une fonction

$$V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

1. $V(0) = 0$ et V est une fonction continue
 2. $V(x) > 0$, pour tout $x \neq 0$
-

3. Fonction de Lyapunov

Définition: Pour qu'un candidat de Lyapunov soit une fonction de Lyapunov, il faut une troisième condition

$$3. \dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq 0$$

4. Equivalence avec la définition de stabilité

Il faut montrer

$$1. V(0) = 0, V \text{ continue}$$

$$2. V(x) > 0, \forall x \neq 0$$

$$3. \dot{V}(x) \leq 0$$

$\Rightarrow$

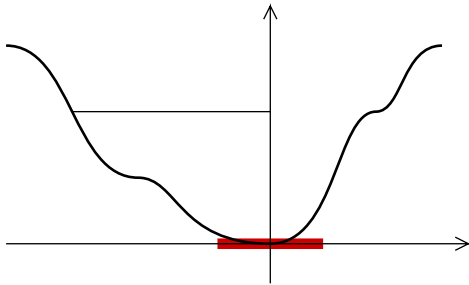
Stabilité (pas nécessairement asymptotique)

Soit R donné, il est nécessaire de déterminer r selon la définition.

Soit $\mathcal{S}_R = \{x | \|x\| = R\}$

$$x_m = \underset{x \in \mathcal{S}_R}{\operatorname{argmin}} V(x)$$

$$m = \min_{x \in \mathcal{S}_R} V(x)$$



comme V est continue, en se rapprochant du point d'équilibre, il existe une petite boule $\mathcal{B}_r$ telle qu'il est garanti

$$\forall x \in \mathcal{B}_r \Rightarrow V(x) < m \quad (1)$$

Le r de la définition coïncide avec un r satisfaisant la condition (1). En effet, $\dot{V}(x) \leq 0$ implique

$$\forall x_0 \in \mathcal{B}_r, \quad V(\chi(x_0, t)) \leq m \quad \forall t \geq 0$$

et donc

$$\|\chi(x_0, t)\| < R \quad \forall t \geq 0$$

Démonstration de la stabilité locale asymptotique

Comme $\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$, et $V(x)$ borné inférieurement, $\exists L \neq \infty$ pour lequel

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(\chi(x_0, t)) = L$$

2 cas sont possibles:

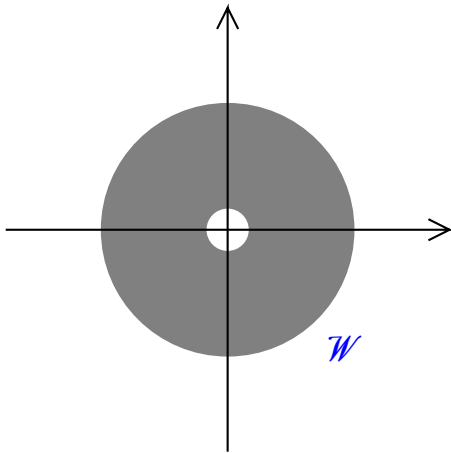
a) $L = 0$

b) $L \neq 0$

a) $L = 0$ implique $\lim_{t \rightarrow \infty} \chi(x_0, t) = 0$ car la seule valeur de x qui annule V est $x = 0$.

b) $L \neq 0$. Comme $\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) < 0$, V décroît de manière monotone le long des solutions, i.e. $V(\chi(x_0, t))$ décroît en fonction du temps. Mais étant donné qu'elle atteint la valeur L , il existe r_0 pour lequel

$$\forall x \in \mathcal{B}_{r_0} \Rightarrow V(x) < L$$



De plus, la trajectoire est garantie de ne jamais entrer dans $\mathcal{B}_{r_0}$. Soit

$$\mathcal{W} = \mathcal{B}_R \setminus \mathcal{B}_{r_0}$$

Si $L \neq 0$, $\chi(x_0, t) \in \mathcal{W}$, $\forall t$. Nous allons montrer une contradiction.

Soit $\gamma = \max_{x \in \mathcal{W}} \dot{V}(x)$. Comme $\dot{V}(\gamma) < \gamma < 0$,

$$V(\chi(x_0, t)) < \gamma t + V(x_0)$$

Mais pour $\bar{t} > -\frac{V(x_0)}{\gamma}$, on obtient $V(\chi(x_0, \bar{t})) < 0$ ce qui contredit $V(\chi(x_0, t)) \geq L$.

5. Exemple du robot

Prenons un robot plan

Couples (moments de force) $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$

Coordonnées: $q_1, q_2, \dots, q_n$

Soit $M() \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice d'inertie de telle sorte que

$$T = E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(q) \dot{\mathbf{q}} \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix}$$

Bilan de puissance:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \tau_i = \dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau} \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{pmatrix}$$

Considérons des régulateurs PD découplés

$$\tau_i = -k_{p_i} q_i - k_{d_i} \dot{q}_i$$

afin de réguler autour du point d'équilibre $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$. Prenons

$$V = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T K_p \mathbf{q}$$

Avec

$$K_p = \begin{pmatrix} k_{p_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{p_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & k_{p_n} \end{pmatrix}$$

On constate que V est une fonction continue de

$$x = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n & \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \cdots & \dot{q}_n \end{pmatrix}^T$$

et que $V(0) = 0$. Il s'agit donc bien d'un candidat de Lyapunov.

Vérifions que $V(x)$ est une fonction de Lyapunov en utilisant le bilan de puissance

$$\begin{aligned} \dot{V} = \dot{T} + \sum_{i=1}^n k_{p_i} q_i \dot{q}_i &= \sum_{i=1}^n \tau_i \dot{q}_i + k_{p_i} q_i \dot{q}_i \\ &= \sum_{i=1}^n -k_{p_i} q_i \dot{q}_i - k_{d_i} \dot{q}_i^2 + k_{p_i} q_i \dot{q}_i \\ &= -\sum_{i=1}^n k_{d_i} \dot{q}_i^2 \leq 0 \Rightarrow \text{stabilité} \end{aligned}$$

⚠ La stabilité asymptotique n'est pas garantie car $\dot{V} \leq 0$ et non $\dot{V} < 0$. On verra par la suite comment améliorer le résultat.

6. Systèmes linéaires et fonction de Lyapunov

$$\dot{x} = Ax \quad x \in \mathbb{R}^n \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

On se place dans le cadre de l'algèbre linéaire. Comme candidat de Lyapunov, on prend une forme définie positive associée à une matrice définie positive

$$P > 0$$

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T P x$$

- $V(0) = 0$
- $V(x)$ continue
- $V(x) > 0, \forall x \neq 0$

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{x}^T P x + \frac{1}{2} x^T P \dot{x} = \frac{1}{2} (Ax)^T P x + \frac{1}{2} x^T P (Ax) = \frac{1}{2} x^T (A^T P + P A) x$$

Ainsi on peut poser

$$-Q = A^T P + P A \quad \text{et tester} \quad Q > 0$$

Théorème $\Re(\lambda_i(A)) < 0, \forall i = 1, \dots, n$

$\Leftrightarrow \forall Q > 0, \exists P$, tel que, $A^T P + P A = -Q$.

Démonstration: $\Leftarrow$: stabilité asymptotique selon le théorème non linéaire

$\Rightarrow$: Posons

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{A t} dt \quad (2)$$

et introduisons ce P dans $A^T P + P A$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(A^T e^{A^T t} Q e^{A t} + e^{A^T t} Q e^{A t} A \right) dt &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left(e^{A^T t} Q e^{A t} \right) dt \\ &= \left[e^{A^T t} Q e^{A t} \right]_0^\infty = e^{A^T + \infty} Q e^{A + \infty} - e^{A^T 0} Q e^{A 0} = -Q \end{aligned}$$

étant donné que $\Re(\lambda_i) < 0$ ce qui entraîne $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{A^T t} = 0$

On a bien $A^T P + PA = -Q$ Ainsi, pour chaque $Q > 0$, on peut calculer un P selon (2). Il reste à vérifier $P > 0$. Ceci provient du fait que e^{At} est inversible il n'y a pas de perte de rang dans (2) et donc comme $Q > 0$, P est une somme (intégrale) de matrices définies positives, et donc une matrice définie positive.
