

Illustration du Théorème de Chetaev

Point matériel qui glisse le long d'une barre

Enoncé

Un point matériel est assujéti à glisser le long d'une barre. La barre est fixée en un point O et peut tourner librement autour de se point O avec un angle ϕ . Le point matériel est positionné par sa distance radiale r par rapport à O .

Coordonnées, degrés de liberté et équation du mouvement

Le système possède deux degrés de liberté et les coordonnées généralisées sont r et ϕ . Comme il n'y a pas de forces issues de potentiels, le lagrangien est égal à son énergie cinétique. L'inertie de la barre est $I_O = \frac{1}{3}ml^2$, ce qui donne

$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{2}I_O\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{1}{6}m((l^2 + 3r^2)\dot{\phi}^2 + 3\dot{r}^2)$$

Les équations dynamiques sous la forme de Lagrange sont

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} &= 0\end{aligned}$$

On obtient le système

$$\begin{aligned}m\ddot{r} &= m r \dot{\phi}^2 \\ m(l^2\ddot{\phi} + 3r^2\ddot{\phi} + 6r\dot{\phi}\dot{r}) &= 0\end{aligned}$$

En écrivant explicitement les deuxièmes dérivées (accélérations angulaires)

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= r \dot{\phi}^2 \\ \ddot{\phi} &= -6r \frac{\dot{r}\dot{\phi}}{l^2 + 3r^2}\end{aligned}$$

Fonction de Chetaev et démonstration de l'instabilité au sens de Lyapunov

Afin de démontrer l'instabilité, une fonction de Chetaev est construite. Pour commencer, réduisons l'ordre de l'équation différentielle en utilisant des invariants. Le fait que le lagrangien est cyclique (pas de ϕ dans son expression) conduit à la constante du mouvement

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \frac{1}{3}m(l^2 + 3r^2)\dot{\phi} = L_\phi$$

qui est le moment cinétique généralisé associé à ϕ . On l'utilisera par la suite. L'énergie est le second invariant. Utilisons la conservation de l'énergie pour la réduction. En fixant l'énergie à une constante $T = C$, $\dot{\phi}$ devient une fonction de $\dot{r}$

$$\dot{\phi} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2C - m\dot{r}^2}}{\sqrt{ml^2 + 3mr^2}}$$

La dynamique se réduit alors en une seule équation différentielle ordinaire d'ordre deux

$$\ddot{r} = \frac{3(2C - m\dot{r}^2)}{ml^2 + 3mr^2}$$

L'espace de phase est donné par $r \geq 0$ et $\dot{r} \in \mathbb{R}$. La fonction de Chetaev est

$$V = \frac{1}{2} \dot{r}^2$$

En effet,

$$\dot{V} = r\dot{r} \frac{6C - 3m\dot{r}^2}{ml^2 + 3mr^2}$$

Le domaine de Chetaev est défini par

$$\Omega = \left\{ (r, \dot{r}) \mid r \geq 0 \text{ \& } 0 \leq \dot{r} < \sqrt{\frac{2C}{m}} \right\}$$

et on a dans le domaine Ω

$$\dot{V} > 0 \quad (r, \dot{r}) \in \Omega$$

et

$$\dot{V} = 0 \quad (r, \dot{r}) \in \partial\Omega$$

sur le bord du domaine. Le système est instable. Une illustration du plan de phase pour un niveau d'énergie $T = C = 1$ et pour les paramètres $m = 0.5$ et $l = 1$ est donné à la figure 1.

Intégration complète

Il est possible d'exprimer $\dot{r}$ et $\dot{\phi}$ en fonction des deux invariants $T = C$ et L_ϕ . On obtient

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{3L_\phi}{m(l^2 + 3r^2)} \\ \dot{r} &= \frac{\sqrt{-3L_\phi^2 + 2Cml^2 + 6Cmr^2}}{\sqrt{ml^2 + 3m^2r^2}} \end{aligned}$$

On constate que la deuxième équation est de la forme

$$\dot{r} = f(r)$$

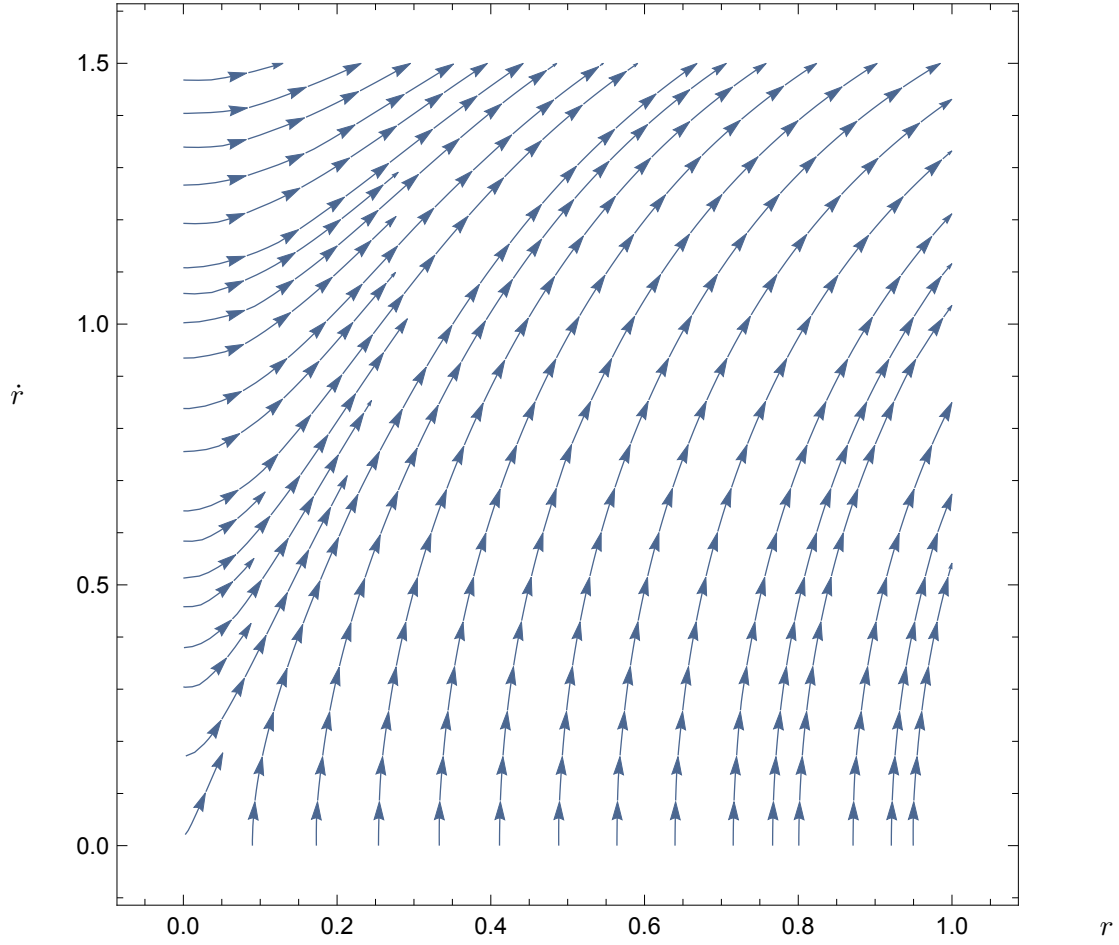


FIGURE 1: Plan de phase du système après réduction avec l'invariant de l'énergie. On constate que $V = \frac{1}{2}\dot{r}^2$ augmente pour autant que $\dot{r} < 2$, ce qui démontre l'instabilité dans le domaine de Chetaev donné par $r \geq 0$ et $0 \leq \dot{r} < \sqrt{\frac{2C}{m}} = 2$, car les constantes physiques sont $m = 0.5$ et $l = 1$ et le niveau d'énergie a été choisi (sans perte de généralité) $C = 1$.

qui peut s'intégrer en séparant les variables

$$\int \frac{dr}{f(r)} = \int dt \quad (1)$$

et donc le système est intégrable par des quadratures. On obtient une expression dans laquelle apparaît une intégrale elliptique

$$t = \frac{\sqrt{m^2(l^2 + 3r^2)} \sqrt{\frac{2Cm(l^2 + 3r^2) - 3L_\phi^2}{2Cl^2m - 3L_\phi^2}} E\left(\sin^{-1}\left(\sqrt{6}\sqrt{\frac{Cm}{3L_\phi^2 - 2Cl^2m}}r\right) \middle| 1 - \frac{3L_\phi^2}{2Cl^2m}\right)}{\sqrt{6}\sqrt{\frac{3r^2}{l^2} + 1} \sqrt{\frac{Cm}{3L_\phi^2 - 2Cl^2m}} \sqrt{2Cm(l^2 + 3r^2) - 3L_\phi^2}} \quad (2)$$

Avec les valeurs numériques $m = 0.5$, $l = 1$ et pour des valeurs des constantes du mouvement $C = L_\phi = 1$

$$t = 0.288675E \left(\sin^{-1}(1.22474r) \right) - 2. \quad (3)$$

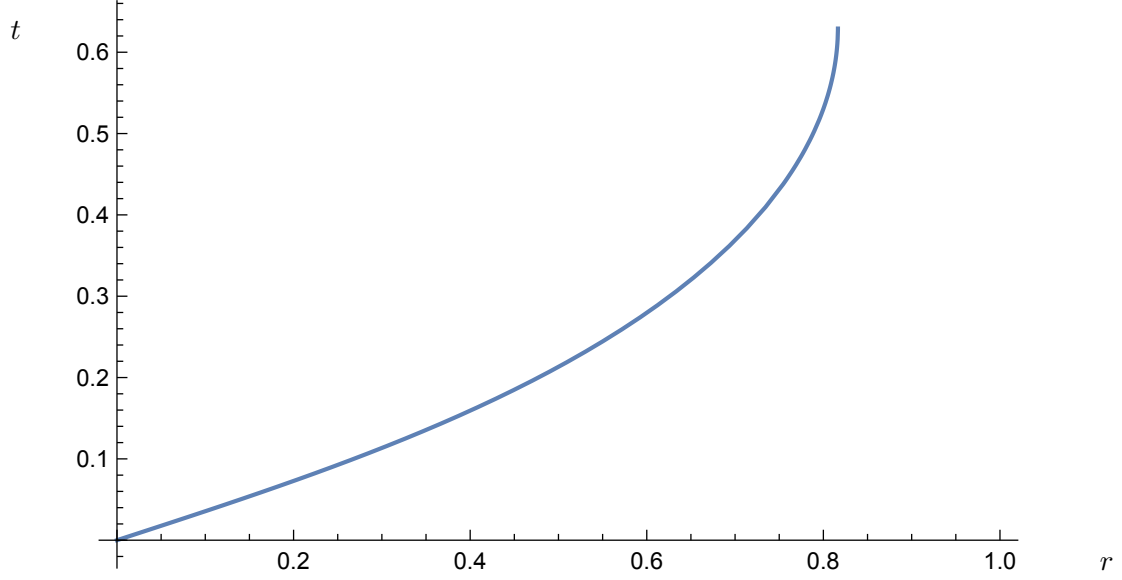


FIGURE 2: L'intégration complète du système à partir des deux invariants, quantité de mouvement généralisée L_ϕ fixée à 1 et énergie cinétique T également fixée à 1, et avec les paramètres $m = 0.5$ et $l = 1$ conduit à l'expression (3) qui est représentée ci-dessus.