

2. Plan de phase

(1)

1. Plan de phase
2. Système du 2^{ème} ordre linéaire et non linéaire.
3. Plan de retour.
4. Graphes des pentes
5. Cycle limite
6. Thm. de l'index
7. Thm. Bendixson.

1 Plan de phase

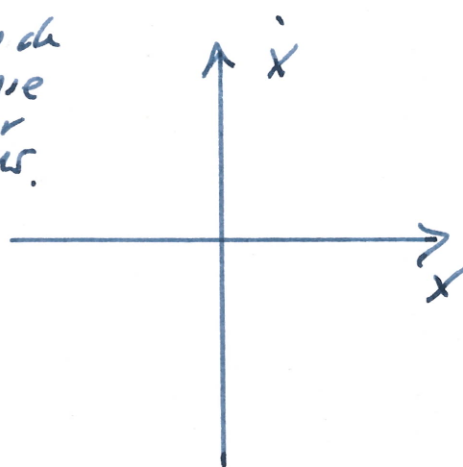
En mécanique, conditions initiales position + vitesse.
ou (Hamilton) position et moment généralisé
 x $p = m\dot{x}$

Une représentation en position et quant. de mouvement est appelée une représentation en variables de phase et position. Lorsqu'on a 1 seul degré de liberté, on peut représenter les trajectoires dans un plan.

$$p \triangleq \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

plan de phase pour un système mécanique sous la forme Hamiltonienne.
 $H = T + U$
en remplaçant $\dot{x}$ par p

Plan de phase pour nous.



2. Système du 2^{ème} ordre linéaire.

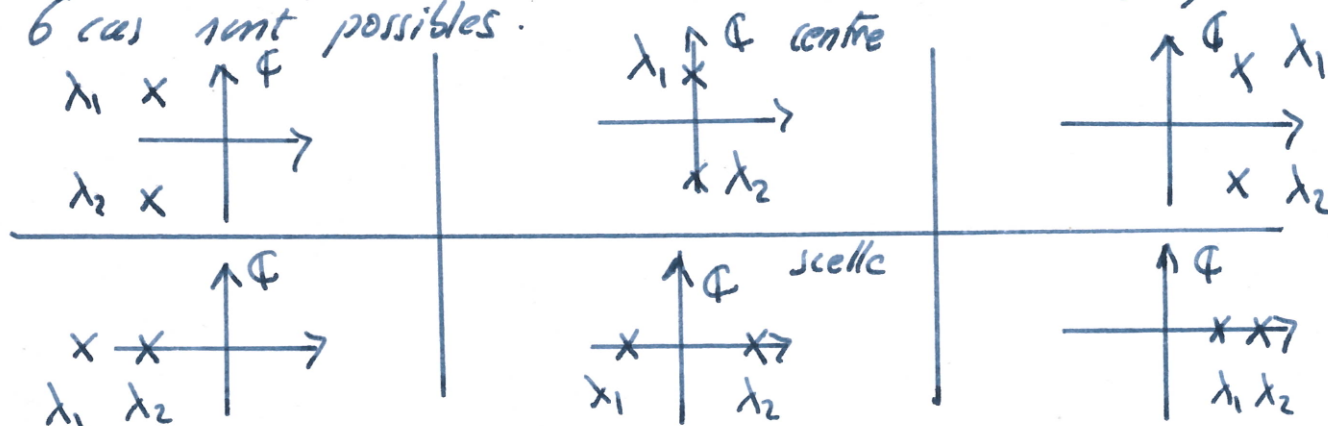
Si le système est du deuxième ordre et linéaire, on peut distinguer les valeurs propres de la représentation.

Autrement dit, $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$

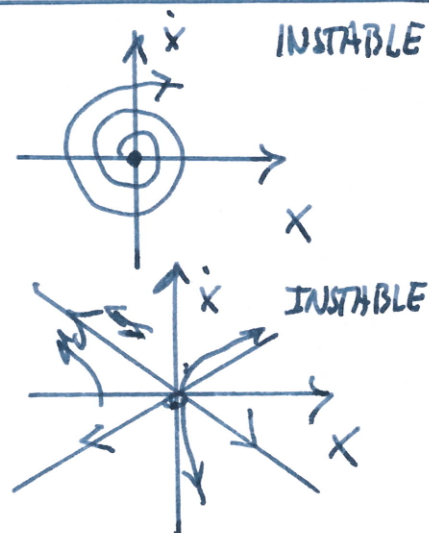
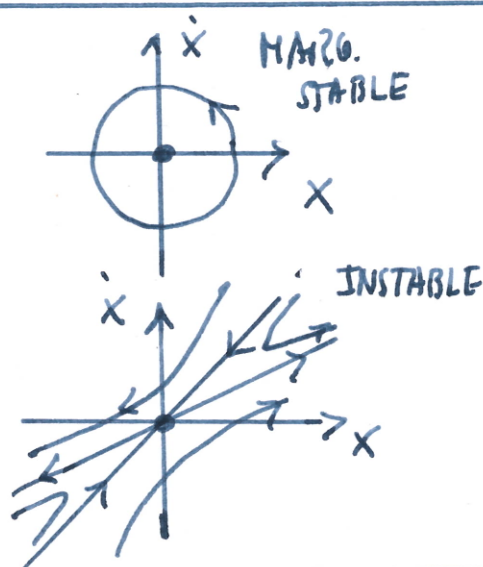
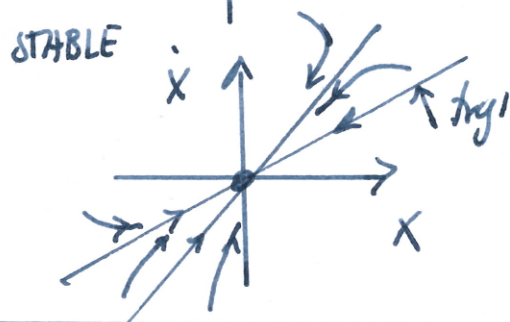
$$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} x$$

Classification par les valeurs propres de A : $\lambda_i(A)$ (2)

6 cas sont possibles.



Trajectoires dans le plan de phase



- Lorsque $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, il existe deux droites qui se confondent avec les trajectoires. Il y a des droites qui supportent les vecteurs propres associés aux valeurs propres.

- Il y a un seul point d'équilibre unique si A est plein rang. Il y a une infinité sinon.

2ème ordre non linéaire général

$$\dot{x} = f(x) \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

- Plusieurs points d'équilibre sont possibles.

3. Masse-ressort.

Hamilton

$$H = T + U$$

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} k q^2$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad U = \frac{1}{2} k x^2 \quad (3)$$

$$p := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

Equations d'Hamilton:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

Equation du ressort selon la méthode d'Hamilton.

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{1}{m} p \\ \dot{p} = -kq. \end{cases}$$

Lagrange: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q} \quad \frac{\partial L}{\partial q} = -kq$$

$$\boxed{m \ddot{q} + kq = 0}$$

Equations selon Lagrange.

Remarque: - La méthode d'Hamilton donne directement la représentation du plan de phase

- Pour Lagrange, on doit choisir les états, par exemple

$$x_1 = q$$

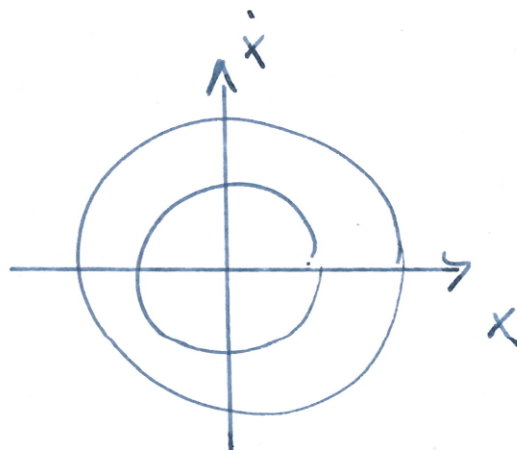
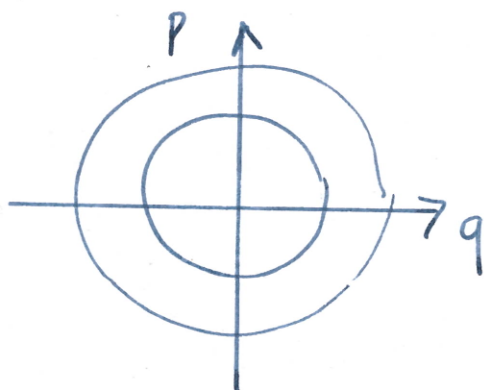
$$x_2 = \dot{q}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m} x_1 \end{cases}$$

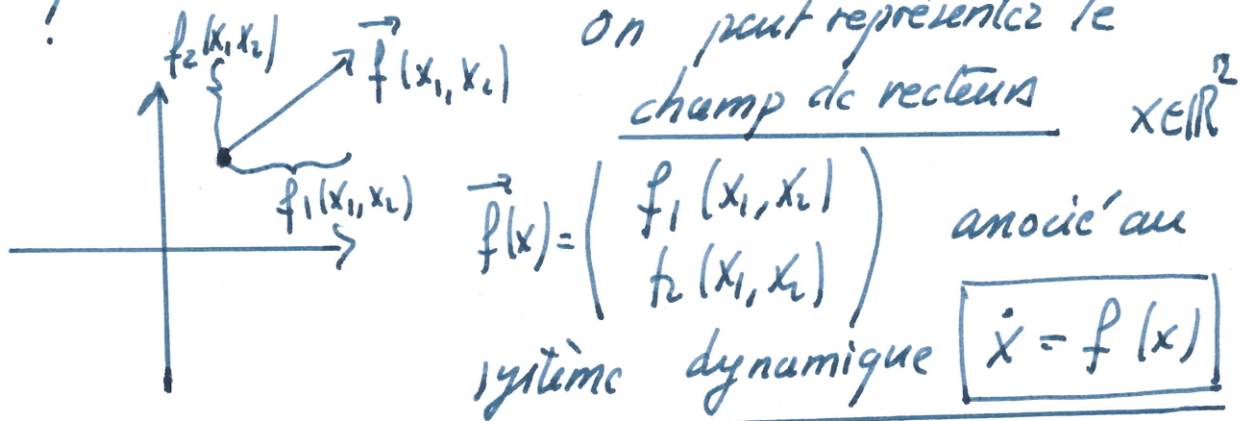
au lieu de

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{1}{m} p \\ \dot{p} = -kq \end{cases}$$

Concrètement $k=m=1$

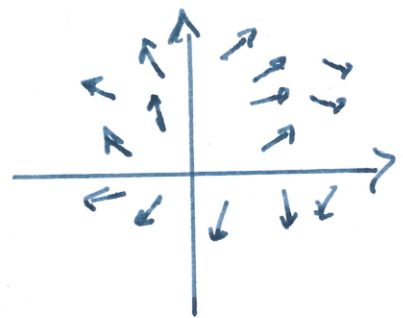


Que se passe-t-il si on n'a pas un système mécanique ? (4)



- Chaque point (x_1, x_2) a un vecteur attaché $f(x_1, x_2)$.
- on peut utiliser un ordinateur pour donner $\hat{f}(x_1, x_2)$

$$\hat{f}(x) = \frac{\vec{f}}{\|\vec{f}\|} = \frac{1}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$



Remarque: Si l'unité est choisie petite, cela ressemble alors à de la limaille de Fer qui épouse une sorte de champ magnétique. On obtient une bonne représentation de la dynamique sans intégrer l'équa. diff. !

Intégration: Élimination du temps pour obtenir les trajectoires dans le plan de phase

malle-ressort

avant intégration:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

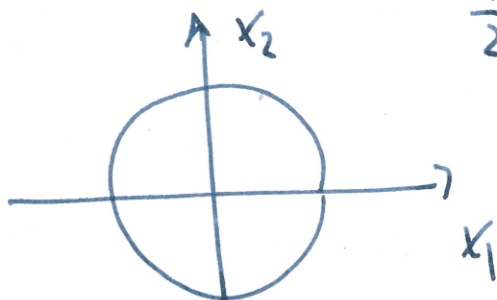
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1$$

(5)

$$\frac{dx_1}{x_2} = - \frac{dx_2}{x_1}$$

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 = 0$$

$$\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + C = 0.$$



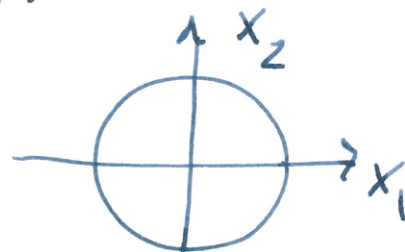
Solution classique $x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{m}} = 1$$

$$x(t) = A \cos(t) + B \sin(t).$$

$$\dot{x} = -A \sin t + B \cos t.$$

$$x^2 + \dot{x}^2 = A^2 + B^2.$$



La paramétrisation par le temps est perdue dans le plan de phase

• Méthode des isoclines.

on choisit une pente α

et on cherche le lieu des points x_1, x_2

avec $\alpha = \arctan \frac{f_2}{f_1}$.



$$\frac{dx_2}{dx_1} = cte = \frac{f_2}{f_1}$$

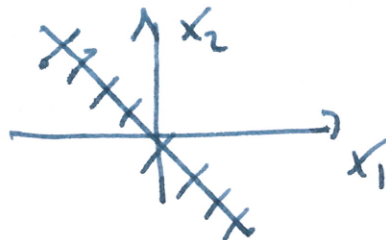
$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 = f_2$$

$$cte = - \frac{x_2}{x_1}$$

donc $cte = +1$

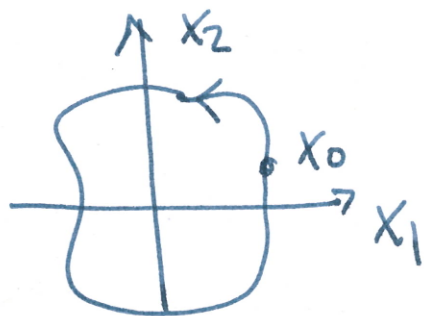
$$\underline{x_2 = -x_1}$$



5. Cycle limite

(6)

Définition $\left\{ \begin{array}{l} \exists T \text{ et } x_0 \text{ tel que} \\ X(x_0, T) = x_0 \text{ et } X(x_0, t) \neq x_0 \\ \text{pour } t \neq hT \end{array} \right.$



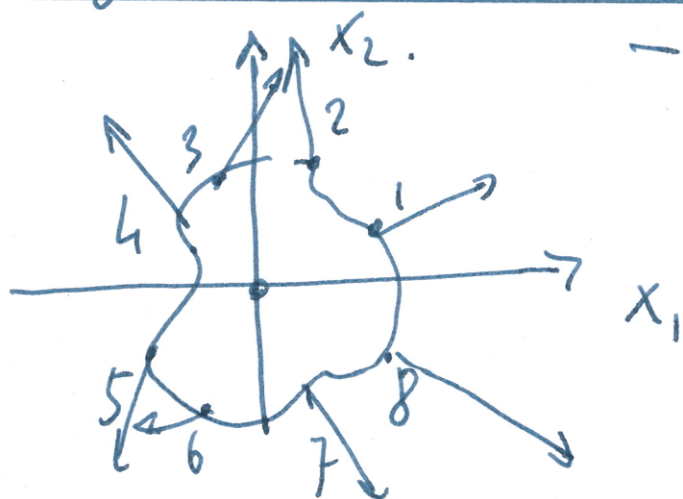
Maneuvre : il existe

une infinité de cycles limites.

En non-linéaire, existe-t-il des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour l'existence de cycles limites ?

6. Index d'un point d'équilibre d'un cycle limite.

- On choisit une courbe arbitraire qui ne contient aucun point d'équilibre.
- on choisit un certain nombre de points arbitraires le long du choix arbitraire de la courbe.

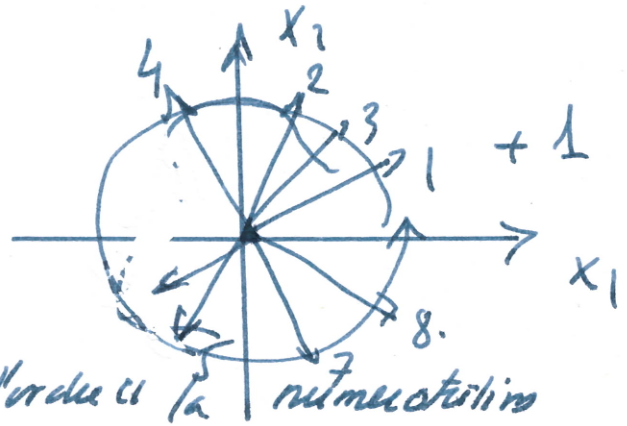


- On évalue les champs de vecteurs aux points choisis.

Index d'un point d'équilibre (suite)



On reporte les champs de vecteurs d'un nouveau plan en joignant les origines des vecteurs à l'origine du plan et en conservant l'ordre et la numérotation

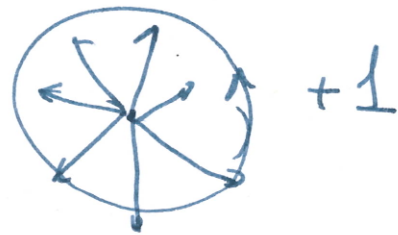
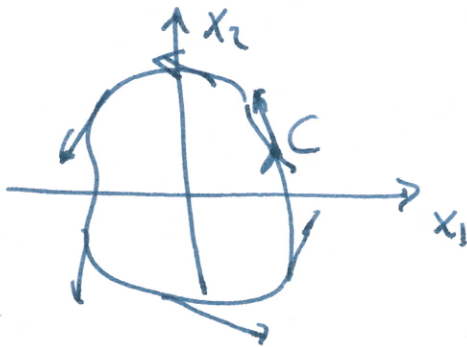


et on récupère, calcul

$$\text{index} = \frac{\text{angle}}{2\pi} \text{ modulo } 2\pi$$

nombre de tours autour de 0.

Index d'un cycle limite



Index = +1 pour le cycle limite.

Pour les systèmes linéaires 2ème ordre

seul le point selle a un index -1

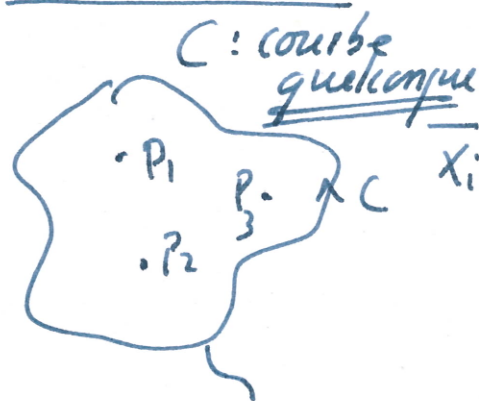
+1 +1 +1

+1 (-1) +1

L'index est indep. de la stabilité!

Thm de l'index

(8)



$$\text{index } C = \sum \text{index } P_i \bar{x}_i$$

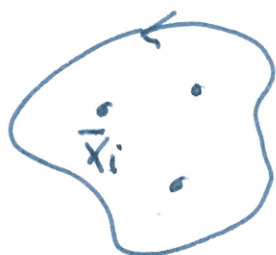
$x_i = P_i$: points d'équilibres

$$f(\bar{x}_i) = 0$$

Applications:

$$N = S + 1$$

Soit C un cycle limite,



$$\text{index } C = +1 = \sum \text{index } \bar{x}_i$$

Soit N : nombre de points index $+1$

S : " " " " index -1

Théorème de Poincaré-Bendixson.

Système planaire
(dans le plan de phase)

$X(x_0, t) \in \Omega, \forall t$
un ensemble compact.

Thm

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^2$$

alors $\lim_{t \rightarrow \infty} X(x_0, t) \rightarrow \bar{x}_i$

ou $\lim_{t \rightarrow \infty} X(x_0, t) \rightarrow C$, C un cycle limite.

Théorème de Bendixson.

Aucun cycle limite ne peut exister dans une région Ω compacte du plan de phase dans laquelle

$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ ne s'annule pas ni ne change de signe.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \neq 0 \quad \gtrless 0 \quad \Rightarrow \quad \text{pas de cycle limite}$$

$$A \Rightarrow B$$

Démonstration du théorème de Bendixson. (conséquence du thm de la direction). ⑨
 soit $\dot{x} = f(x)$ $(\overline{B} \not\Rightarrow A)$ compliquée.
 Preuve par contradiction. thm. Stokes.

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2$$

Supposons donc $C \in \Omega$, un cycle limite



le long de C on a

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1 \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2$$

et donc $\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = dt$, c-à-d. $f_2 dx_1 - f_1 dx_2 = 0$

on peut donc ajouter 0 le long de C , sous la forme

$$\oint_C f_2 dx_1 - f_1 dx_2 = 0, \text{ on applique Stokes}$$

$$\boxed{\oint \alpha = \iint d\alpha.}$$

d est la différentielle extérieure.

$$\oint_C f_2 dx_1 - f_1 dx_2 = \iint_{\text{int} C} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge dx_1 - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge dx_2 = 0$$

$$dx_1 \wedge dx_2 = -dx_2 \wedge dx_1$$

$$= \iint_{\text{int} C} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 = 0$$

$$= \iint_{\text{int} C} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right) dx_1 \wedge dx_2 = 0.$$

$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ doit donc changer de signe