

IV. Méthode du 1er harmonique: part II

①

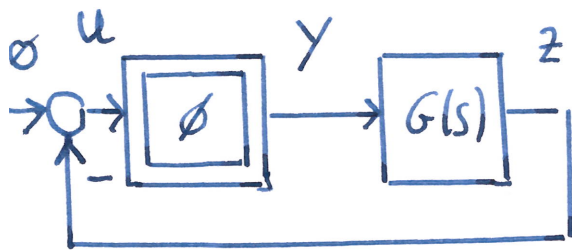
1er harmonique: - Stabilité: définitions

1. Système en rétroaction
2. Condition pour le cycle limite
3. Croisement et stabilité.
4. Fiabilité de la méthode du 1er harmonique

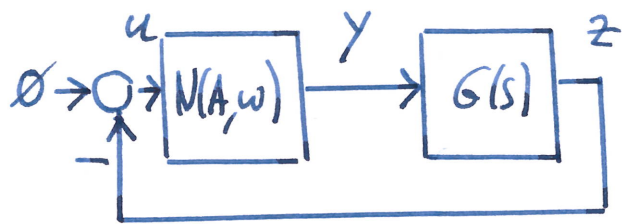
Stabilité:

- B. 1. point d'équilibre
2. Système linéaire
3. Définition intuitive
4. Définition formelle
5. Stabilité asymptotique et instabilité

1er harmonique A.1 Système en rétroaction.



Vrai système



approximation
gain équivalent remplacé la N.L.

2. Condition pour le cycle limite

2.1 Condition exacte:

Produit. de convolution:

$$z(t) = \int_0^t y(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

Non linéarité:

$$y(t) = \phi(u(t))$$

Bouclage B.F:

$$u(t) = -z(t)$$

Ceci conduit à une équation intégrale pour la détermination de $z(t)$ lors d'un cycle limite:

$$z(t) = \int_0^t \phi(-z(\tau)) g(t-\tau) d\tau$$

$\forall t, t \in [0, T]$ avec $z(T) = z(0)$.

2.2 Condition pour un cycle limite sous l'hypothèse de l'approximation du 1er harmonique (2)

Transformée de Laplace: $Z(s) = G(s) Y(s)$

Gain équivalent $Y(s) = N(A, \omega) U(s)$

Bouclage B.F $U(s) = -Z(s)$

Lorsque uniquement le régime harmonique nous intéresse: $s = j\omega$

(ceci conduit à une relation linéaire dans le domaine de Laplace, où A et ω sont des variables

$$Z(s) = G(s) N(A, \omega) (-Z(s))$$

en factorisant $Z(s)$:

$$Z(s) (1 + G(s) \cdot N(A, \omega)) = 0$$

Lors de {l'existence / présence} d'un cycle limite, $Z(s) \neq 0$

et pour que la condition (*) puisse être satisfaite il est nécessaire que

$$1 + G(s) N(A, \omega) = 0$$

C'est la condition au 1er harmonique de l'existence d'un cycle limite.

Lorsque uniquement le régime harmonique est d'intérêt

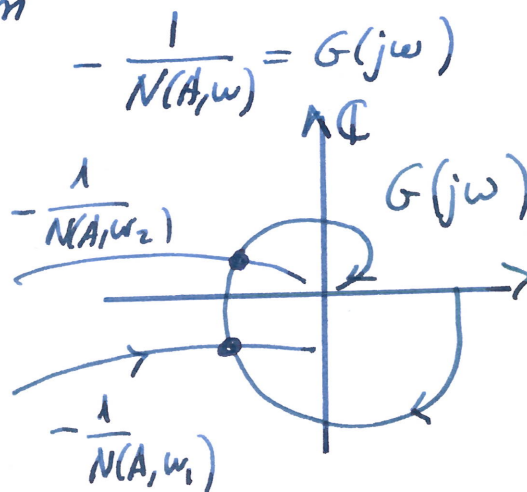
$$1 + G(j\omega) N(A, \omega) = 0 \quad \underline{s = j\omega}$$

qui peut se mettre également sous la forme

$$G(j\omega) = - \frac{1}{N(A, \omega)}$$

(3)

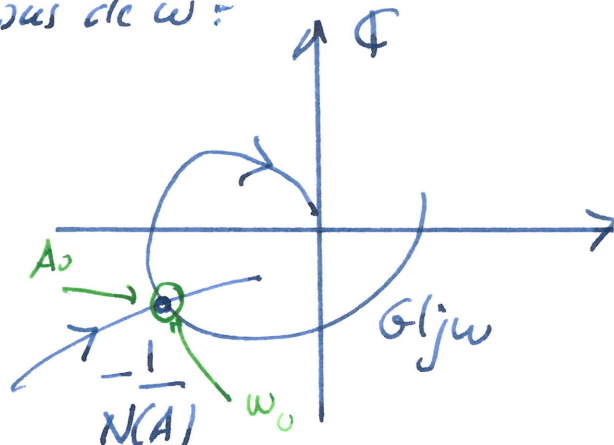
On peut représenter la condition dans un diagramme de Nyquist il s'agit de l'intersection de deux courbes. Une paramétrée par A : $-\frac{1}{N(A, \omega)}$ (pour un ω donné) et une autre est la réponse harmonique $G(j\omega)$.



L'intersection donne deux renseignements : A_0 et ω_0 .
Lorsque N ne dépend pas de ω :

A paramétrée $-\frac{1}{N(A)}$

ω paramétrée $G(j\omega)$

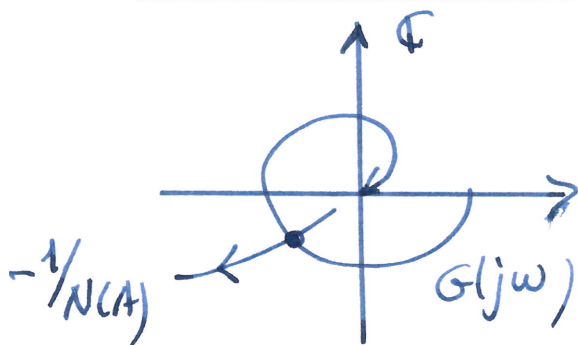


A l'intersection des deux courbes

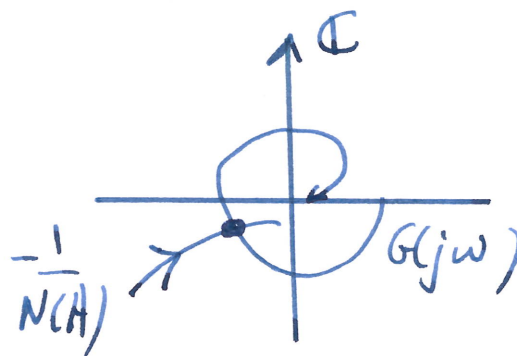
$$A = A_0$$

$$\omega = \omega_0$$

A_0 et ω_0 sont les prévisions du cycle limite.



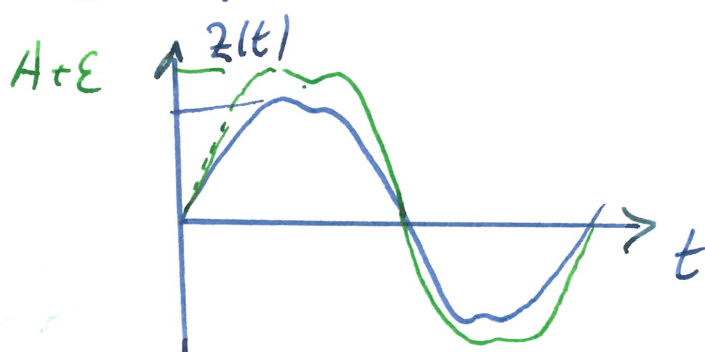
STABLE



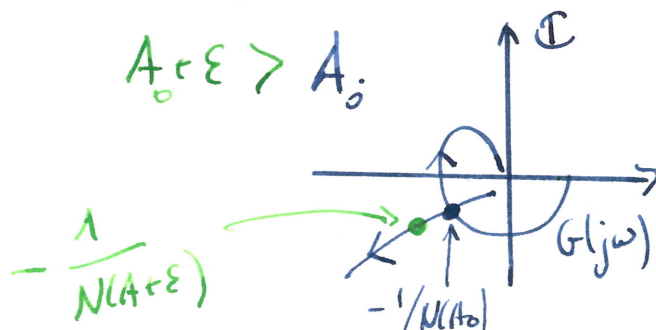
INSTABLE

Dans le cas STABLE, imaginons de perturber l'amplitude en l'augmentant

comme $u = -z$
on perturbe $A_0 = A_0 + \epsilon$

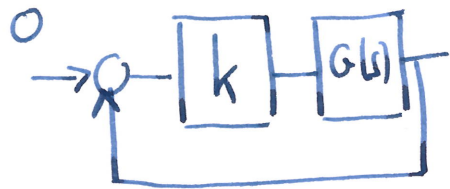


$$A_0 + \epsilon > A_0$$

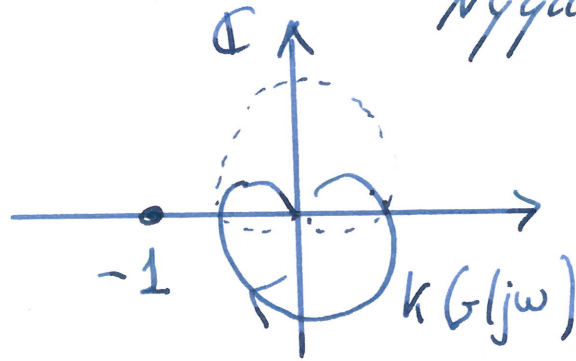


Système linéaire et limite de stabilité

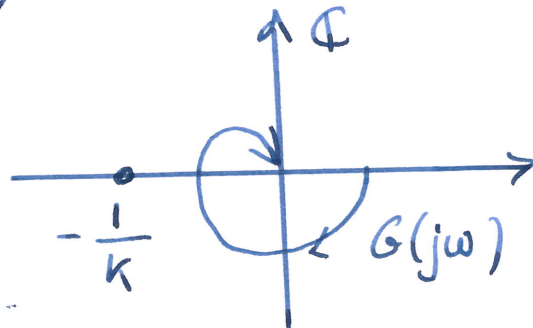
(4)
Critère de Nyquist simplifié.



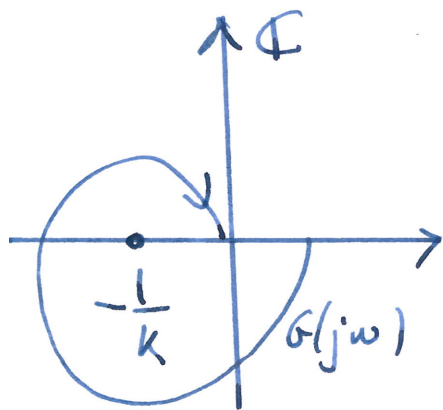
k est un gain fixe
 $\in \mathbb{R}$.



Pour autant que -1 ne soit pas encerclé par $k G(jw)$ le bouclage est stable. On peut effectuer une homothétie de $\frac{1}{k}$ sans affecter la conclusion.

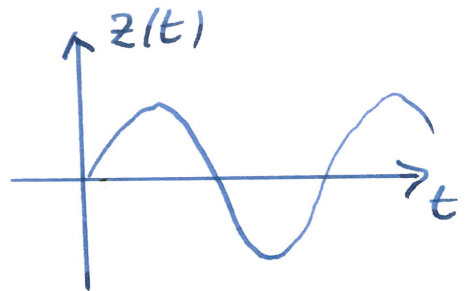
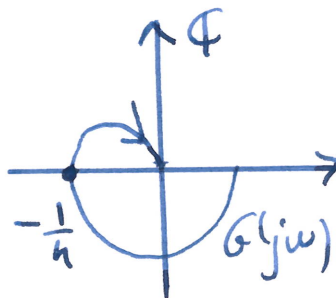


STABLE



INSTABLE

lorsque $-1/k$ et $G(jw)$ se croisent on est à la limite entre stabilité et instabilité
 $\Rightarrow$ cycle limite



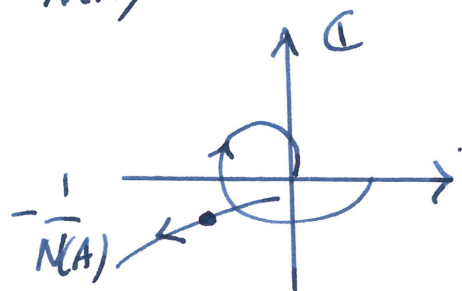
$-\frac{1}{N(A)}$ peut être interprété comme $-\frac{1}{k}$ avec comme particularité que k s'adapte en fonction de l'amplitude A .

Autrement dit, si A augmente, on se déplace sur $-\frac{1}{N(A)}$ dans la direction de la flèche associée à $-\frac{1}{N(A)}$.

(5)

Ainsi lorsque A passe de $A+\epsilon$ le point

$-\frac{1}{N(A)}$ le décale : cas STABLE



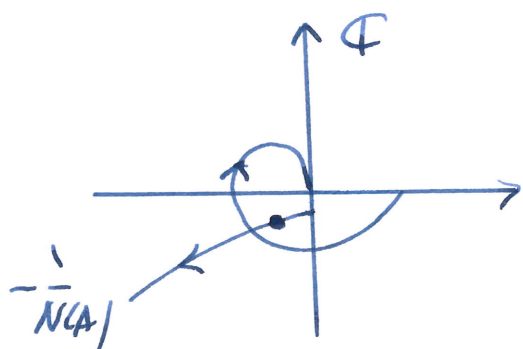
En considérant le nouveau point

$-\frac{1}{N(A+\epsilon)}$ comme un point $-\frac{1}{k}$

pour le critère de Nyquist $G(j\omega)$

ne l'entoure pas $\Rightarrow$ STABILITE: $A+\epsilon$ diminue

lorsque A passe de $A-\epsilon$ le point $-\frac{1}{N(A)}$ se décale dans l'autre sens: cas STABLE



En considérant le nouveau point

$-\frac{1}{N(A-\epsilon)}$ comme un point $-\frac{1}{k}$

pour le crit. de Nyquist, $G(j\omega)$

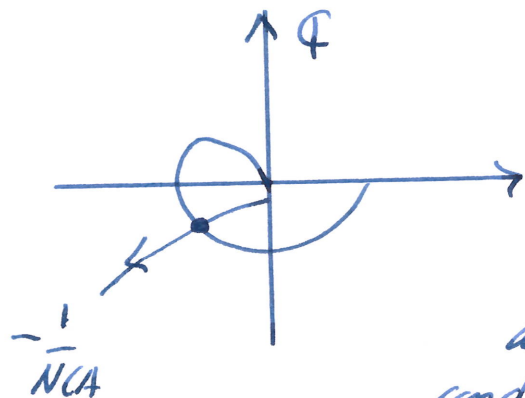
entoure ce point $\Rightarrow$ INSTABILITE
 $A-\epsilon$ augmente

ainsi dans le cas STABLE

un cycle limite d'Amplitude

A_0 et de pulsation ω_0

solutions de $-\frac{1}{N(A_0)} = G(j\omega_0)$



se maintiendra, car suite aux perturbations $A_0+\epsilon$ ou $A_0-\epsilon$, cela conduira à un effet attracteur vers A_0 .

dans le cas INSTABLE

, la solution A_0 et ω_0

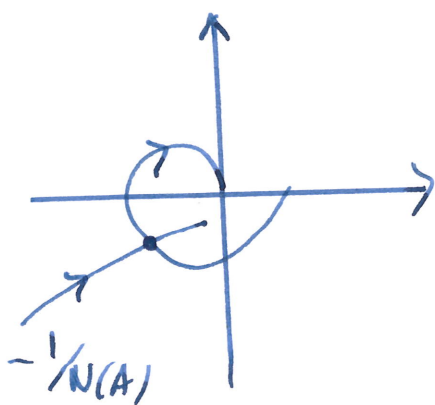
de $-\frac{1}{N(A_0)} = G(j\omega_0)$

ne se maintiendra pas,

car suite aux perturbations

$A_0+\epsilon$ ou $A_0-\epsilon$, le crit. de Nyquist

indiquera une tendance à l'accentuation de la perturbation.



Stabilité

(6)

1. Point d'équilibre

$x \in \mathbb{R}^n$ $\dot{x} = f(x)$ est un syst. dyn. n.l. sans entrée

$$f(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Défnition: Pt d'équilibre
est la solution $\bar{x}$ de $0 = f(\bar{x})$
 $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

2. Système linéaire

$$\dot{x} = Ax$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

si A de rang plein, i.e. $|A| \neq 0$
alors un seul pt d'équilibre
isolé $\bar{x} = 0$.

Si $|A| = 0$, les points d'équilibre
remplissent un espace vectoriel
 $\{x \mid Ax = 0\}$ de dimension $n - \text{rg}(A)$.

Stabilité de

$$\dot{x} = Ax$$

Si $\lambda_i(A)$ sont tels que

$$\text{Re}(\lambda_i(A)) < 0$$

$\Rightarrow$ stabilité et stabilité asymptotique

Si $\text{Re}(\lambda_i(A)) = 0$, partie réelle nulle alors la
multiplicité joue un rôle

si $\lambda_i(A) = 0$ et multiplicité 1, dans le bloc
de Jordan associé $\Rightarrow$ stabilité
mais pas asymptotique.

multiplicité ≥ 2 $\Rightarrow$ instable.

Si $\lambda_i(A) \neq 0$, mais $\text{Re}(\lambda_i(A)) = 0$ et multiplicité 1.
 $\Rightarrow$ stable mais pas asympt.
stable.

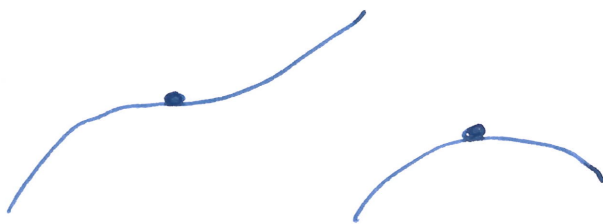
3. Définition intuitive

(7)

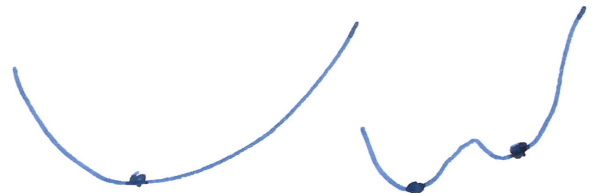
$\dot{x} = f(x)$ "Un point d'équilibre est stable lorsque les trajectoires peuvent être confinées pour toute condition initiale suffisamment proche du point d'équilibre."

Il faut rendre cette définition rigoureuse.

Equilibres instables



Equilibres stables



Soit donc

$\bar{x}$ le point d'équilibre

L. Définition formelle
(Stabilité selon Lyapunov)

$$B_r = \{x \mid \|x\| \leq r\}$$

$$f(\bar{x}) = 0$$

$$\forall R, \exists r, \forall x_0 \in B_r \Rightarrow \forall t, \chi(x_0, t) \in B_R$$

Autre écriture

Définition Stabilité selon Lyapunov

$$\forall R, \exists r, \forall x_0, \|x_0\| < r \Rightarrow \|\chi(x_0, t)\| < R$$

R : représente la tentative de confiner les trajectoires

r : le second joueur ^B essaie de déterminer cette quantité afin de satisfaire les exigences du joueur A.

(joueur A)
constructif

Il faut qu'il s'avère que cela fonctionne pour toutes les conditions initiales!

⚠ Choisir R petit est souvent plus difficile que R grand!

5. Stabilité asymptotique

(8)

Déf. Stabilité + asympt. $\exists r_0, \forall x_0, \|x_0\| < r_0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \chi(x_0, t) = 0.$

instabilité: $\exists R, \forall t, \forall r, \exists x_0, \|x_0\| < r$ (x_0 dépend de cho ex r)
 $\exists t, \chi(x_0, t) > R$
