

V Analyse par les méthodes de Lyapunov ①

1. Désavantages de la définition
2. Candidat de Lyapunov
3. Fonction de Lyapunov
4. Equivalence avec la définition de stabilité
5. Exemple du robot
6. Systèmes linéaires et fonctions de Lyapunov

1. Reprenons la définition de la stabilité:
Désavantages $\forall R, \exists r, \forall x_0 \in B_r \Rightarrow \chi(x_0, t) \in B_R, \forall t.$

Vérifier cette condition nécessite de tester $\forall x_0$, ce qui est difficile.

Existe-t-il une analogie plus "mécanique" entre la définition de la stabilité et une condition invoquant, par exemple, la notion d'énergie?

Quelques remarques:

- 1) Un système dont l'énergie augmente en permanence est un système instable.
- 2) Un système mécanique conservateur avec un potentiel minimum à l'équilibre est stable.
- 3) Un système mécanique conservateur avec un potentiel qui atteint un extrémum autre qu'un min est instable.

⚠ 4) Un système non conservatif qui à son énergie qui décroît en permanence n'est pas nécessairement stable! Exemple frottement sec cinétique et point matériel sur parabole inversée:



2. Candidat de Lyapunov.

(2)

Résumons : $\dot{E} = 0$ et E minimum à $\bar{x}$

$\Rightarrow \bar{x}$ stable

$\dot{E} = 0$ et E extremum à $\bar{x}$ mais pas minimum $\Rightarrow$ instable

Lorsque (cf. pt 4) $E < 0$, $E^{(x)}$ doit être $> E(\bar{x})$ dès que $\bar{x} \neq x$

Le dernier point 4) donne la possibilité de généraliser quelque peu. Soit $\bar{x} = 0$ le point d'équilibre

de $\boxed{\dot{x} = f(x)}$ $\leftarrow$ issue de n'importe quelle discipline $x \in \mathbb{R}^n$ $(f(0) = 0)$.
mécanique ou non.

Définition: Un candidat de Lyapunov $V(x)$ est une fonction $V: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^+$.

avec les propriétés suivantes:

1. $V(0) = 0$ et V est continue.

2. $V(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$.

3. Fonction de Lyapunov

Déf: Pour qu'un candidat de Lyapunov soit une fonction de Lyapunov, il faut la troisième condition

3. $\dot{V}(x) \triangleq \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x) \leq 0$.

4.) Equivalence avec la définition de la stabilité

(3)

Démontrons 1) V , continue

2) $V(0)=0, \forall V(x) > 0 \forall x \neq 0$

3) $\dot{V}(x) \leq 0$

stabilité

(pas nécessairement asymptotique)

Soit R donné, il est nécessaire de déterminer un r selon la définition.

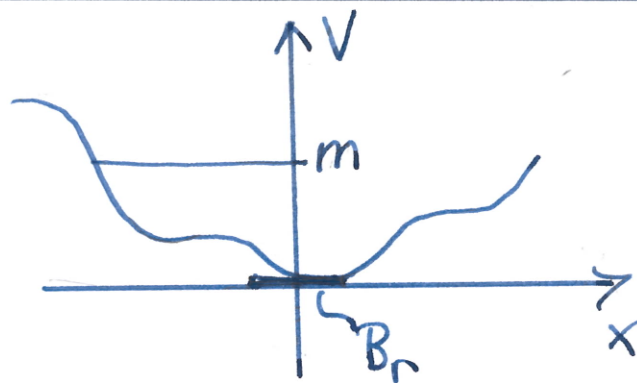
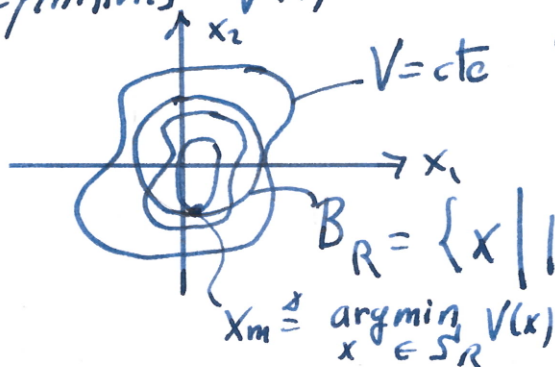
Définissons $V(x)$ minimum de la manière suivante

(considérons la sphère

$$S_R = \{x \mid \|x\| = R\}$$

et calculons

$$m \triangleq \min_{x \in S_R} V(x).$$



Comme V est continue, en se rapprochant du point d'équilibre, il existe une petite boule B_r telle qu'il soit garanti

$$\forall x \in B_r \quad V(x) < m \quad (*)$$

le r de la définition coïncide avec un r satisfaisant la condition $(*)$

En effet, $\dot{V}(x) \leq 0$ implique

$$\forall x_0 \in B_r, \quad V(X(x_0, t)) \leq m \quad \forall t \geq 0$$

$$\text{et donc } \|X(x_0, t)\| < R \quad \forall t \geq 0$$

Démonstration de la stabilité locale asymptotique (4)

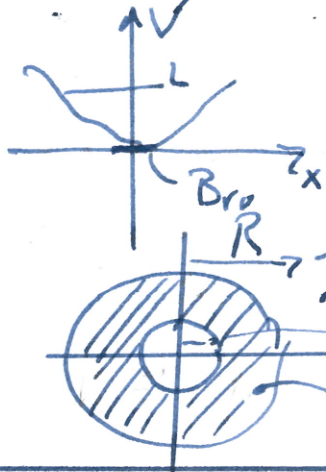
Comme $\dot{V}(x) < 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} V(X(x_0, t)) = L$ existe
 et $V(x)$ est borné par les bas $L \neq \infty$

2 cas sont possibles: a) $L = 0$
 b) $L \neq 0$

a) $L = 0$ implique $\lim_{t \rightarrow \infty} X(x_0, t) = \underline{0}$ car la seule valeur de x qui annule V est l'équilibre à l'origine 0.

b) $L \neq 0$. Comme $\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) < 0$, V décroît de manière monotone le long des solutions, i.e. $V(X(x_0, t))$ vue comme une fonction du temps. Mais étant donné qu'elle atteint asymptotiquement la valeur L , $\exists r_0$

tel que $V(X(x_0, t)) < L \quad \forall x \in B_{r_0} \Rightarrow V(x) < L$.



De plus on est assuré que la trajectoire ne rentre jamais dans B_{r_0}

Soit $W \triangleq B_R \setminus B_{r_0}$, si $L \neq 0$,
 $X(x_0, t) \in W, \forall t$ (sans l'hypothèse $L \neq 0$).

Mais allons montrer une contradiction.

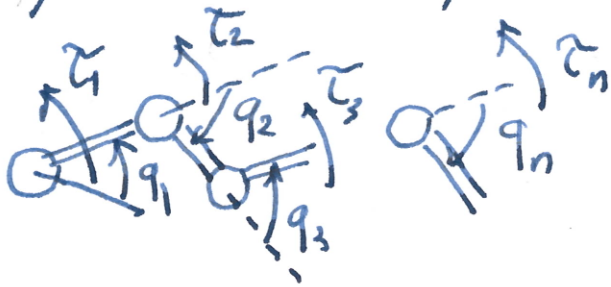
Soit $\gamma \triangleq \max_{x \in W} \dot{V}(x)$ (comme $\dot{V}(x) < 0$,

$$V(X(x_0, t)) < \gamma t + V(x_0)$$

Mais pour $\bar{t} \geq -\frac{V(x_0)}{\gamma}$, on doit avoir
 $V(X(x_0, \bar{t})) < 0$ ce qui contredit
 $V(X(x_0, t)) \geq L$.

5) Exemple du robot. semi pente de généralité (5)

prenons un robot planaire.



(couple, (moment, cle force)
 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$

(coordonnées: $q_1, q_2, \dots, q_n$

$M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice d'inertie de telle sorte que

$$T = E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad \text{avec} \quad \underline{\dot{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

Bilan de puissance:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \tau_i = \underline{\dot{q}}^T \underline{\tau} \quad \underline{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix}$$

Considérons des régulateurs PD découplés

$$\tau_i = -k_{p_i} q_i - k_{d_i} \dot{q}_i$$

afin de réguler autour
du point d'équilibre

$$q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$$

Prenons comme candidat de Lyapunov

$$V = T + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} k_{p_i} q_i^2 = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \frac{1}{2} K_p q^T V_p q$$

avec $K_p = \begin{bmatrix} k_{p_1} & & 0 \\ & k_{p_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & k_{p_n} \end{bmatrix}$ et $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$

On constate que V
est une fonction
continue de

$$x = [q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T \text{ et que } V(0) = 0.$$

C'est donc bien un candidat de Lyapunov.

Vérifions que $V(x)$ est une fonction de Lyapunov ⑥
 en utilisant le bilan de puissance $\frac{d}{dt}T = \sum_{i=1}^n \tau_i \dot{q}_i$

$$V = T + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_{pi} q_i^2$$

$$\tau_i = -k_{pi} q_i - k_{di} \dot{q}_i$$

$$\dot{V} = \dot{T} + \sum_{i=1}^n k_{pi} q_i \dot{q}_i$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^n \tau_i \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n k_{pi} q_i \dot{q}_i = \sum_{i=1}^n -k_{pi} q_i \dot{q}_i - k_{di} \dot{q}_i^2 + k_{pi} q_i \dot{q}_i \\ &= -\sum_{i=1}^n k_{di} \dot{q}_i^2 \leq 0. \quad \Rightarrow \text{stabilité} \end{aligned}$$

⚠ ceci ne garantissant pas le stab. asymptotique
 car $\dot{V} \leq 0$ et non $\dot{V} < 0$.

6. Systèmes linéaires et fonction de Lyapunov

$$\dot{x} = Ax \quad x \in \mathbb{R}^n \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

On se place dans le cadre de l'algèbre linéaire.
 Comme candidat de Lyapunov, on prend une ^{forme} fonction
 définie positive associée à une matrice définie positive
 $P > 0$

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2} x^T P x & - V(0) &= 0 \\ & & - V(x) &\text{continue} \\ & & - c \|V(x)\| > \|x\|, \forall x \neq 0 \text{ car } P > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \dot{x}^T P x + \frac{1}{2} x^T P \dot{x} = \frac{1}{2} (Ax)^T P x + \frac{1}{2} x^T P A x \\ &= \frac{1}{2} x^T (A^T P + P A) x \end{aligned}$$

Ainsi on peut poser

(7)

$$-Q = A^T P + P A \quad \text{et tester } Q > 0.$$

Thm: $\operatorname{Re}(\lambda_i(A)) < 0 \quad \forall i=1, \dots, n$

$$* \Leftrightarrow \forall Q > 0, \exists P \text{ tel que } A^T P + P A = -Q$$

Démonstration: $\Leftarrow$: stabilité asymptotique selon le thm non lin.

$$\Rightarrow: P \triangleq \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{A t} dt \quad (*)$$

introduisons Q dans $A^T P + P A$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (A^T e^{A^T t} Q e^{A t} + e^{A^T t} Q e^{A t} A) dt &= \\ \int_0^\infty \frac{d}{dt} (e^{A^T t} Q e^{A t}) dt &= \left[e^{A^T t} Q e^{A t} \right]_0^\infty \\ &= \underbrace{e^{A^T \infty} Q e^{A \infty}}_{=0 \text{ car } \lambda_i < 0} - e^{A^T 0} Q e^{A \cdot 0} = -Q. \end{aligned}$$

On a bien $A^T P + P A = -Q$

Ainsi pour chaque Q on peut calculer un P selon $(*)$

Il reste à vérifier que $P > 0$. Ceci provient du

fait que $e^{A t}$ est inversible et donc comme $Q > 0$

P est une somme de matrices > 0 et donc demeure définie positive.