Stabilité Absolue et Critère du Cercle

Analyse et Commande des Systèmes Non Linéaires

Leçon 9

1. Passivité des systèmes linéaires et équation de Lyapunov
   - Théorème de Kalman-Yakubovich-Popov
2. Système linéaire et non linéarité statique
   - Non-linéarité statique de secteur
   - Définition de la stabilité absolue
   - Conjecture de M. A. Aizerman
3. Critère du cercle
   - Stabiité asymptotique

Théorème de Kalman-Yakubovich-Popov

Théorème

Soit $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ une fonction de transfert correspondant à un système qui est à la fois commandable,

$$\text{rang } \begin{pmatrix} B & AB & \ldots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = n.$$

et observable,

$$\text{rang } \begin{pmatrix} C^T & A^T C^T & \ldots & (A^T)^{n-1} C^T \end{pmatrix} = n.$$

$G(s)$ est strictement réelle positive

$$\Updownarrow$$

$\exists\ P > 0$ et $Q > 0$ telles que

$$A^T P + PA = -Q \qquad PB = C^T.$$

Condition de suffisance

Théorème

Si un système linéaire $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$ admet deux matrices symétriques définies positives P et Q qui satisfont les deux équations

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= -Q \\ PB = C^T \end{aligned}$$

alors le système est passif avec comme fonction de stockage interne

$$V = \frac{1}{2} x^T P x$$

et comme terme de dissipation

$$g = \frac{1}{2} x^T Q x.$$

Critère de suffisance

Démonstration

$$A^T P + PA = -Q$$

Posons $V(x) = \frac{1}{2} x^T P x$ et calculons sa dérivée

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= \frac{1}{2}\left(\dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[(Ax + Bu)^T P x + x^T P (Ax + Bu)\right] \\
&= \frac{1}{2} x^T (A^T P + PA) x + u B^T P x \\
&= -\frac{1}{2} x^T Q x + u B^T P x.
\end{aligned}$$

Critère de suffisance

Démonstration (suite)

Lorsque

$$y = B^T P x = C x,$$

on obtient

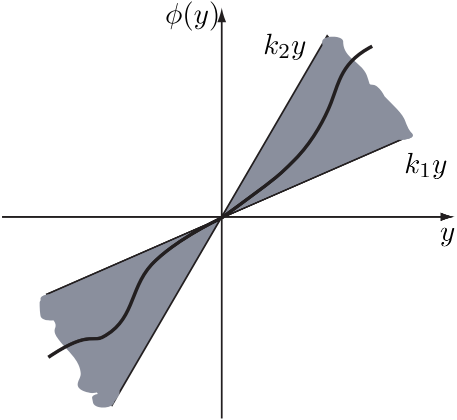
$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{2} x^T Q x + u y \\ &= u y - g, \end{aligned}$$

de telle sorte que le système est passif avec

$$V = \frac{1}{2} x^T P x \quad \text{et} \quad g = \frac{1}{2} x^T Q x.$$

Système linéaire et non linéarité statique

1. La non-linéarité appartient à un secteur.
2. La stabilité d'un point d'équilibre sera exclusivement traitée.
3. Les résultats ne seront pas approximatifs, mais exacts.



Non-linéarité statique de secteur

Définition

Une non-linéarité ϕ est de type secteur $[k_1; k_2]$ lorsque

$$\begin{cases} k_1 y \leq \phi(y) \leq k_2 y & y \geq 0 \\ k_2 y \leq \phi(y) \leq k_1 y & y < 0 \end{cases}$$

Définition de la stabilité absolue

Un système linéaire est bouclé par une non-linéarité statique $u = -\phi(y)$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - B\phi(y) \\ y &= Cx \end{aligned}$$

Définition

Un système linéaire $\dot{x} = Ax + Bu$ avec $y = Cx$ est dit stable de manière absolue vis-à-vis de la non-linéarité ϕ de secteur $[k_1; k_2]$, si le système résultant est stable au sens de Lyapunov quel que soit $\phi(y) \in [k_1; k_2]$.

Conjecture de M. A. Aizerman

Conjecture

$$\forall k \in [k_1; k_2], \quad \Re(\lambda_i\,(A - BCk)) < 0,\, i = 1, \ldots, n$$

$$\Downarrow$$

Le système linéaire $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, bouclé par une non-linéarité secteur $u = -\phi(y)$ avec $\phi(y)$ appartenant au secteur $[k_1; k_2]$, est stable.

Critère du cercle

Théorème

- Si $0 = k_1 < k_2$, stabilité absolue lorsque

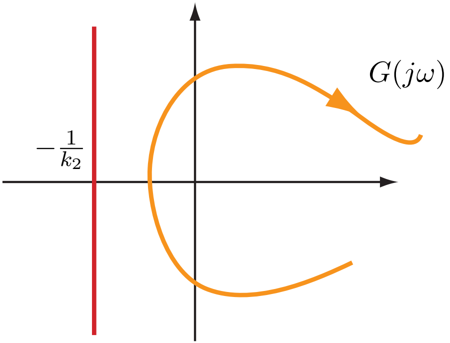


FIGURE : Critère du cercle lorsque $k_2 > 0$ et $k_1 = 0$.

Critère du cercle

Théorème

- Si $0 < k_1 < k_2$, stabilité absolue lorsque

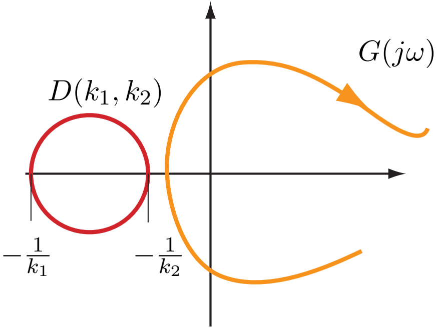


FIGURE : Critère du cercle lorsque $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$.

Critère du cercle

Théorème

- Finalement, si $k_1 < 0 < k_2$, stabilité absolue lorsque

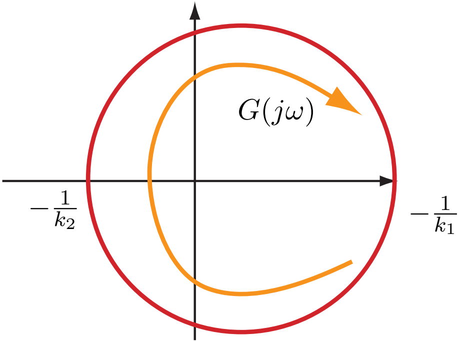


FIGURE : Critère du cercle lorsque $k_1 < 0$ et $k_2 > 0$.

Démonstration de stabilité asymptotique, $\phi \in [0, +\infty]$

$k_1 = 0$, $k_2 = +\infty$ signifient :

- $\Re(G(j\omega)) \geq 0$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

est positive réelle

$$
\begin{aligned}
A^T P + PA &= -Q \\
PB &= C^T .
\end{aligned}
$$

Il est important de noter que le choix de cette matrice est liée aux propriétés entrée-sortie donné par les matrices B et C.

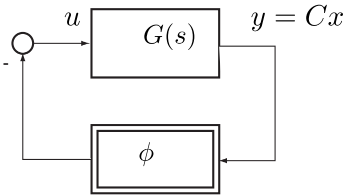


FIGURE : Diagramme de blocs de la cascade entre un système linéaire et une non-linéarité de secteur compris entre 0 et $+\infty$.

Démonstration de stabilité asymptotique

Soit $u = -\phi(u)$ et la fonction de Lyapunov associée à P :

$$V = \frac{1}{2} x^T P x,$$

dont la dérivée temporelle

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \frac{1}{2} x^T P \dot{x} + \frac{1}{2} \dot{x}^T P x \\
&= \frac{1}{2} x^T (A^T P + PA) x + x^T PBu \\
&= -\frac{1}{2} x^T Q x + x^T C^T u \\
&= -\frac{1}{2} x^T Q x - y^T \phi(u)
\end{aligned}$$

montre que sous la condition $\phi \in [0; +\infty]$ (i.e. $y^T \phi(y) \geq 0$)

$$\dot{V} < 0 \qquad x \neq 0.$$

Secteur $[k_1; k_2]$

On note $[\phi]$ pour l'opérateur entrée-sortie associé à la fonction $\phi(.)$. Pour transformer le secteur $[k_1; k_2]$ en un secteur $[0; +\infty]$:

$$\frac{1}{[\phi] - k_1} - \frac{1}{k_2 - k_1}$$

En inversant cette expression, on obtient toujours une non-linéarité secteur $[0; +\infty]$,

$$\frac{1}{\frac{1}{[\phi]-k_1} - \frac{1}{k_2-k_1}} = \frac{[\phi] - k_1}{1 - \frac{1}{k_2-k_1}([\phi] - k_1)},$$

Bouclages associés

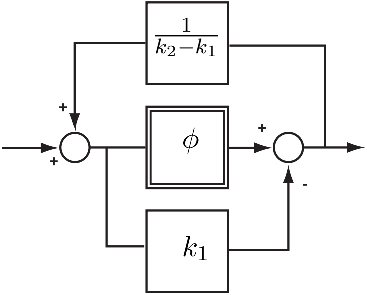


FIGURE : Bouclages permettant de modifier une non-linéarité de secteur $[k_1; k_2]$ en une non-linéarité de secteur $[0; +\infty]$.

Compensation complète

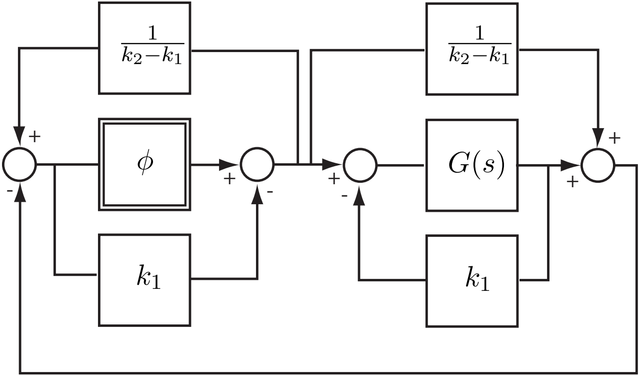


FIGURE : Les bouclages introduits se compensent parfaitement conduisant le schéma ci-dessus à être identique au bouclage de $G(s)$ par la non-linéarité ϕ.

Fonction de transfert $\bar{G}(s)$ associée au secteur $[0; +\infty]$

Nouvelle fonction de transfert

En isolant la non-linéarité transformée par les bouclages, un nouveau système linéaire $\bar{G}(s)$ est identifié :

$$\bar{G}(s) = \frac{G(s)}{1 + k_1 G(s)} + \frac{1}{k_2 - k_1} = \frac{\frac{1}{k_2} + G(s)}{\frac{1}{k_1} + G(s)} \left(\frac{k_2}{k_1} \frac{1}{k_2 - k_1} \right)$$

$\bar{G}(s)$ est positive réelle par construction

Cas $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$

Comme, d'une part, $k_2 > k_1$ (propriété de la définition du secteur), le second facteur du dernier membre (formule préc.) est toujours positif, et, d'autre part, $\bar{G}(s)$ doit être strictement positif réel, nous aboutissons à la condition

$$\Re\left(\frac{\frac{1}{k_2} + G(j\omega)}{\frac{1}{k_1} + G(j\omega)}\right) > 0 \qquad \forall\omega \in \mathbb{R}$$

Représentation graphique du critère du cercle

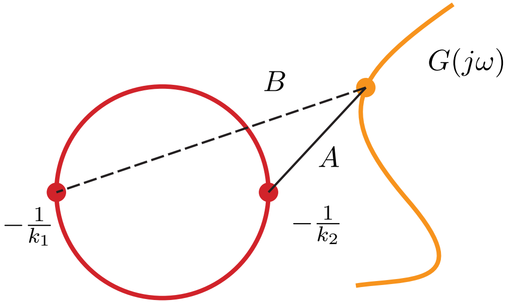


FIGURE : Trait plein : $A = \frac{1}{k_2} + G(j\omega)$; Trait hachuré : $B = \frac{1}{k_1} + G(j\omega)$.

Lorsque $k_2 > k_1 > 0$, $G(j\omega)$ est à l'extérieur du cercle signifie...

En utilisant la représentation graphique :

$$\Re\left(\frac{A}{B}\right) > 0 \Leftrightarrow |\arg(A) - \arg(B)| < \frac{\pi}{2}$$

ce qui conduit à ce que la valeur absolue de la différence entre les arguments de $A = \frac{1}{k_2} + G(j\omega)$ et de $B = \frac{1}{k_1} + G(j\omega)$ reste inférieure à $\pi/2$.

Conséquence :

$G(j\omega)$ est à l'extérieur au cercle $\Leftrightarrow \bar{G}(s)$ est une fonction réelle positive