

Cours commande non linéaire

I. Introduction ①

1. Intro et particularités
2. Plan de phase
3. Méthode du 1^{er} harmonique
4. Lyapunov I / II, III
5. Passivité
6. Critère du cercle
7. Linéarisation par feedback.
 - Prendre le livre
 - Prendre le pendule chaotique

I. Intro et particularités

0. Etat, entrée, Définition équilibre. Rappel

1. 1^{er} état, stabilité et point d'équilibre
2. Explosion en temps fini
3. Réponse indicielle désymétrique.
4. Réponse multiharmonique à une excitation sinusoïdale.
5. Trajectoires chaotiques

0. Rappel et définition

Système linéaire: Fonction de transfert continue

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$G(s) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt$$

Transf. de Laplace

discrét:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k}$$

→ Principe de superposition:

$$\text{Si } u_1(t) \rightarrow y_1(t)$$

$$u_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

alors

$$u_1(t) + u_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

$$\forall u_1(t) \text{ et } u_2(t).$$

De là on déduit que le système entrée sortie est entièrement décrit par $g(t)$!

Autre représentations du système linéaires (2)

Représentation d'état: Dans ce cas $\dim u = \dim y = 1$.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \begin{matrix} A \in \mathbb{R}^{n \times n} & B \in \mathbb{R}^{n \times 1} \\ C \in \mathbb{R}^{1 \times n} & D \in \mathbb{R} \end{matrix} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

x est l'état: Ensemble des conditions qui spécifient entièrement le comportement futur quel que soit u .

(Système non linéaire) Stabilité des systèmes linéaires

Déf BIBO: entrée bornée, sortie bornée.

Fct de transfert: les pôles, racines de $A(s)$

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

$\in \mathbb{C}^-$.

⚠ En représentation d'état, c'est insuffisant à cause des modes non observables!

→ on aura recours à une définition qui utilise la condition initiale x_0 et les trajectoires du système. Elle sera également valable dans le cas non linéaire.

Dans la représentation d'état, on peut envisager une dynamique sans entrée

$\dot{x} = Ax$ et on détermine la stabilité par la position des valeurs propres

$\operatorname{Re}(\lambda(A)) \leq 0$ stable.

$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ si pas de simplification pôle zéro. $\equiv$ BIBO stabilité.

1. 1 état

(3)

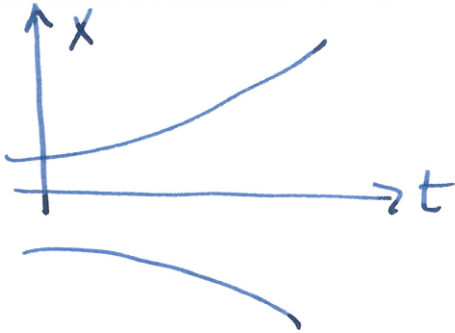
Exemple de systèmes linéaires à 1 état:

$$\dot{x} = +x \quad \text{et}$$

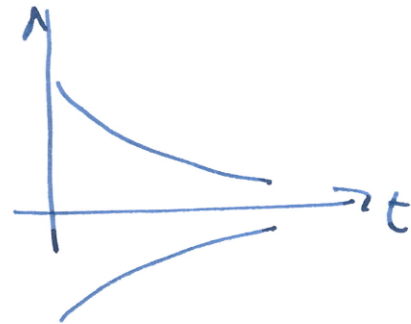
$$\dot{x} = -x$$

$$x(t) = x_0 e^{+t}$$

$$x(t) = x_0 e^{-t}$$



instable
valeur propre: $\lambda = +1$



stable
valeur propre: $\lambda = -1$

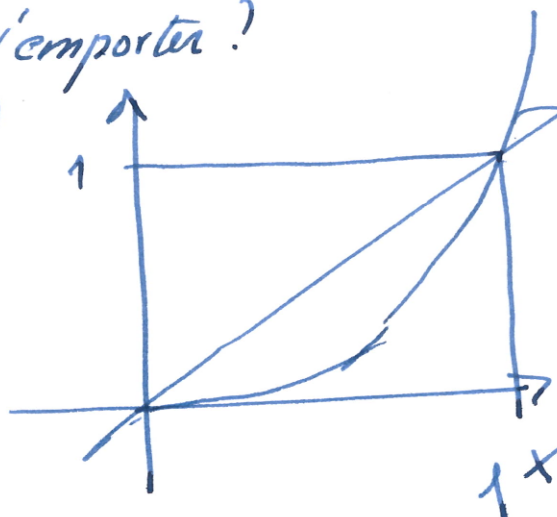
Plus difficile: système non linéaire:

$$\dot{x} = -x + x^2$$

On constate la présence du signe - devant le terme $-x$
et du signe + devant le terme $+x^2$

Qui va l'emporter?

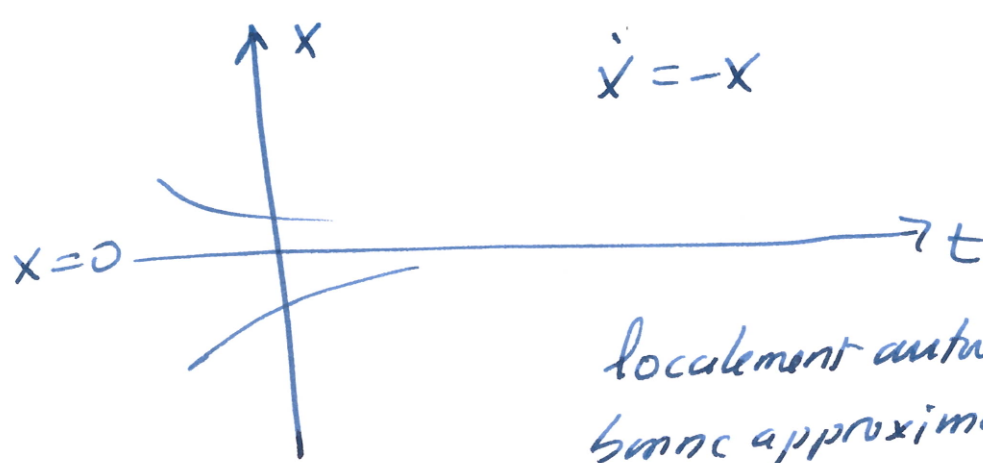
$f(x)$



$$f(x) = +x$$

$$f(x) = +x^2$$

pour $x > 1$
 $x^2 > x$



localement autour de $x=0$
bonne approximation de
 $\dot{x} = -x + x^2$

Calcul des points d'équilibre

Définissons système non linéaire : (sans entrée)

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Point d'équilibre $\bar{x}$ tel que $0 = f(\bar{x})$

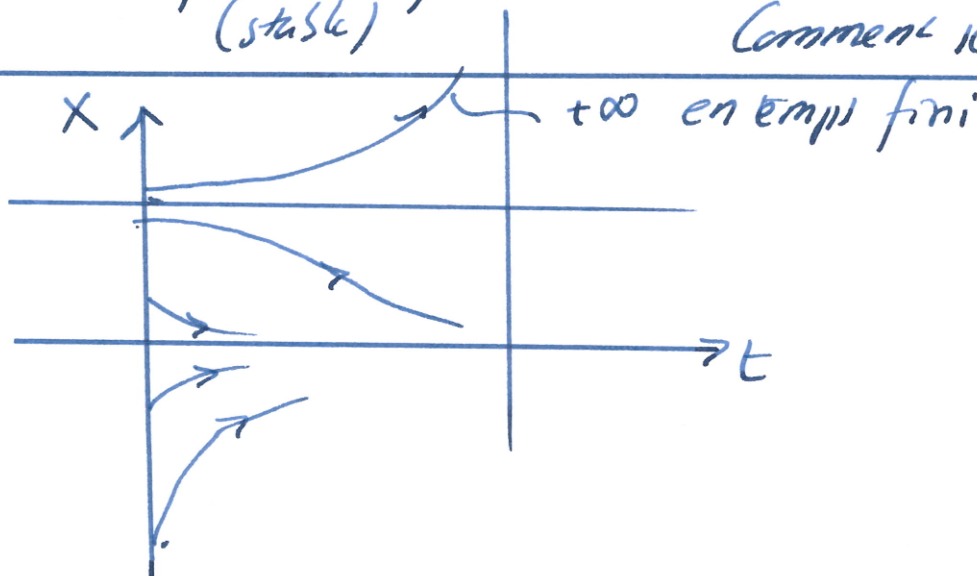
Dans notre cas, $f = -x + x^2$

$$-x + x^2 = 0 \quad x$$

$$x(x-1)$$

$x=0$ 1^{er} point d'équilibre
(stable)

$x=1$
2^{ème} point d'équilibre
Comment se comporte-t-il



$$\dot{x} = -x + x^2$$

(5)

Solution de cette équation :

$$x(x_0, t) = \frac{x_0 e^{-t}}{1 - x_0 + x_0 e^{-t}}$$

(*)

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \dot{x} = \frac{-x_0 e^{-t}(1 - x_0 + x_0 e^{-t}) + x_0 e^{-t}(x_0 e^{-t})}{(1 - x_0 + x_0 e^{-t})^2}$$

$$= \frac{-x_0 e^{-t} + x_0^2 e^{-t} - x_0^2 e^{-2t} + x_0^2 e^{-2t}}{(1 - x_0 + x_0 e^{-t})^2} \quad (\square)$$

D'un autre côté $-x + x^2 = -\frac{x_0 e^{-t}(1 - x_0 + x_0 e^{-t})}{(1 - x_0 + x_0 e^{-t})^2} + \frac{x_0^2 e^{-2t}}{(1 - x_0 + x_0 e^{-t})^2}$

$$= \frac{-x_0 e^{-t} + x_0^2 e^{-t}}{(1 - x_0 + x_0 e^{-t})^2} \quad (\Delta) \quad \downarrow \quad \text{oh} \quad \text{car } (\square) = (\Delta)$$

Examinons le dénominateur de (*)

lorsque $x_0 > 1$ On a $1 - x_0 < 0$
 puis $\lim_{t \rightarrow \infty} 1 - x_0 + x_0 e^{-t} = 1 - x_0 < 0$

Pour contre au temps $t=0$, on a $1 - x_0 + x_0 = 1 > 0$
 il existe donc $\bar{t} > 0$ tel que $1 - x_0 + x_0 e^{-\bar{t}} = 0$

$$x_0 e^{-\bar{t}} = x_0 - 1$$

Par ex.
 que $x_0 = 1.2$

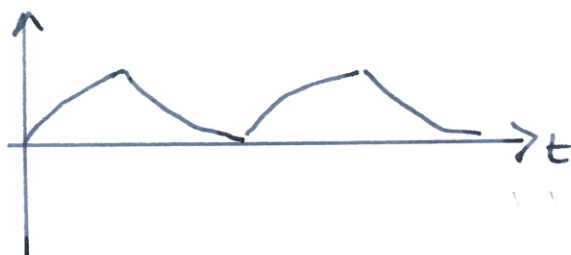
$$-\bar{t} = \ln\left(\frac{x_0 - 1}{x_0}\right) \quad \bar{t} = -\ln\left(\frac{x_0 - 1}{x_0}\right) = -\ln \frac{0.2}{1.2} = 1.79 \text{ [s]}$$

3. Réponse indiciale disymétrique

(6)

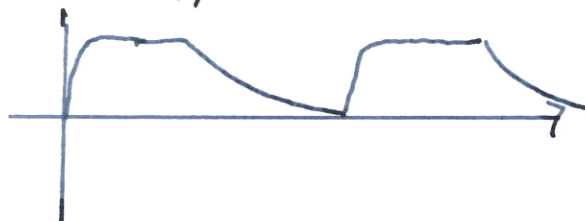
Soit le système linéaire

$$\dot{x} = -x + u$$



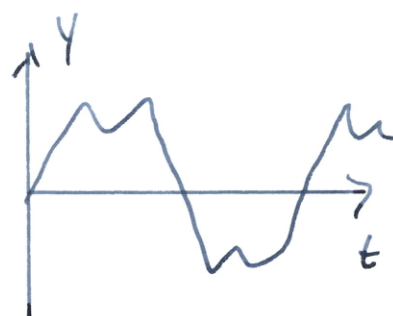
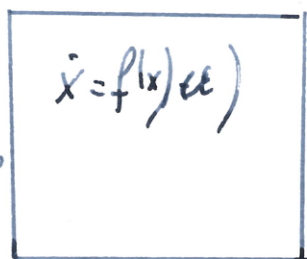
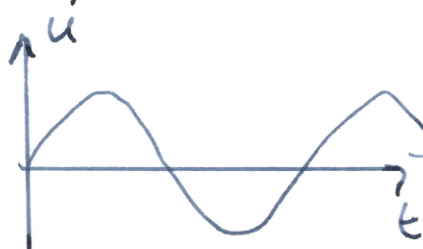
Soit le système nonlin.

$$\dot{x} = -x|x| + u$$



4. Réponse polychromatique à un signal harmonique (système avec dissipation d'énergie).

Régime permanent:



5. Trajectoires chaotiques

Exemple: attracteur de Lorenz. *seules non-linéarités!*

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = rx - y - z \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}$$

$$\sigma = 10 \quad b = 8/3 \\ r = 28.$$

Il y a trois points d'équilibre distincts

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{b}\sqrt{r-1} \\ -\sqrt{b}\sqrt{r-1} \\ r-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\sqrt{2} \\ -6\sqrt{2} \\ +27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8.5 \\ -8.5 \\ +27 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} +\sqrt{b}\sqrt{r-1} \\ +\sqrt{b}\sqrt{r-1} \\ r-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +8.5 \\ +8.5 \\ +27 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres

$$A_i = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}_i}$$

$\lambda(A_i)$

(7)

autour de $\bar{x}_1$

$$\begin{pmatrix} -22.8 \\ 11.8 \\ -2.67 \end{pmatrix}$$

point selle.

autour de $\bar{x}_2$

$$\begin{pmatrix} -13.85 \\ 0.09 + 10.2i \\ 0.09 - 10.2i \end{pmatrix}$$

- une branche stable

- un foyer instable.

autour de $\bar{x}_3$

$$\begin{pmatrix} -13.85 \\ 0.09 + 10.2i \\ 0.09 - 10.2i \end{pmatrix}$$

- une branche stable

- un foyer instable.

Valeurs propres:

$$\bar{x}_1: \begin{pmatrix} -0.61 \\ 0.79 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0.42 \\ -0.91 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vecteurs propres $\vec{x}_2$ et $\vec{x}_3$

(8)

$$\begin{pmatrix} 0.86 \\ -0.33 \\ 0.40 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -0.27 - 0.3i \\ 0.032 - 0.57i \\ 0.72 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -0.27 + 0.3i \\ 0.032 + 0.57i \\ 0.72 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_3 \quad \begin{pmatrix} 0.86 \\ -0.33 \\ -0.4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -0.27 - 0.3i \\ 0.032 - 0.57i \\ -0.72 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -0.27 + 0.3i \\ 0.032 + 0.57i \\ -0.72 \end{pmatrix}$$

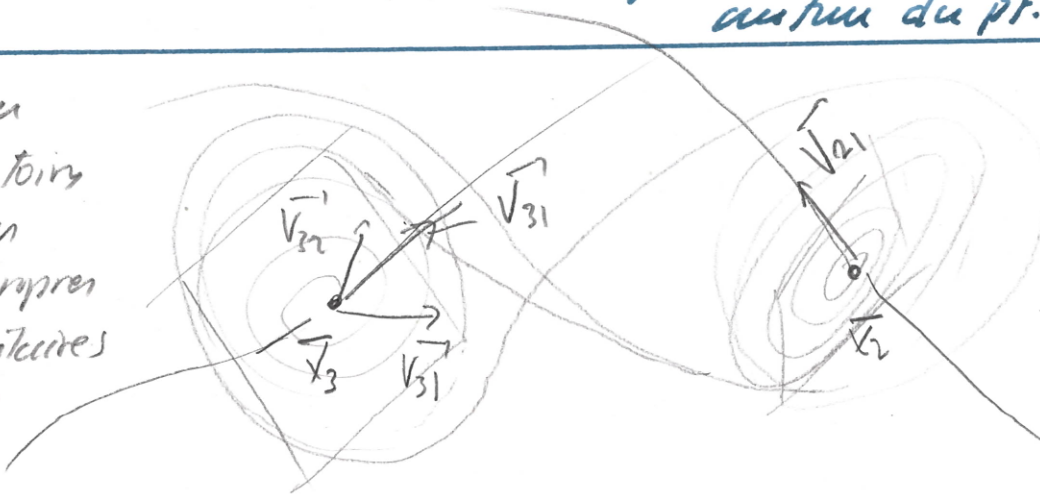
En effectuant $\vec{V}_{32} + \vec{V}_{33}$ on obtient un grand axe réel

et $\vec{V}_{32} - i\vec{V}_{33}$ on obtient un deuxième grand axe réel

$\Rightarrow$ plan tangent aux traj. localement autour du pt. d'équilibre.

Remarque
les trajectoires
sont des
vecteurs propres
complémentaires
au plan

$\vec{V}_{31}$



- sensible aux cond. initiales.

- topologiquement instable.

- instabilité bornée.

- repasse arbitrairement près et avec infimité de fois, le point d'équilibre.