

Passivité

Analyse et Commande des Systèmes Non Linéaires

Leçon 8

- 1 Passivité
 - Notion intuitive
 - Résistance électrique
 - Circuit R-L-C
 - Passivité et fonction de Lyapunov
 - Définition différentielle
 - Définition intégrale
- 2 Propriétés
 - Connexion en parallèle
 - Connexion en rétroaction
- 3 Passivité pour les systèmes linéaires
 - Degré relatif et minimum de phase

Notion Intuitive

Système :

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$y = h(x, u)$$

Passivité :

Un système est passif lorsque la puissance soutirée se fait au détriment du stock interne d'énergie. Ainsi, il ne peut pas y avoir de génération interne de puissance.

Résistance électrique

La puissance est dissipée :

$$uy = ui = Ri^2 = g > 0$$

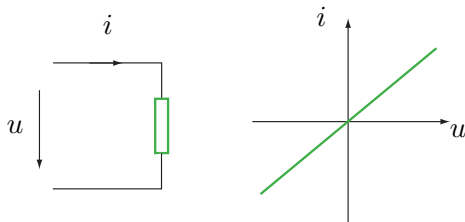


FIGURE : La résistance électrique est un système statique passif

Absence de dynamique

Pour un système statique passif :

$$uy = g, \quad g > 0$$

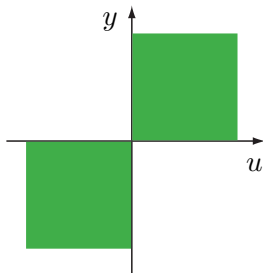


FIGURE : La caractéristique doit appartenir au secteur représenté en vert solide.

Circuit R-L-C

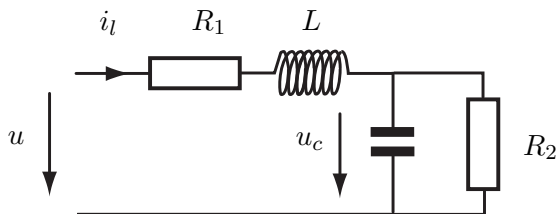


FIGURE : Un circuit électrique R-L-C est un système dynamique passif.

Circuit R-L-C

Equations :

$$u = R_1 i_l + L \frac{di_l}{dt} + u_c$$

$$i = C \frac{du_c}{dt} + u_c \frac{1}{R_2}$$

En posant $x_1 = i_l$ et $x_2 = u_c$:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L}u - \frac{R_1}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{R_2 C}x_2$$

Circuit R-L-C

Fonction de stockage

$$V = \frac{1}{2}Lx_1^2 + \frac{1}{2}Cx_2^2$$

$$\dot{V} = Lx_1\dot{x}_1 + Cx_2\dot{x}_2$$

$$= ux_1 - R_1x_1^2 - x_1x_2 + x_2x_1 - \frac{1}{R_2}x_2^2$$

$$= ux_1 - R_1x_1^2 - \frac{1}{R_2}x_2^2$$

$$= uy - g(x)$$

$$g(x) = R_1x_1^2 + \frac{1}{R_2}x_2^2 \geq 0$$

Passivité et fonction de Lyapunov

Lyapunov :

Système sans entrée : $\dot{x} = f(x) \quad \frac{d}{dt}V \leq 0$

Passivité :

Système entrée-sortie : $\begin{array}{ll} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x) \end{array} \quad \frac{d}{dt}V \leq \text{Puissance Fournie}$

Définition différentielle de la passivité

Définition

Soit le système

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

S'il existe $(V > \gamma > -\infty)$ et $g \geq 0$ tels que et

$$\dot{V} = uy - g$$

alors le système est passif.

Définition

Si $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > -\infty$ avec

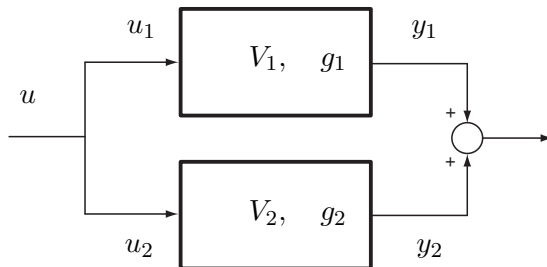
$$\int_0^\infty u(\tau)y(\tau)d\tau > \alpha$$

alors le système est passif.

Equivalence avec la définition différentielle :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \dot{V}(\tau)d\tau &= \int_0^\infty (u(\tau)y(\tau) - g)d\tau \leq \int_0^\infty u(\tau)y(\tau)d\tau \\ \alpha = \gamma - V(0) &\leq V(\infty) - V(0) \leq \int_0^\infty u(\tau)y(\tau)d\tau\end{aligned}$$

La connexion en parallèle préserve la passivité



La connexion en parallèle préserve la passivité

Justification :

$$\dot{V}_1 = u_1 y_1 - g_1$$

$$\dot{V}_2 = u_2 y_2 - g_2$$

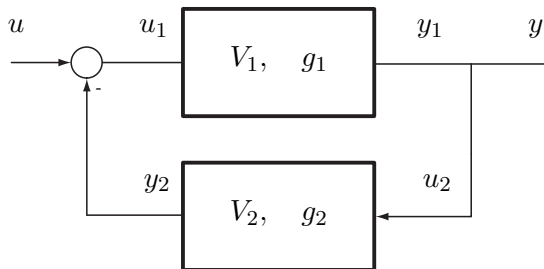
$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = u_1 y_1 + u_2 y_2 - g_1 - g_2$$

$$= u y_1 + u y_2 - g_1 - g_2$$

$$= u(y_1 + y_2) - g_1 - g_2$$

$$\dot{V} = u y - g,$$

La connexion en rétroaction préserve la passivité



La connexion en rétroaction préserve la passivité

Justification :

$$\dot{V}_1 = u_1 y_1 - g_1$$

$$\dot{V}_2 = u_2 y_2 - g_2$$

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = u_1 y_1 + u_2 y_2 - g_1 - g_2$$

$$= (u - y_2) y_1 + u_2 y_2 - g_1 - g_2$$

$$= (u - y_2) y_1 + y_1 y_2 - g_1 - g_2$$

$$= u y_1 - y_2 y_1 + y_1 y_2 - g_1 - g_2$$

$$= u y_1 - g_1 - g_2$$

$$\dot{V} = u y - g.$$

Passivité pour les systèmes linéaires

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

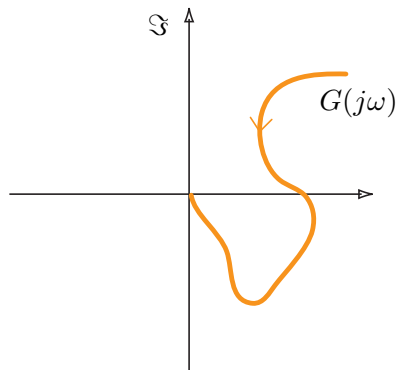
Théorème

Le système $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ est passif

$$\Leftrightarrow$$

$$\Re[G(j\omega)] \geq 0$$

Passivité pour les systèmes linéaires



Passivité et réponse harmonique

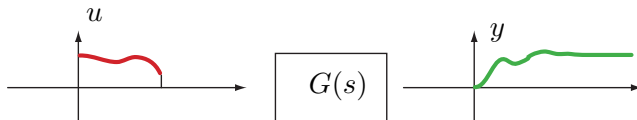


FIGURE : Illustration pour la démonstration de la passivité

Passivité et réponse harmonique

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} u(\tau)y(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)u(\tau)d\tau \\
 = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega)U^*(j\omega)d\omega \quad (\text{Parseval}) \\
 = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) |U(j\omega)|^2 d\omega \\
 = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 G(j\omega) |U(j\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G(j\omega) |U(j\omega)|^2 d\omega \\
 = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G(-j\bar{\omega}) |U(-j\bar{\omega})|^2 d\bar{\omega} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G(j\omega) |U(j\omega)|^2 d\omega
 \end{aligned}$$

$$u(t) \text{ réel} \rightarrow U(j\omega) = U^*(-j\omega)$$

$$|U(-j\omega)|^2 = U(-j\omega)U^*(-j\omega) = U^*(j\omega)U(j\omega) = |U(j\omega)|^2$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^\infty u(\tau)y(\tau)d\tau &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty G(-j\omega) |U(j\omega)|^2 d\omega \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty G(j\omega) |U(j\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{G(-j\omega) + G(j\omega)}{2} |U(j\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re[G(j\omega)] |U(j\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

$$\Re[G(j\omega)] \geq 0, \forall \omega > 0 \Rightarrow \int_0^\infty u(\tau)y(\tau)d\tau > \alpha, \alpha > -\infty$$

Passivité et réponse harmonique

Preuve par l'absurde en supposant :

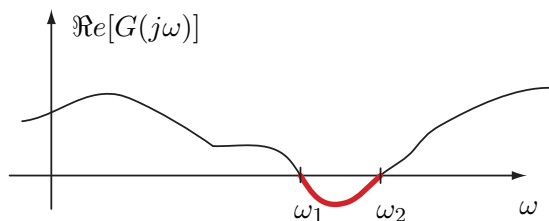


FIGURE : La partie réelle est négative pour dans la plage fréquentielle $]\omega_1; \omega_2[$.

Passivité et réponse harmonique

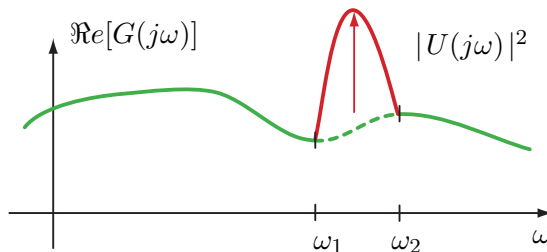


FIGURE : L'énergie dans la plage de fréquence $]\omega_1; \omega_2[$ est augmentée de manière arbitraire

Passivité et réponse harmonique

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty u(\tau)y(\tau)d\tau &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_1} \Re[G(j\omega)] |U(j\omega)|^2 d\omega \quad (\geq 0) \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \Re[G(j\omega)] |U(j\omega)|^2 d\omega \quad (< 0) \Downarrow \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_{\omega_2}^\infty \Re[G(j\omega)] |U(j\omega)|^2 d\omega \quad (\geq 0).
 \end{aligned}$$

Passivité et réponse harmonique

$$(A) \exists \omega_1, \omega_2 \rightarrow \Re\{G(j\omega) < 0\} \forall \omega \in (\omega_1; \omega_2)$$

$$\Downarrow$$

$$(B) \forall \alpha > -\infty, \exists u(t) \text{ tel que,}$$

$$\int_0^\infty u(\tau)y(\tau)d\tau < \alpha.$$

$$A \Rightarrow B \equiv \overline{A} \Leftarrow \overline{B} :$$

$$\Re\{G(j\omega)\} \geq 0, \forall \omega > 0 \Leftarrow \exists \alpha > -\infty, \int_0^\infty u(\tau)^T y(\tau)d\tau > \alpha, (\forall u(t))$$

$$\Re\{G(j\omega)\} \geq 0, \forall \omega > 0 \Leftarrow \text{Passivité}$$

$$G(s) = \frac{\prod_{i=0}^m (s - z_i)}{\prod_{i=0}^n (s - p_i)}$$

Degré relatif :

Le degré relatif noté d^or est défini comme la différence

$$d^or = n - m$$

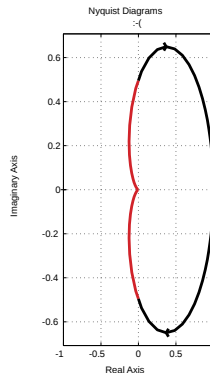
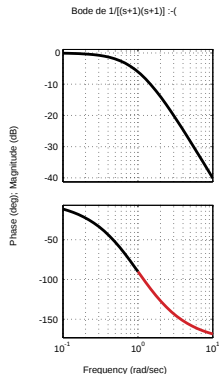
où n est le nombre de pôles de la fonction de transfert et m , le nombre de zéros.

Minimum de phase :

Un système linéaire est dit à minimum de phase si tous ces zéros ont une partie réelle strictement négative. i.e. $\Re(z_i) < 0$, $i = 1, \dots, m$.

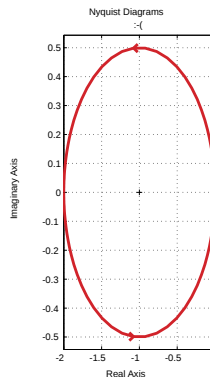
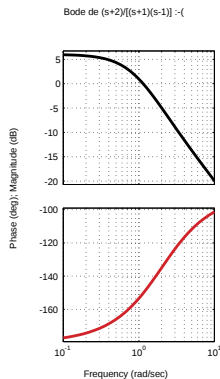
Exemple 1, degré relatif = 2

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+1)}$$



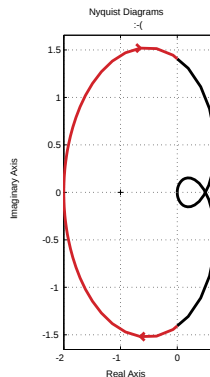
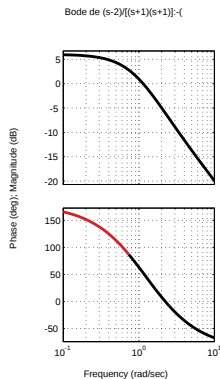
Exemple 2, degré relatif = 1, instable

$$G(s) = \frac{s + 2}{(s + 1)(s - 1)}$$



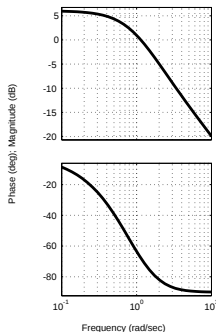
Exemple 3, degré relatif = 1, stable, non-min. phase

$$G(s) = \frac{s - 2}{(s + 1)(s + 1)}$$



Exemple 4, degré relatif = 1, stable, min. phase

$$G(s) = \frac{s + 2}{(s + 1)(s + 1)}$$

Bode de $(s+2)/[(s+1)(s+1)]$:-)

Nyquist Diagrams :-)

