

1. Objectifs.
2. type de système.
3. BO et excitation sinusoïdale.
4. Série de Fourier et équivalent du 1^{er} harmonique.
5. Calcul pour une saturation du gain équivalent. Plan Nyquist

part.I : BO, boucle ouverte
part.II : BF, boucle fermée

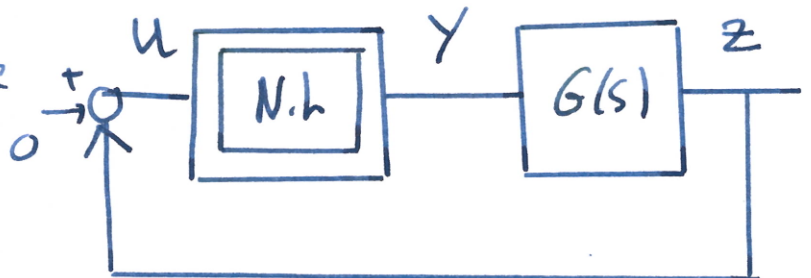
1. Objectifs

Bien des systèmes mécaniques, électriques, etc. ont une caractéristique non linéaire forte et de nature statique par rapport à la dynamique qui est bien modélisée par une fct. de transfert. La cascade en boucle fermée d'un tel système

peut présenter des cycles limites, unique ou non, voulus ou non. Il s'agit dans le chapitre de déterminer des heuristiques permettant de prévoir et calculer les paramètres du / des cycle(s) limite(s). L'analyse n'est pas limitée au syst. du 2^{ème} ordre. OBJECTIF Déterminer l'Amplitude (A) et la pulsation (ω) du cycle limite.

2. type de systèmes

1. Non linéarité statique

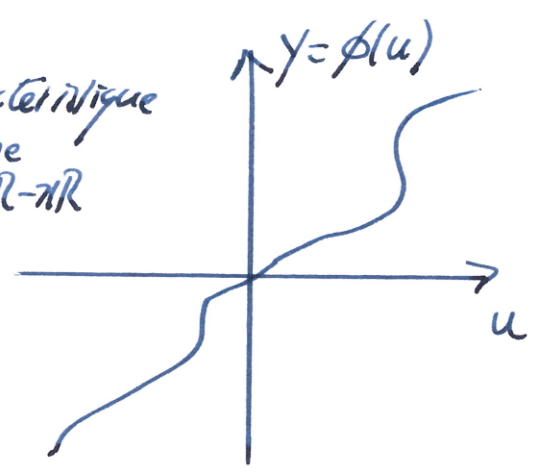
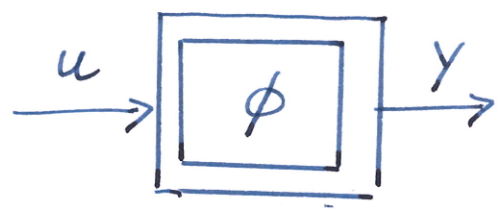


2. Fonction de transfert

⚠ Notation mixte $u(t)$, $y(t)$, $z(t)$ et fct. de transf. $G(s)$.

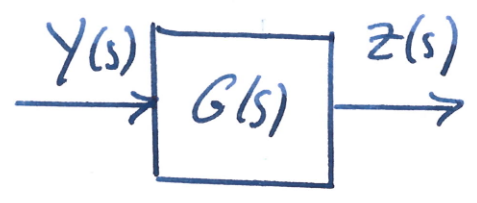
2.1 Nonlinéarité statique

Caractéristique est une fonction $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



2.2 Fonction de transfert

• ordre arbitraire.

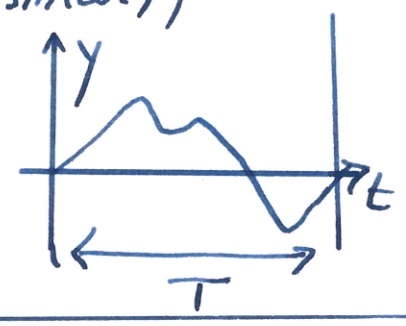
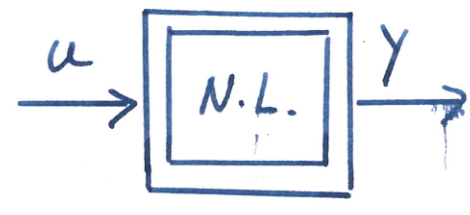
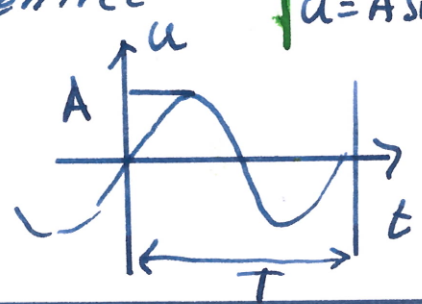


- $G(s)$ est passe-bas si (possible).
- La prédiction des heuristiques est d'autant meilleure que le caractère passe-bas est accentué.

⚠ Notation: entrée $Y(s)$
sortie $Z(s)$

3. Boucle ouverte et excitation sinusoïdale.

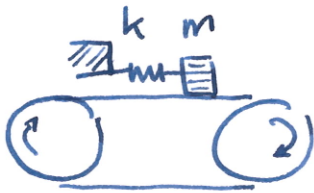
On cherche à caractériser la N.L. à un sinu en entrée
 $u = A \sin(\omega t)$ $y = \phi(A \sin(\omega t))$



Remarque: • Comme la non-linéarité (N.L.) est statique $y(t)$ est de même période que l'excitation sinusoïdale $T = \frac{2\pi}{\omega}$

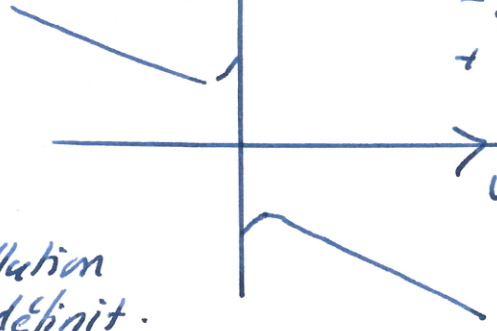
- $y(t)$ peut contenir beaucoup d'harmoniques.

Exemples: Frottement



La masse entre en oscillation sur un cycle limite bien défini.

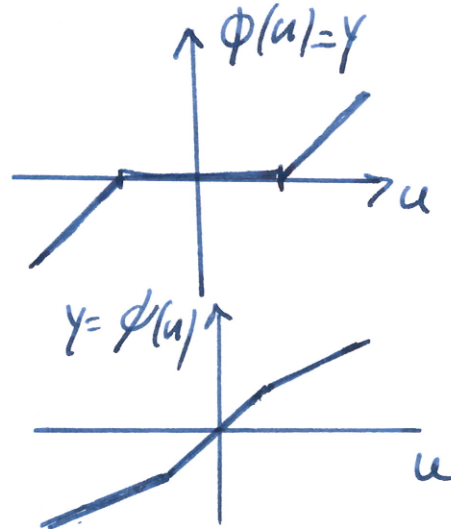
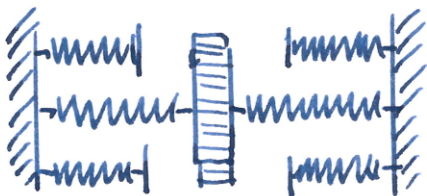
$$y = \phi(u)$$



Frottement:
- sec + visqueux
+ effet Strickbeck.

↑ vitesse relative tapis-masse.

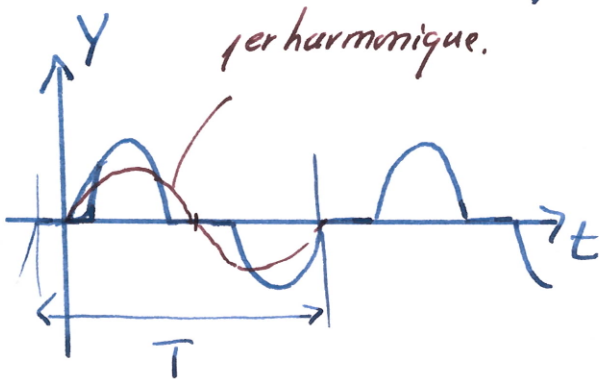
Mécanismes



Exemples:

- Valve hydraulique
- engrenages
- jeu etc.

4. Série de Fourier et équivalent du 1er harmonique



$y(t)$ se décompose en harmonique par la série de Fourier car $y(t)$ est périodique de période T .

$$y(t) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \cos(l\omega t) + b_l \sin(l\omega t) + \frac{a_0}{2}$$

Les coefficients de la série de Fourier peuvent s'exprimer sous la forme (représentation angulaire)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(\tau) d(\omega\tau)$$

$$a_l = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(\tau) \cos(l\omega\tau) d(\omega\tau)$$

$$b_l = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(\tau) \sin(l\omega\tau) d(\omega\tau)$$

Calcul du 1^{er} harmonique

(4)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(\tau) d(\omega\tau)$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(\tau) \cos(\omega\tau) d(\omega\tau)$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(\tau) \sin(\omega\tau) d(\omega\tau)$$

I dée: • Remplacer la non linéarité par un gain équivalent $N(A, \omega)$
• $N(A, \omega)$ est obtenu à partir de a_0, a_1, b_1 .
• Pour les non linéarités symétriques la composante continue $a_0 = 0$

Avantage: $N(A, \omega)$ est un nombre complexe tout comme la fonction de transfert $G(s)$. On pourra utiliser une représentation dans le diagramme de Nyquist.



$$N(A, \omega) \in \mathbb{C} \quad \forall A, \omega.$$

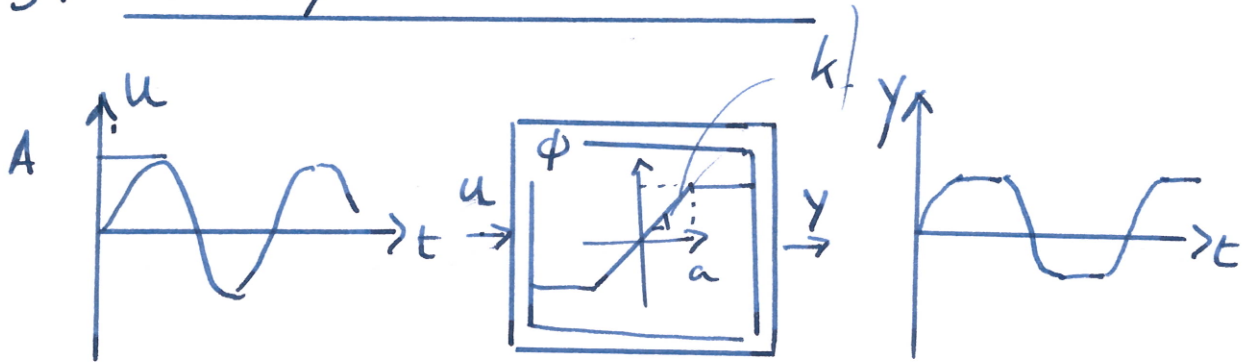
Définition de $N(A, \omega)$ (obtention de $N(A)$)

$$y(t) \approx a_0 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) = a_0 + M \sin(\omega t + \alpha)$$
$$M = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad \alpha = \arctan(a_1/b_1)$$

$$N(A, \omega) \triangleq M \cdot \frac{e^{j\omega t + \alpha}}{A e^{j\omega t}} = \frac{M}{A} e^{j\alpha} = \frac{1}{A} (b_1 + ja_1)$$

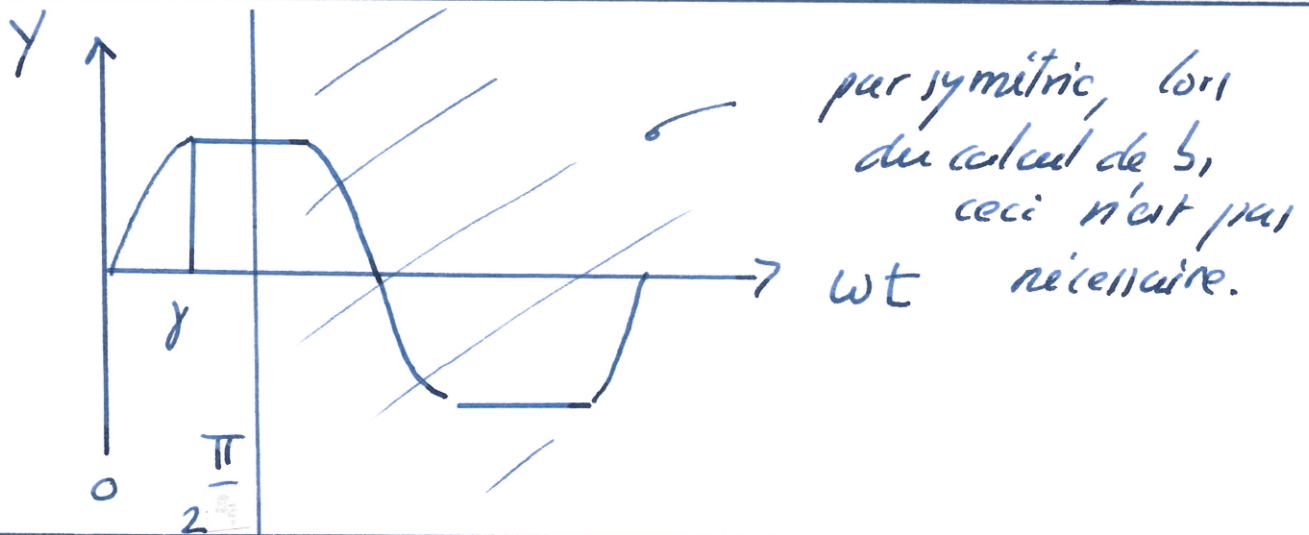
5. Calcul pour une saturation

(5)



$$\phi(u) = \begin{cases} ka & , u > a \\ ku & , -a \leq u \leq a \\ -ka & , u < -a \end{cases} \quad \text{saturation}$$

- La saturation est symétrique: pas de composante continue $a_0 = 0$.
- On peut tenir compte de zéro déphasage: $a_1 = 0$
- Pour b_1 , il y a une symétrie: 0 à $\frac{\pi}{2}$ pour ωt



$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} y(t) \sin(\omega t) d(\omega t).$$

On décompose $\int_0^{\pi/2}$ en deux $\int_0^{\gamma} + \int_{\gamma}^{\pi/2}$

sur l'aplage $t \in [0, \gamma]$ $y(t) = k \cdot A \sin(\omega t)$

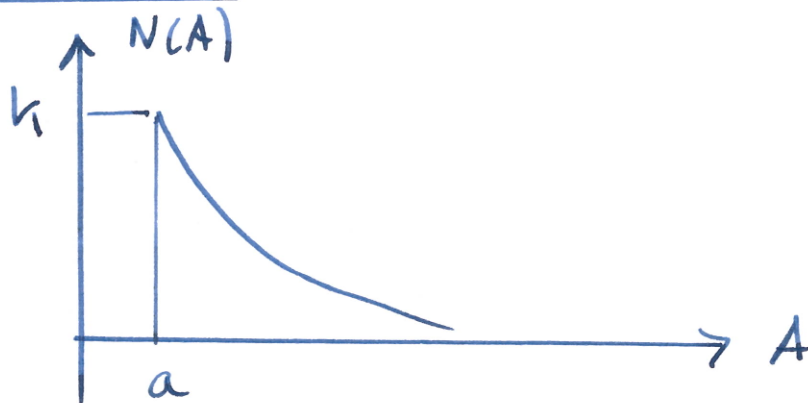
pour $t \in [\gamma, \pi/2]$ $y(t) = k \cdot a$

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\arcsin(\frac{a}{A})} k A \sin(\omega t) \sin(\omega t) d(\omega t) \\
 &+ \frac{4}{\pi} \int_{\arcsin(\frac{a}{A})}^{\pi/2} k a \sin(\omega t) d(\omega t) \\
 &= 4 \cdot \frac{kA}{2\pi} \left[\gamma + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right] \quad (A > a)
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

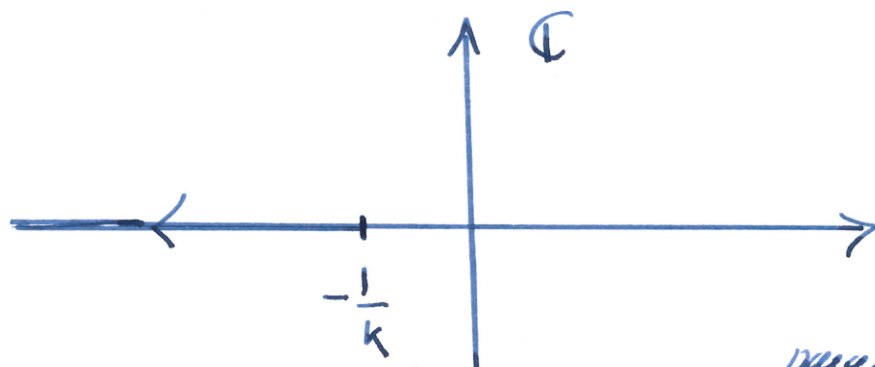
Gain équivalent:

$$N(A) = \frac{1}{A} (b_1 + j a_1) = \frac{b_1}{A} = \begin{cases} k & A \leq a \\ \frac{2k}{\pi} \left[\gamma + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right] & A > a \end{cases}$$

Graphique de $N(A)$



Représentation dans le plan de Nyquist On représente



$-\frac{1}{N(A)}$

qui décrit
un lieu géométrique
paramétré par A