

Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 + x_2^2 - 2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 + x_2\end{aligned}$$

1. Trouver tous les points d'équilibre.
2. Linéariser autour des points d'équilibre et déterminer localement la nature des trajectoires (calculer les valeurs propres et les vecteurs propres).
3. Dédire ainsi le portrait de phase.
4. Déterminer l'index des points d'équilibre par la méthode graphique du cours. Pour la courbe de choix arbitraire prendre un cercle de rayon 1 centré sur les points d'équilibre et commencer par prendre 6 points équirépartis sur les cercles en question.
5. Calculer le signe du déterminant du Jacobien à chaque point d'équilibre.
6. Déterminer l'index d'un cercle de rayon 2, premièrement graphiquement en prenant 8 points équirépartis, deuxièmement à l'aide du théorème de l'index.