Commande non linéaire

STI - Master

Série I

Dr. Ph. Müllhaupt

Le point 3 de l'exercice I.2 et les exercices I.3 et I.4 nécessitent un ordinateur pour implémenter les solutions numériques.

Exercice I.1

Calculer les points d'équilibre et tracer approximativement les trajectoires $\chi(x_0, t)$ pour les trois équations différentielles suivantes :

1. $\dot{x} = x^2 + 5x + 5$
2. $\dot{x} = (x-3)(x+6)(x-12)(x+24)$
3. $\dot{x} = -\mathrm{sgn}(x)\sqrt{|x|}$

Exercice I.2

Soit le système (à deux états)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 + 3x_2 + 6x_1^2 + 6x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + 7x_2^2 \end{aligned}$$

1. Calculer les matrices issues de la linéarisation aux points d'équilibre.
2. Calculer les valeurs et vecteurs propres et dessiner approximativement les trajectoires proches du point d'équilibre.
3. Dessiner les éléments de pentes (portrait de phase type "limaille de fer") dans chaque cas et déterminer approximativement le portrait de phase.
4. Evaluer les index.

(**NB** : les points 3 et 4 nécessitent le contenu de la leçon 2 sur le plan de phase)

Exercice I.3

Cet exercice nécessite un ordinateur pour implémenter la solution numérique. Soit la méthode d'intégration numérique de Euler qui consiste à approximer la dérivée par une différence finie :

$\dot{x} \approx \frac{x(t)-x(t-h)}{h}$

Utiliser cette techniques pour intégrer numériquement l'équation de l'oscillateur

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1\end{aligned}$$

Répéter la simulation en changeant le système en ajoutant une force de frottement proportionnelle à la vitesse. La deuxième équation devient alors

$$\dot{x}_2 = -x_1 - 0.02x_2$$

Changer la constante 0.02 pour la rendre soit plus grande ou plus petite et comparer avec la solution exacte (solution analytique). Que constatez-vous ?

Exercice 1.4

Même question que I.3 mais en utilisant la méthode de Runge-Kutta à pas fixe pour intégrer l'équation

$$\dot{x} = f(x, t)$$

La méthode consiste à calculer quatre grandeurs intermédiaires k_1, k_2, k_3 et k_4 pour effectuer un pas d'intégration :

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad \text{avec} \qquad t_{k+1} = 1_k + h$$

et

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(x_k, t_k) \\ k_2 &= hf(x_k + \frac{1}{2}k_1, t_k + \frac{1}{2}h) \\ k_3 &= hf(x_k + \frac{1}{2}k_2, t_k + \frac{1}{2}h) \\ k_4 &= hf(x_k + k_3, t_k + h)\end{aligned}$$

Comparer vos résultats avec la commande 'ode45' de MATLAB.