Commande Non Linéaire
TP 2

Ph. Müllhaupt

L'objectif de ces exercices est d'illustrer les méthodes de Lyapunov et se présente sous la forme d'une succession de problèmes à résoudre dans l'ordre. En cas de problème, n'hésitez pas à m'interroger pour ne pas rester bloqué. Vous pouvez faire ce TP en petit groupe.

Exercice 2 : Fonction de Lyapunov

Rappel théorique :
On considère le système (non-linéaire autonome)

$$\dot{x} = f(x) \qquad x(t=0) = x_0 \qquad f(0) = 0$$

On cherche maintenant à savoir si le point d'équilibre à l'origine est stable. Comme il s'agit d'un système non-linéaire, décider de la stabilité globale du système peut être difficile. En effet, la stabilité locale est assurée si le système linéarisé (au point d'équilibre) est strictement stable, c.-à-d. si

$$\Re\lambda_i \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} \right) < 0$$

Cependant, cette condition est insuffisante pour déterminer la stabilité globale. Une méthode pour démontrer celle-ci est la méthode de Lyapunov avec une condition supplémentaire pour garantir la stabilité globale. Dans cette méthode, on cherche une fonction définie positive continue V

$$V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad V(0) = 0, \qquad V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

qui possède une "dérivée temporelle" (semi) définie négative

$$\dot{V} = L_f V = \frac{\partial V}{\partial x} f \leq 0 \qquad \forall x \neq 0$$

L'existence d'une telle fonction suffit à prouver la stabilité, mais trouver une telle fonction est une autre paire de manches...

a) Dynamique du pendule

Durée estimée : 15 min
Fichiers :

`exercice1a.m`

Soit le pendule simple représenté ci-dessous

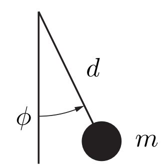

FIGURE 1 – Pendule simple

Déterminons rapidement les équations de la dynamique.

— Déterminer les expressions de l'énergie potentielle et cinétique E_p et E_c.
— Construire le lagrangien $\mathcal{L} = E_c - E_p$.
— Avec le moment de frottement donné par $M = -k\dot{\phi}$ (force généralisée F_ϕ), déterminer l'équation différentielle décrivant la dynamique du système

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = F_\phi = M$$

— Transformer ceci en un système d'équations différentielles du premier ordre en x_1 et x_2 avec $\dot{x}_1 = x_2$ et $\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$.
— Compléter le fichier et le lancer.
— Un plan de phase avec les différentes conditions initiales est dessiné, expliquer ce qui s'y passe.

b) Premier candidat de Lyapunov

Durée estimée : 15 min
Fichiers :

`exercice1b.m`

Un candidat de Lyapunov souvent utilisé dans les systèmes physiques est la somme des énergies cinétique et potentielle.

— Calculer l'expression $V = E_c + E_p$
— Calculer l'expression de sa dérivée temporelle $\dot{V}$
— V est-elle définie positive ? $\dot{V}$ est-elle définie négative ? Conclusions ?
— Compléter le fichier et observer l'évolution temporelle de V et de $\dot{V}$ dans un graphique.

Un meilleur candidat est donné par

$$V = \frac{1}{2}x_2^2 - \left(\frac{g}{d} + \frac{k^2}{2m^2d^4}\right)\cos(x_1) + \frac{k}{2md^2}x_2\sin(x_1) + \left(\frac{g}{d} + \frac{k^2}{2m^2d^4}\right)$$

Cette fonction n'a de pas de sens physique.

— Comme dans le cas précédent, calculer $\dot{V}(x)$. Représenter $V(\mathcal{X}(x_0,t))$ et $\dot{V}(\mathcal{X}(x_0,t))$. Représenter également les surfaces des applications $x \to V(x)$ et $x \to \dot{V}(x)$.

— Cette fois, que vous suggère l'allure des graphiques quand au type de stabilité de l'origine du système ?

c) Analyse locale

Durée estimée : 10 min
Fichiers : pas de fichier.
Vérifier la stabilité exponentielle local par linéarisation du système.

d) Candidat de Lyapunov quadratique

Durée estimée : 10 min
Fichiers :

```
exercice1d.m
```

On est souvent tempté d'utiliser le système linéarisé pour construire un candidat de Lyapunov. En effet, pour tout système linéaire stable, la solution de l'équation dite "de Lyapunov" fournit un candidat quadratique avec une décroissance temporelle arbitraire (que l'on peut choisir avec la matrice définie positive Q), donné par

$$\dot{V}(\mathcal{X}(x_0,t)) = -\mathcal{X}(x_0,t)^T Q \mathcal{X}(x_0,t) \qquad Q > 0$$

Résoudre l'équation de Lyapunov

$$A^T P + PA = -Q$$

pour le système linéarisé. Choisir $Q = I_2$. Utiliser la fonction MATLAB

```
lyap
```

Attention cette fonction demande la transposée de la matrice, à savoir A^T. Dessiner les courbes équipotentielles du candidat de Lyapunov

$$V = x^T P x$$

et superposer-les sur le plan de phase.

Dans quelle mesure ce candidat est valide ?

Calculer V et $\dot{V}$. Dessiner leurs évolutions temporelles.

e) Principe d'invariance de LaSalle

Durée estimée : 25 min

Fichiers : pas de fichier.

Dans l'exerice 1b), vous avez calculé la décroissance temporelle $\dot{V}(\mathcal{X}(x_0,t))$ du candidat de Lyapunov énergie $V = E_c + E_p$. On constate que V est bien une fonction strictement définie positive, mais qu'en est-il de $\dot{V}$ (c.-à-d. de l'application $x \rightarrow \dot{V}(x)$) ?

- Décrire l'ensemble $\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R}^2 | \dot{V}(x) = 0\}$
- A quelles "attitudes physiques" du pendule correspond cet ensemble ?
- Décrire le plus grands ensemble invariant $\mathcal{I}$, tel que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{V}$. (Rappel, un ensemble est dit invariant si $x_0 \in \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{X}(x_0,t) \in \mathcal{I}, \forall t \geq 0\}$
- A quelles "attitudes physiques" du pendule correspond cet ensemble $\mathcal{I}$?
- Finalement, que pouvez vous en déduire concernant la stabilité asymptotique ?

Quelques fonctions Matlab utiles

`lyap`

: Résoud l'équation $AP + PA^T = -Q$. Il faut donc donner la fonction A^T.

`help`

: la fonction d'aide de Matlab.

`plot`

: permet de créer une figure à partire d'une ou deux vecteurs pour l'affichage.

`length`

: une fonction qui donne la longueur d'un vecteur.

`size`

: une fonction qui donne la dimension d'une matrice.

`ode45`

: une fonction qui intègre une équation différentielle ordinaire.